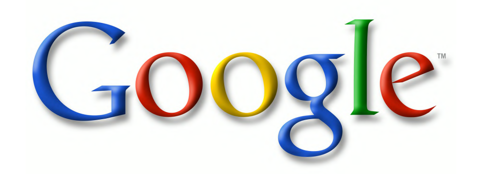



Hosted by Google

Abhandlungen

zur

Geschichte der Mathematik.

Erstes Heft.

Mit zwei lithographirten Tafeln.



Leipzig,
Verlag von B. G. Teubner.
1877.



Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Inhalt des ersten Heftes.

Das

Rechnen im 16. Jahrhundert.

Von

P. Treutlein,
Professor am Gymnasium zu Karlsruhe.

1. Einleitung. — Nicht mit Unrecht kann man unsere Zeit die des Studiums der Entwickelungsgeschichte nennen. Auf allen Gebieten wissenschaftlichen Lebens ist man eifrigst damit beschäftigt, nicht nur neues Material in fast unendlicher Menge herbeizuschaffen, um jedes einzelne der natürlichen Dinge und jede zu den verschiedensten Zeiten hervorgetretene Aeusserung des Menschheitsgeistes zu erkennen; man erstrebt mehr, man will das Werden jeder solchen Thatsache ergründen und das Entfalten jedes Zustandes aus dem vorangehenden gewissermassen mit- und nacherleben, man will die hierbei waltenden Gesetze auffinden und die Bedingungen kennen lernen, welche bald unterstützend und fördernd, bald hemmend auf die Entwickelung einwirken.

Wenn nun auch zugegeben werden muss, dass ganz besonders auf dem Gebiete der Naturwissenschaften jene geistige Richtung vorherrschend ist, so wird sich doch nicht läugnen lassen, dass dieselbe überall mehr denn je zur Geltung komme. Auch in Bezug auf Mathematik geben die letzten paar Jahrzehnte redlich Zeugniss dafür, dass neben dem in riesigem Masse statthabenden Auffinden und Anbauen unbekannten Terrains in entsprechender Weise auch die Fragen nach dem Wann und Wie der Eroberung des längstbesetzten jetzt ihre Antwort finden.

Es ist erklärlich, dass bei solchem Zuge der Zeit auch die Entwickelung unseres gewöhnlichen Rechnens in den Kreis der Betrachtung gezogen wird. Man könnte zwar meinen, dass schon lange kaum Etwas allgemeiner bekannt sein müsse; denn Millionen und Millionen aller Culturvölker erlernen in früher Jugend schon und gebrauchen während ihres ganzen Lebens tagtäglich die eigenthümlichen zehn Zeichen zum Schreiben der Zahlen und operiren mit denselben fast unbewusst nach den bekannten Vorschriften der Arithmetik — und doch, wie Wenige sind es, denen die Feinheit des seltenen Instrumentes, dessen sie sich bedienen, zum Bewusstsein kommt! wie Wenige, die Aufschluss zu geben vermöchten über Beginn und Fortgang im Gebrauche desselben!

Und doch gewährt es grosses Interesse zu verfolgen, wie die Kenntniss, welche heute in den Kleinkinderschulen vermittelt und bei uns kaum

recht als geistiger Besitz geachtet wird, in weitentlegenen Zeiten und an fernen Orten ihren Anfang nahm, wie Jahrhunderte lang nur die bedeutendsten Köpfe in sie einzudringen vermochten und wie sie in verhältnissmässig kurzer Zeit, was kaum zu ahnen gewesen, allüberall sich Eingang verschaffte. Die Einrede, dass es sich doch kaum der Mühe verlohne, mit solch einfachen Dingen sich abzugeben und deren Entwickelung nachzuspüren, kann nur von Solchen kommen, denen der Sinn für geschichtliche Entwickelung überhaupt fehlt; übrigens, war denn, was heute einfach, auch zu allen Zeiten eine so unbedeutende Sache? Und sind, um nur näher Liegendes zu erwähnen, die Elemente der analytischen Geometrie und der Differentialrechnung nicht heute ebenfalls sehr einfache Capitel der Mathematik, deren Erfindung und Entwickelung zu kennen dennoch Jedem von Interesse ist? Als ob nicht alle Aeusserungen des menschlichen Geistes als solche, zumal wenn sie einen wichtigen Culturfortschritt bedingen, von der höchsten Bedeutung wären!

2. **Aufgabe.** — In Bezug auf die Entwickelung der gemeinen Arithmetik aber ist, wie das Studium ihrer Anfänge, so auch die Betrachtung ganz besonders der Zeit von Interesse, in welcher sie aufhörte, Eigenthum einzelner Weniger zu sein, wo sie, durch eine Reihe günstiger Verhältnisse unterstützt, zu immer weiteren und weiteren Kreisen des Volkes gelangte, um bald darauf einen Theil des eisernen Bestandes an geistigem Besitz eines Jeden auszumachen. Es ist das Rechnen um die Neige des fünfzehnten und während des sechzehnten Jahrhunderts, das ich im Folgenden zu schildern mir vornehme, das Rechnen jener geistig erregten Culturepoche also, welche die Grenze zweier Zeitalter bildend das Alte sinken und aus ihm überall neues Leben hervorblühen sah.

3. **Vorarbeiten.** — Wohl liegen, soweit mir bekannt, zwei Arbeiten vor, welche sich das gleiche Ziel steckten: die eine von Wildermuth, die andere von Kuckuck. Die erstere* bespricht als Einleitung einer Untersuchung über pädagogische Bedeutung und methodische Behandlung des Rechenunterrichtes die Haupterscheinungen in der Entwickelung der Rechenkunst und des Rechenunterrichtes von den ältesten Culturvölkern bis auf unsere Zeit, ist recht gut und belehrend, kann aber speciell für das 16. Jahrhundert (S. 733—751) i. A. nicht so detaillirt sein, als eine Monographie; die zweite Arbeit** basirt auf der vorigen, nimmt nur auf

* Wildermuth, Artikel „Rechnen" in der Encyklopädie des gesammten Erziehungs- und Unterrichtswesens, herausg. von Schmid; Bd. 6, Gotha 1867, S. 695—789, insbesondere S. 731—751.

** A. Kuckuk, Die Rechenkunst im sechzehnten Jahrhundert. Separatabdruck aus der Festschrift zur dritten Säcularfeier des Berlinischen Gymnasiums zum grauen Kloster. Berlin 1874.

Deutschland Bezug und ist im Wesentlichen nur ein Auszug aus zweien der bekannteren Rechenbücher jener Zeit.

4. **Vorgeschichte** — Unser heutiges Rechnen und auch dasjenige, welches ich schildern werde und von dem sich unser heutiges als eine nur wenig höhere Entwickelungsstufe darstellt, ist im Wesentlichen gekennzeichnet durch den Gebrauch unserer zehn Zahlzeichen, durch die Möglichkeit eines Zusammenwachsens derselben zu Zahlen unter Benützung des Gesetzes vom Stellenwerth und durch Ausführung der bekannten Rechnungsvorschriften an den die Zahlen zusammensetzenden Elementen statt an jenen selbst. Die neueren Forschungen haben nun unzweifelhaft festgestellt, dass man die Heimath dieses Rechnens in Vorderindien, dem Wohnsitze des Sanskritvolkes, zu suchen hat, dass es die Frucht indischer Speculation ist, deren wir uns tagtäglich bedienen. Von Indien aus gelangte vielleicht schon in den ersten Jahrhunderten nach Christus die Kenntniss der 9 neuen Zahlzeichen nach Nordägypten und fand Eingang bei den Neupythagoräern der alexandrinischen Schule; die indische Rechenweise aber und die Grundbedingung dazu, der Gebrauch des Zeichens 0, fand sicher erst gegen Ende des 8. Jahrhunderts nach Christus seine Ausbreitung nach Westen und zwar zunächst zu den Arabern. Und unter diesen war es, soweit uns bekannt, der aus dem heutigen Chiwa stammende Mohammed ben Musa Alkharezmi († 812), der zuerst indisches Rechnen unter seinen Landsleuten lehrte und dessen Werk die Quelle abgab für eine grosse Reihe arabischer Schriften über die neue Rechenkunst. Dass diese mit der Ausdehnung des neuen Reiches, dem dadurch bedingten grösseren Verkehr und mit der an Bedeutung zunehmenden Finanzverwaltung selbst sich ausbreitete, wird wohl zu erwarten sein, ja man wird auch vermuthen dürfen, dass aus wissenschaftlichem Interesse das Zahlenrechnen Pflege fand in den Zeiten, als nach dem Aufhören der stürmischen Eroberungen allerorts, besonders in Bagdad und in den grossen Städten Spaniens, eine nicht geahnte Pflege der Wissenschaften und Künste eintrat. Man muss aber die von Vielen angenommene Meinung zurückweisen, als ob überall im weiten arabischen Reiche das indische Zahlenschreiben und -rechnen gebräuchlich geworden sei; im Gegentheil, als dasselbe schon angefangen hatte, in den Culturländern Europas mehr und mehr die älteren Rechenmethoden zu verdrängen, da waren unter den Arabern Viele bei ihrem altüberkommenen Verfahren stehen geblieben, so dass die neue Weise stets in gewisse Grenzen eingeschlossen blieb.

In den Zeiten grösster Blüthe des arabischen Reiches aber, im 11. und 12. Jahrhundert, war sie — das steht fest — in Spanien vielfach verbreitet und dahin, besonders nach dem im Jahre 1080 wieder eroberten Herde arabischer Wissenschaft, nach Toledo, reisten damals viele streb-

same Männer aus Italien, Frankreich und England, um Künste und Wissenschaften zu studiren, und von dort aus wurden die arithmetischen Kenntnisse der Araber ausgebreitet über die Gelehrtenkreise Westeuropa's, so dass letzterem auf solch weitem Umwege erst die Weisheit der Inder zukam. Aber kämpfend nur konnte die neue Rechenweise sich das neue Gebiet unterwerfen, und es war wirklich ein Kampf um's Dasein, in den sie sich einliess mit dem zuvor in den genannten Ländern allein herrschenden Gegner, jenem sonderbaren Wesen, das man als das Abacusrechnen zu bezeichnen pflegt. Ort, Art und Zeit der Entstehung dieser Rechenkunst sind viel bestritten;* aber geschichtlich feststehende Thatsache ist es, dass sie spätestens im 10. Jahrhundert in den der arabischen Herrschaft nicht unterworfenen Ländern Europa's (neben dem Fingerrechnen) einzig Geltung gewann, dass sie „als Kapitel der Gelehrtenwissenschaft von Klosterschule zu Klosterschule wandernd sich ausbreitete" und um 1200 überall geübt wurde. Nun kam, im Anschlusse an Uebersetzungen arabischer Schriften, die neue Methode, gewandt und leicht den schwerfälligen Gegner angreifend, im Vollgefühle klaren und sicheren Verfahrens an ihn, der einer schulmässigen Taktik entbehrte, heranstürmend — er musste zurückweichen, erst langsam, dann rascher und rascher: der Anfang des 13. Jahrhunderts sah ihn nicht mehr, er war vom Kampfplatze verschwunden und zu den Todten gelegt. Am meisten hatte zum Siege die Unterstützung beigetragen, welche der neuen Methode des indisch-arabischen Rechnens zu Theil wurde durch den grossen Pisaner Leonardo Fibonacci, welcher an allen den Orten, wohin er auf seinen Reisen kam, in Aegypten, Syrien, Griechenland, auf Sicilien und in der Provence, mit vieler Arbeit sich aneignete, was man dort vom Zahlenrechnen wusste und dann Fremdes, dazu Eigenes, fast Alles beweisend, in seinem „die wahre Eleganz ächter Wissenschaft" zeigenden Meisterwerke (1202) niederlegte.

Der auf Leonardo folgende Zeitraum von vollen drei Jahrhunderten bietet in Bezug auf die Geschichte der Mathematik überhaupt ein trübseliges Bild dar; „mit Erstaunen nimmt man wahr, dass das Pfund, welches Leonardo der lateinischen Welt übergeben, in dieser Zeit keine Zinsen getragen hat, ja was etwa von Fortschritt bemerkt werden könnte, wird fast wieder aufgehoben durch einen fast gänzlichen Mangel allgemeiner Beweise und die vielfach unklare Darstellung". Um nur einen Zeugen aus vergangener Zeit anzuführen: Cardanus ruft trauernd aus, wo er auf

* Vgl. meine als Beilage zum Programm des Karlsruher Gymnasiums (1875) erschienene Abhandlung: „Geschichte unserer Zahlzeichen und Entwickelung der Ansichten über dieselbe". S. 23—43.

die Zeit nach Leonardo zu sprechen kommt:* *„post hunc autem, Dii boni! in quas manus misera haec scientia peruenerit, nescio an ineptius an infelicius tradita sit donec ad Lucam Pacciolum peruenit“.* Die neue Arithmetik insbesondere scheint trotz der vorzüglichen Darstellung, die ihr durch Leonardo zu Theil geworden, sogar in dessen Vaterlande wenig gepflegt worden zu sein; wie viel weniger in den übrigen von der lateinischen Sprache beherrschten Ländern!

5. Eine Aenderung trat erst ein, als mit dem Ausgange des 15. und mit dem Anfange des 16. Jahrhunderts eine neue Zeit heraufgekommen war. Der Wiederbelebung des klassischen Alterthums ist es ja in erster Linie zu verdanken, dass den gelehrten Kreisen zuerst wieder nach lange dauernder Beschäftigung mit vielfach leeren Formen ein realer Inhalt geboten wurde, den zu bewältigen das Streben der Besten war. Zu keiner günstigeren Zeit konnte auch die wundersame Erfindung des Bücherdruckes aufkommen, die zum gemeinsamen Besitze Aller machte, was eben noch als sorgfältig gehüteter Schatz ängstlich verwahrt worden war; auf leichte Weise verschaffte sich nun Jeder die Mittel zur Bildung, deren Erlangung zuvor an grosses Vermögen oder an den Eintritt in das Kloster geknüpft war; die Wissenschaft trat heraus aus den engen Mauern der Klosterzellen und der Geist, in welchem sie betrieben worden, ward alsbald ein anderer. Den Eroberungen auf geistigem Gebiete folgten die Entdeckungen der fernen Länder, in gleicher Weise den Gesichtskreis der Lebenden erweiternd, unwiderstehlich zum vergleichenden Denken auffordernd. Hand in Hand mit diesen geistigen Interessen steigerten sich die materiellen, der Verkehr wuchs, der Handel von Nation zu Nation blühte und nahm zu. Dass so, wenn auch weniger der wissenschaftlichen Behandlung, so doch dem praktischen Betriebe des Rechnens die Zeit günstig war, ist ersichtlich; aber es fehlte noch Eines, was demselben erst recht Bestand und Leben verleihen konnte, es fehlte die Schule, die Volksschule.

Einen allgemeinen Volksunterricht einzuführen, musste ja ein nothwendiges Verlangen der grossen reformatorischen Bewegung des 16. Jahrhunderts sein und in der That, es hat auch Keiner jenes Verlangen kräftiger und nachdrücklicher ausgesprochen als der, dessen Name identisch ist mit der Bewegung selbst. Luther hat in seiner stets lesenswerthen „Schrift an die Bürgermeister und Rathsherren allerlei Städte in deutschen Landen, dass sie Christliche Schulen aufrichten und halten sollen“ (1524), in überzeugendster Weise die Nothwendigkeit begründet, „Schulen, beide für Knaben und Mädchen, an allen Orten aufzurichten“, höhere wie niedere,

* *Hieronymi Cardani Mediolanensis opera. Lugduni MDCLXIII.* Bd. 10, S. 118.

und die vorhandenen in vernünftiger Weise zu reformiren; und dass er dabei die mathematischen Studien nicht vernachlässigt sehen wollte, geht aus seinen in eben jenem Sendschreiben enthaltenen Worten hervor: „Ich rede für mich: wenn ich Kinder hätte und vermöcht's, sie müssten mir nicht allein die Sprachen und Historien hören, sondern auch singen und die Musica mit der ganzen Mathematica lernen". In gleicher Weise hat auch Melanchthon, der „Lehrer Deutschlands", wesentlich mitgeholfen den Jugendunterricht zu verbessern, und er vor Allen war Beförderer des Studiums der Mathematik. Er selbst hörte in Tübingen drei Jahre lang mathematische Vorlesungen bei Stöffler, und später in Wittenberg, wo die Zahl seiner ihn bewundernden Zuhörer auf 2000 stieg, las er neben seinen Fachcollegien auch über Mathematik, freilich vor Wenigen nur, und einer Reihe von mathematischen Lehrbüchern hat er in Vorreden Geleitbriefe mitgegeben, in welchen sich sein Interesse für die Sache lebhaft genug ausspricht. Und Luther und Melanchthon waren keine Propheten in der Wüste! Kaum standen je Männer mehr im Ansehen als sie, stets vertraute man ihrer Einsicht, überall ward ihr Rath eingeholt und der Samen, den sie ausstreuten durch Schrift und Rede, vom Katheder und bei Visitationen von Kirchen und Schulen, fiel auf guten Boden. Fürsten und die Bürgerschaften der Städte wetteiferten, die als richtig erkannten Grundsätze in Gestaltungen des praktischen Lebens zu verwirklichen: eine Reihe von Schulordnungen entstand, zumal in der 2. Hälfte des 16. Jahrhunderts, und wenn auch der Eifer für das Elementar- wie Mittelschulwesen in gleicher Weise rege war, so konnte doch das erstere, bei der grossen Zahl und Zähigkeit der Hemmnisse, nur sehr langsam sich entwickeln. Viel raschere Fortschritte machte das Gymnasialwesen: nach einer mir vorliegenden Zusammenstellung, die freilich auf unbedingte Richtigkeit keinen Anspruch erhebt, wurden in den Ländern, welche heute das Königreich Preussen ausmachen, während des 16. Jahrhunderts 70 neue Gymnasien gegründet, im 17. nur 28, im 18. nur 21. Freilich, bei der herrschenden Richtung, hauptsächlich oder fast nur die möglichste Fertigkeit im lateinischen Reden und Schreiben zu erzielen, war dem arithmetischen Unterrichte nur wenig Raum gegönnt; wo er sich in den Lehrplan aufgenommen zeigt (z. B. Sachsen, Jesuitenschulen), tritt er erst in den Oberklassen auf, und noch lange nachher bestand am Karlsruher Gymnasium z. B. die Vorschrift, es solle in der Klasse, die unserer heutigen Obersecunda entspricht, „ein gutes *ingenium* die Regel de tri erlernen können". Es konnte ja bei der Art, wie die Lehren der Arithmetik vermittelt wurden und auf die ich weiter unten noch zurückkommen werde, jenem Unterrichte wahrhaftig keine geistbildende Kraft zugeschrieben werden, und wenn man ihn aufnahm, so geschah es mit Rücksicht theils auf die Erinnerungen an den

mittelalterlichen Unterricht des Quadriviums, theils auf die Anforderungen des praktischen Lebens, welchem man doch einigermassen gerecht werden wollte. Dass auch an den Universitäten der damaligen Zeit nur die Elemente gelehrt wurden, geht aus vielen Zeugnissen unzweideutig hervor. So z. B. fordert an der damals berühmtesten Universität Wittenberg ein Docent in seiner Eröffnungsrede* die Studirenden auf sich nicht zurückschrecken zu lassen: die ersten Elemente seien leicht, die Lehre vom Multipliciren und Dividiren verlange etwas mehr Fleiss; freilich gebe es schwierigere Theile der Arithmetik, „ich spreche aber — so fährt er fort — von diesen Anfängen, welche euch gelehrt werden und nützlich sind".

Und so waren es (ausser vereinzelten Männern, welche aus wissenschaftlichem Interesse der Arithmetik sich annahmen und welche zudem erst um die Mitte des Jahrhunderts hervortreten) wesentlich kaufmännische Kreise, in denen die neue Rechenkunst sich eingebürgert zeigt; für sie bestimmt und aus ihnen hervorgehend sind die meisten Rechenbücher des 16. Jahrhunderts, wenigstens der ersten Hälfte desselben; ihrem Bedürfnisse entsprechend ist auch der Geist, in welchem diese Bücher geschrieben sind. Nicht eine Rechenkunde, verbunden mit Einsicht in die Entstehung und Durchführung der Operationen, sondern eine Rechenkunst sollte vermittelt werden; eine Summe von Vorschriften, welche für die im gewöhnlichen Verkehr vorkommenden Aufgaben genügten, wurde in dauernd fast gleichbleibenden Ausdrücken gelehrt, geübt und wie die Regeln des Zunfthandwerkes zunftmässig überliefert. Es sollte noch lange dauern, bis dieser blinde Mechanismus verdrängt und ein rationelles den zu vermittelnden Stoff und den Geist des Lernenden gleichsehr berücksichtigendes Verfahren an dessen Stelle gesetzt war.

6. **Ueberblick.** — In jener Zeit, deren Rechenkunst ich zu schildern unternommen, sind es — vom Fingerrechnen abgesehen — der Hauptsache nach zwei ihrem Wesen nach durchaus verschiedene Methoden, nach welchen verfahren wird: erstens das sog. „Rechnen auf Linien", d. h. ohne schriftliche Darstellung, nur mit Benützung von Rechenpfennigen auf einer mit Querlinien versehenen Tafel; zweitens das heutzutage allein noch geübte schriftliche Ziffernrechnen, oft als das „Rechnen auf der Feder" bezeichnet. Bevor ich nun dazu übergehe, das gesammte Rechnen der mehrfach genannten Zeit nach seinen einzelnen Theilen darzustellen, halte ich es für angezeigt, vorher noch die Hauptwerke wenigstens, in welchen wir die arithmetische Kunst niedergelegt finden, im Ueberblicke vorzuführen und den Verfassern derselben, ihren etwaigen Beziehungen unter einander und, soweit nöthig oder erwünscht, ihren Lebensverhältnissen einige Worte zu widmen.

---

* Raumer, Geschichte der Pädagogik I, 320.

Und wenn ich im Vorangehenden schon wesentlich auf deutsche Verhältnisse Rücksicht genommen habe, so wird auch im Folgenden vorwiegend der Stand des Rechnens in Deutschland zur Betrachtung kommen. Es hat dies seinen doppelten Grund. Einmal sind in unsern deutschen Bibliotheken, auf deren Benützung allein ich angewiesen bin, selbstverständlich die Erscheinungen der deutschen Literatur zumal der früheren Zeiten in weit überwiegendem Maasse vertreten, von der ausländischen nur die bedeutenderen Werke und oft diese nicht. Dieser Uebelstand verliert aber ziemlich an Bedeutung, wenn wir und dies von Zeitgenossen selbst erfahren, dass während des 16. Jahrhunderts hauptsächlich in Deutschland die mathematischen, zumal arithmetischen Studien blühten. So sagt der noch weiterhin zu erwähnende französische Philosoph und Mathematiker Ramus, welcher zwei Jahre (1568—70) in Deutschland lebte und die wichtigsten Kulturstädte, zumal Süddeutschlands bereiste, geradezu vom Zahlenrechnen: *„Arithmetica non numerorum potius quam nummorum non in Italia modo, sed in Gallia Brittannia et reliqua Europa, credo etiam in Asia et Africa Italorum trapezitarum manibus exercetur“* und hebt dagegen wiederholt die Pflege der Mathematik in Deutschland hervor. Dieses Hervortreten Deutschlands in jener Zeit auf unserem Gebiete ist deshalb auch der zweite der vorhin erwähnten Gründe, die mir ein besonderes Berücksichtigen deutscher Verhältnisse vielleicht selbst zur Pflicht machten, jedenfalls erlaubten.

7. Der Anfang der Zeit, welche wir zu betrachten haben, fällt zusammen mit der Ausbreitung und vermehrten Anwendung der Buchdruckerkunst, deren Bedeutung schon oben hervorgehoben wurde. Jedoch waren es Anfangs nur Theologie und Philologie, in deren Dienst sie sich begab; den arithmetischen Studien hat sie erst spät genützt und selbst dann wurden nur vereinzelt Werke gedruckt, haben sich mindestens nur wenige erhalten, welche derselben gewidmet sind. Wohl das erste Buch arithmetischen Inhaltes, welches durch den Druck vervielfältigt wurde, ist von Prosdocimo aus Padua unter dem Titel *„De Algorithmo“* zu Anfang des 15. Jahrhunderts schon verfasst, aber 1483 erst gedruckt; leider habe ich dasselbe nicht benützen können. Auf dieses, wohl aber hauptsächlich auf den Abbaco des Leonardo stützt sich Luca Pacioli (145?—1509?), nach seinem Geburtsorte San Sepolcro in Toscana häufiger, auch von sich selbst Lucas de Burgo Sancti Sepulchri genannt; in verschiedenen Städten Italiens und zwar zu Zara, Perugia, Neapel (1494), Mailand (96—99), Florenz und Rom (1500) und Venedig (1508) als Lehrer der Mathematik auftretend hat dieser Minoritenmönch schon von 1470 an die Arithmetik, d. i. *larte menore* oder *mercatoria* und die einen Theil der Arithmetik ausmachende *arte magiore* oder Algebra in verschiedenen Schriften dargestellt, von welchen uns jedoch, wie es scheint, nur der im Jahre 1494 in (mehr-

fach mit Lateinisch durchsetzter) italienischer Sprache gedruckte Folioband unter dem Titel *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni e Proportionalita* erhalten ist, worin er „in der That die ganze Summe des Wissens seiner Zeit in Arithmetik, Algebra und Geometrie zusammengefasst hat." Ein Werk aus Deutschland, welches für diese Zeit das Gleiche leistet, vermag ich nicht anzugeben; denn das immerhin merkwürdige, über alles Wissenswerthe sich erstreckende Sammelwerk aus dem Jahre 1503, die *Margaritha philosophica* des Gregorius Reisch reicht in Bezug auf Rechnen bei Weitem nicht an Lucas hinan.

Nur langsam und allmählig, nur die einzelnen kleineren Gebiete umfassend und selbst hier mehr auf den praktischen Gebrauch, meist sogar speciell für Kaufleute berechnet, treten in Deutschland die arithmetischen Bücher hervor. Als eine der frühesten Bearbeitungen der Arithmetik auf deutschem Boden, vielleicht die erste, ist die des berühmten Astronomen Georg von Peurbach (1423—61) zu nennen, der nach damaliger Sitte eine Zeit lang in Italien verweilte und wohl von dort sich Anregung zur Abfassung seines Werkchens mitnahm, welches freilich erst fast ein halbes Jahrhundert nach seinem Tode (1503) und später wiederholt vervielfältigt wurde: „aus sieben enggedruckten Quartblättern bestehend zeichnet sich dasselbe durch seine Bündigkeit aus; Definitionen werden fast keine gegeben, die Hauptsache ist die Darstellung der Rechenoperationen, nach herkömmlicher Sitte ohne Angabe der Gründe."* Da Peurbach, sowie sein grosser Schüler Johannes Müller, genannt Regiomontanus, zuerst das Ziffernrechnen in ausgedehnterem Maasse praktisch verwerthete, so hat er durch sein Beispiel schon gewiss Viele dem neuen Rechnen gewonnen, viel später erst durch sein Buch. Als das erste in deutscher Sprache gedruckte Buch arithmetischen Inhaltes ist zu verzeichnen die „Behende vnd hubsche Rechenung auf allen kauffmannschaft von Joh. Widman von Eger, gedruckt im 1489 Jare"; zwar dem Titel wie der Lehrweise nach für rein praktischen Gebrauch bestimmt, ist es nach Drobisch's Zeugniss** in seinen Regeln mehrfach dunkel und nur durch die beigefügten Beispiele zu verstehen, geht auch in der Geometrie über die rein kaufmännische Arithmetik hinaus.*** In ähnlicher Weise bearbeitet ist die *Enchiridion novus Algorismi* betitelte Schrift von Huswirt

* Nach Wildermuth a. a. O. S. 731.

** M. W. Drobisch hat diese Incunabel herausgegeben unter dem Titel: *„De Joannis Widmanni Egerani ... compendio arithmeticae mercatorum ... Lipsiae 1840"*.

*** Die Bedeutung dieses erst nachträglich mir vor Augen gekommenen Buches zumal als Aufgabensammlung werde ich bei anderer Gelegenheit erörtern. Dass in demselben einzelne Fälle der Lösung quadratischer Gleichungen vorkommen, hat Drobisch nicht hervorgehoben.

(1501)*, im Ganzen etwas ausführlicher, zumal im Kapitel vom Geschäftsrechnen; sie zeichnet sich auch vor der von Peurbach durch eine Eigenschaft ganz besonders aus: letzterer erwähnt nicht mit einer Silbe das Rechnen auf Linien, Huswirt aber — und soweit mir bekannt, ist er der erste, der dies thut — widmet demselben einen ganzen Abschnitt und bespricht ausser den Grundrechnungsarten auch schon die *„regula de tri in projectilibus"*. Die ersten Jahre des neu angebrochenen Jahrhunderts bringen noch wenige, vereinzelte Erscheinungen unseres Gebietes auf den Büchermarkt; manche unter dem Titel der *Arithmetica*, mehr noch unter dem des *Algorithmus*, andere als *numerorum praxis* sich einführend stammen sie von sonst unbekannten Verfassern her und lehren bald nur das Rechnen mit Rechenpfennigen, bald nur das mit Ziffern, bald auch beides; sie im Einzelnen aufzuzählen ist hier nicht der Ort.

Mit Ablauf der ersten anderthalb Jahrzehnte werden die die Arithmetik und zwar mehr und mehr das Ziffernrechnen behandelnden Bücher häufiger**, so dass kaum ein Jahr vergeht, in welchem aus Deutschland nicht eines zu nennen wäre; mit Anfang des zweiten Vierteljahrhunderts schon erscheinen Jahr für Jahr mehrere — schon Stifel sagt, dass täglich neue herauskommen — und dass in der Folgezeit die Zahl stets gewachsen, ist bekannt. Selbstverständlich kann es hier nur darauf ankommen, die wegen ihrer Verfasser oder ihres Inhaltes wichtigsten hervorzuheben.

Obwohl Peurbach mit gutem Beispiele vorangegangen war, scheinen die Gelehrten, auch wenn sie mit Geometrie und Astronomie sich beschäftigten, doch die Elementarmathematik in der neuen Form entweder nicht verstanden oder deren Betreibung unter ihrer Würde gehalten zu haben, da von solchen — Christ. Rudolff etwa abgerechnet — keine Bearbeitungen aus den ersten Zeiten des 16. Jahrhunderts vorliegen; ja in weiten Kreisen scheint die Sache überhaupt für unnöthig erachtet worden zu sein, da uns aus dem Jahre 1513 die Aeusserung überliefert ist: *Sunt qui dicant literis eruditis Arithmeticam non esse necessariam****. So traten als Verfasser von Rechenbüchern anfänglich meist Männer auf, welche als Lehrer an den niederen städtischen Schulen oder auch an Privatschulen thätig waren, zugleich vielleicht noch irgend ein Amt in der Gemeinde verwalteten und sich den Titel als „Rechenmaister" oder „Schul Modist vnd Rechenmaister"

---

* Diese Schrift hat Wildermuth neu herausgegeben als Beilage zum Programm des Gymnasiums zu Tübingen für das Schuljahr 1864/65 (Tübingen 1865).

** Wie dies z. B. auch ein Zeitgenosse bezeugt, Christoph Rudolff nämlich, welcher in seiner „Coss" sich ausspricht (Fol. C v[2]): „wo yendert ein vleissiger discipl von kauffmans hendln mer zu wissen begerte | der hab zuflucht zu gemeinen rechenpüchlen | so nit wenig vorhanden sein".

*** Kästner, Geschichte der Mathematik. Göttingen 1796; Bd. I, 85.

beilegten. So als einer der Ersten Jakob Köbel, „disser zeyt Statschreyber zu Oppenhaym“, von welchem man aus dem Jahre 1516 „Ain New geordnet Rechenbiechlin auff den linien“ und aus 1520 eines „Mit der krydē od' Schreibfedern | durch die zeiferzal zu rechē“ besitzt, welche beide, auch zu einem Buche vereinigt, später wiederholt aufgelegt wurden. Ebenso ein Rechenbüchlein von Johann Böschensteyn 1516, und von dessen Sohne „Ein nützlich Rechenbüchlin der Zyffer | Aussgangen durch Abraham Böschensteyn“; nicht minder „Kauffmans handtbüchlin. Aller Rechenschafft behendigkeyt auf Linien vnd Ziphren | durch Gg. Reichelstain (1532?). Bekannter als diese Verfasser sind Johann Albrecht, dessen „Rechenbüchlein auff der linien, dem einfeltigen man odder leien... zu gut... jm (MD) XXXIIII jar“ erschien und später mindestens noch 9 Auflagen erlebte; ferner Simon Jacob von Coburgk und Rechenmeister in Frankfurt a. M., „den seine Zeitgenossen, allerdings mit ziemlicher Uebertreibung, sogar einem Regiomontan an die Seite stellen“. Dass solche deutsche Rechenmeister auch in fremdes Land geriethen, um dort ihre Kenntnisse zu verwerthen, möge durch ein Beispiel belegt werden: Valentin Mēnher, *„Alleman“* oder auch „Rechenmaister von Kempten“, wie er sich unterzeichnet, lebt lange Jahre in Antwerpen und widmet die zweite Auflage seines 1556 zuerst erschienenen Buches *„Practicque pour brievement apprendre à Ciffrer...“* dem Rathe der hochloblichen vnd weitberuembten Statt Anttorff (Antwerpen).

Am bekanntesten aber unter allen Denen, welche um die Ausbreitung der Rechenkunst sich bemühten und heute noch im Munde des Volkes fortlebend ist Adam Riese (Ryse, Ries, Ris und Rise).* Geboren 1492 zu Staffelstein in Franken, lebte er jedenfalls schon von 1515 an zu Annaberg in Sachsen, war daselbst als Bergbeamter thätig und zwar 1528—30 als Recessschreiber, von da ab als Gegenschreiber und hielt (um 1532) wie Andere nebenbei eine Privatschule, in welcher er seine Rechenkunst lehrte; er starb 1559. Schon im Jahre 1518 veröffentlichte Riese seine „Rechenung auff der linihen, in massen man es pflegt tzu lern in allen rechenschulen“, welches Buch sich 1522 in neuem Gewande darbietet als „Rechenung auff der Linien vnd Federn, Auff allerley Handtierung“. Durch dieses kleinere Rechenbuch, welches während des 16. Jahrhunderts wenigstens in 19 und noch im folgenden Jahrhundert wenigstens in 10 Auflagen erschien, sowie durch sein schon 1525 vollendetes, aber erst 1550 gedrucktes grösseres Rechenbuch „Rechenung nach der Lenge (= ohne Abkürzung!),

---

* Die Nachrichten über Adam Riese habe ich entnommen den Abhandlungen von Bruno Berlet: a) Programm der Progymnasial- und Realschulanstalt zu Annaberg v. J. 1855: „Ueber Adam Riese“; b) Programm derselben Anstalt v. J. 1860: „Die Coss von Adam Riese“.

auf den Linihen vnd Feder. Dazu forteil vnd behendigkeit durch die Proportiones, Practica genannt“ hat sich Riese seinen Ruhm begründet, über den man schon im 16. Jahrhundert einig war, da alle Chronisten seiner als „eines berühmten Rechenmeisters“ gedenken; freilich zählen sie ihn nicht zu denjenigen berühmten Söhnen Annabergs, welche *ob doctrinam*, sondern welche *ob civilem prudentiam claruerunt.* Und doch besass Riese gewiss kein gewöhnliches Mass mathematischen Wissens, da er schon im Jahre 1524, also lange vor Stifel und Cardanus und ohne Christoph Rudolff zu kennen, eine Coss, d. h. eine Algebra geschrieben hat, welche glücklicherweise noch im Manuscripte vorhanden ist und erst im Jahre 1860 zum Theil durch Druck veröffentlicht wurde. Als Gründe aber, weshalb ganz besonders Riese's Arbeiten über das Rechnen so bekannt wurden, sind anzugeben die oben geschilderte allseitige Zunahme des Interesses am Schulwesen überhaupt und damit am Rechenunterrichte, dann das hiermit auftretende Bedürfniss nach deutschen Unterrichtsbüchern, dem Riese durch sein in deutscher Sprache geschriebenes Buch entgegenkam; ferner der Takt, welchen er bekundete, indem er zunächst die volksthümliche Rechenweise auf Linien und in Anlehnung hieran das Ziffernrechnen behandelte; endlich die relative Klarheit der Darstellung und die Wahl passender Beispiele. Keinem der gleichzeitigen Rechenbücher — das von Köbel ausgenommen — lässt sich die gleiche Summe von Vorzügen nachrühmen.

Ich habe vorhin gesagt, dass es anfänglich besonders Nichtgelehrte gewesen seien, welche die Lehren der Arithmetik darzustellen unternahmen, und auch später noch sind solche auf der Bühne erschienen; von der Mitte des Jahrhunderts an aber nehmen unser Interesse am meisten in Anspruch die Männer, welche als Fachgelehrte der Mathematik durch Abfassung von arithmetischen Büchern ihr Interesse an diesem Zweige ihrer Wissenschaft bekundeten.

Als Uebergang zu diesen konnte uns für Deutschland schon Riese dienen; in Frankreich scheint eine ähnliche Bedeutung Etienne de la Roche gehabt zu haben, über dessen Leben mir weiter Nichts bekannt ist. Er liess i. J. 1520 zu Lyon einen Quartband* erscheinen, welcher die Lehren der „Arismetik“ und Algebra enthält, mit grosser Klarheit und mit wirklicher Einsicht in und wissenschaftlichem Interesse für die Sache

* „*Larismethique nouellement composee par maistre Estienne de la roche dict Uillefrāche natif de Lyō sus le Rosne diuisee en deux parties dont la p̄miere tracte des proprietes perfectiōs et regles de la dicte sciēce: cōme le nōbre entier: Le nōbre rout: La regle de troys . . . La secōde tracte de la practique dicelle appliquee en fait de mōnayes . .*“ Am Ende: *Imprimee par Maistre guillaume huyon. Pour Constantin fradin marchant et libraire dudict Lyon. Et fut acheuee lan. 1520. le. 2e. de Juing.*

verfasst ist und mehrfach geradezu an die Summa des Lucas erinnert; eine Erwähnung des letzteren findet sich denn auch im Inhaltsverzeichniss.* La Roche zeichnet sich dadurch aus, dass er so frühe schon die sonst ganz spät zur Geltung kommende Benennung der Zahlen unter Benützung der Wörter Million, Billion etc., ganz ausführlich darstellt; aber als Kind seiner Zeit beweist er sich durch die genaue Erörterung des mystischen Sinnes der Zahlen und die Aufdeckung der denselben gewissermassen innewohnenden geheimen Kräfte.

Wie La Roche so ist auch Petrus Apianus (zu deutsch Bienewitz, 1495—1552) weniger bekannt geworden als er verdient. Zwar als Astronom ist er berühmt: er erfand und verbesserte verschiedene Instrumente und schlug als einer der Ersten die Abstände des Mondes von den Fixsternen als Mittel zur Bestimmung geographischer Längen vor; aber dieser „Ordinarius der Astronomei zu Ingolstadt" hat auch 1532** „Ein newe vnnd wolgegründte vnderweisung aller Kauffmanns Rechnung inn dreien Büchern" herausgegeben, in welcher er auch und wohl als einer der Ersten erläutert „Sunderlich was fortel vñ behendigkeit in der Welschen Practica vnnd Tolleten gebraucht würt | desgleichen vormals weder in Teutscher noch in Welischer Spraach nie getruckt"; dass er auch das Fingerrechnen nicht vergisst, werden wir unten hören. Ueberhaupt scheint Apianus nach Peurbach wieder der Erste zu sein, welcher als Professor an einer deutschen Universität eine Anleitung und gar eine deutsch geschriebene Anleitung zum Elementarrechnen veröffentlicht hat; lateinische haben Männer in gleicher Stellung wohl herausgegeben: vor ihm, 1514, Silicius (Juan Martinez Siliceo), Professor zu Salamanca und nach ihm, 1536, Regius in Freiburg i. B. und 1555 Micyllus in Heidelberg.

Weit bekannter aber als die zuletzt Genannten und im Allgemeinen für die Geschichte der Mathematik auch wichtiger ist das berühmte Dreigestirn von Männern, ebensovieler Nationen Vertreter, um welche sich die Geschichte unserer Wissenschaft in der Mitte des 16. Jahrhunderts gruppirt und von welchen Cantor eine anziehende biographische Mittheilung

* Auf der zweiten Seite, bei Beginn des Inhaltsverzeichnisses findet sich die Bemerkung, dass im Buche sei: *„collige et amasse la fleur de plusieurs maistres expertz en cest art: cōme de maistre nicolas chuquet parisien: de philippe friscobaldi florētin: et de frere luques de burgo sancti sepulcri de lordre des freres mineurs auecques quelque petite addicion de ce que iay peu inuēte et experimēte en mon temps en la pratique . . ."*

** Kästner a. a. O. I, 40 führt zwar eine Ausgabe von 1527 an; aber das von mir benützte Exemplar trägt am Schlusse die Jahreszahl MDXXXII und lässt nirgends die Andeutung finden, als ob es die zweite Auflage sei. Sollte sich Kästner's Angabe auf das Datum der Widmung beziehen: „Geben zu Ingolstat am 7 tag Augusti im 27 jare"?

und Würdigung gegeben hat: ich meine Cardanus (1501—76), Ramus (1515—72) und Stifel (1487—1567), welchen sich speciell für Arithmetik in gleich würdiger Weise der niederländische Arzt Gemma, genannt Frisius (1508—55) und der Italiener Tartaglia (1506?—1559) anreihen.

Des Cardanus Namen ist freilich vor Allem aufs Innigste mit der Entwickelung der Lehre von den Gleichungen verwachsen; aber auch auf dem Gebiete des Zahlenrechnens muss derselbe genannt werden. Unter dem Vielen, was Cardanus bearbeitet hat und wovon die zehn Foliobände seiner Werke Zeugniss ablegen, findet sich, ausser einer unvollendeten Abhandlung und einzelnen in seinen Schriften zerstreuten hierher gehörigen Stellen, eine grössere vom Jahre 1537 datirte Arbeit *„Practica Arithmeticae“*, welche mit den Elementen beginnend das ganze Zahlenrechnen umfasst und zwar nicht nur, was wir heute unter demselben begreifen, sondern auch die Rechnung mit Wurzelgrössen und mit den Unbekannten der Algebra. Wiewohl mehrfach, so hauptsächlich beim Rechnen mit Brüchen, im Stile jener Zeit mit Ertheilung von Vorschriften ohne Begründung sich begnügend, verräth er doch überall seinen wissenschaftlichen Geist: so wenn er beim Ausziehen der Wurzeln zwei verschiedene Arten der Annäherung angiebt, durch Division und durch die meistens Stevin (1585) zugeschriebene Verwerthung der Decimalbrüche; so auch, wenn er im Anschlusse an die Lehre von den Gleichungen seine *Regula de modo* aufstellt, d. h. eine Anweisung, für jede Art von Aufgaben des praktischen Lebens durch vorangehende Lösung derselben durch Algebra und nachfolgendes Verlassen der algebraischen Einkleidung eine Vorschrift zur Lösung zu finden. Und so verdient seine Arbeit doch unser Interesse, da sie im Bewusstsein, wie lange die Arithmetik unvollkommen geblieben und im Bestreben, an deren weiterer Ausbreitung und Vervollkommnung mitzuhelfen, unternommen wurde; dass sich ein Kapitel: *„de proprietatibus numerorum mirificis“* und gar eines *„de proprietatibus numerorum mysticis“* darin findet, darf uns nicht Wunder nehmen.

Von den drei vorhin genannten Männern hat speciell für die Arithmetik wohl den geringsten Einfluss in Bezug auf den Inhalt derselben, einen grösseren jedenfalls in Bezug auf die Darstellung Ramus ausgeübt, jener berühmte Pariser Professor der Eloquenz und Philosophie, welcher als einer der Ersten in Frankreich die unbedingte Autorität des Aristoteles untergrub, freilich deshalb und wegen seines Uebertrittes zur reformirten Kirche flüchtig gehen musste und, wieder zurückgekehrt, schliesslich ein Opfer der Bartholomäusnacht wurde. Schon in der Zeit seines Glanzes veröffentlichte er (1555) ein dem Cardinal von Lothringen gewidmetes Werkchen, „Drei Bücher Arithmetik“, welches nur die theoretische Grundlage der Zahlenlehre enthält und Neues nicht liefert, aber im Gegensatze

zu Euklid das, was es gibt, in durchaus streng logischer Anordnung geben will und wirklich gibt: Auseinandersetzungen über den *numerus absolutus*, dabei über die vier Grundrechnungsarten, über Prim- und zusammengesetzte, gerade und ungerade Zahlen im ersten, über den *numerus comparatus*, d. h. über Verhältnisse und Proportionen (Regel de tri) im zweiten, und endlich über den *numerus figuratus*, d. h. über Flächen- und Körperzahlen (Wurzelausziehen) im dritten Buch. Noch weniger charakteristisch sind die während seines Aufenthaltes in Deutschland (1569) von ihm veröffentlichten arithmetischen Schriften: so seine „Zwei Bücher Arithmetik", in welcher im Ganzen nach der uns heute geläufigen Reihenfolge die Hauptsache des Zahlenrechnens gut dargestellt ist und *„Scholarum mathematicarum libri 31"*, welche in ihrem arithmetischen Theile Anmerkungen und Erläuterungen zum unmittelbar vorher erwähnten Werke enthalten, in denen ebenfalls sein kritischer nach strenger Logik verlangender Geist zum Ausdrucke gelangt.

Stifel's Bedeutung für die Geschichte der Mathematik überhaupt ist allgemein anerkannt. Ursprünglich wie Luther Augustinermönch, dann zum Protestantismus übergetreten, durch das Schicksal kräftigst gerüttelt und bald da, bald dort umhergetrieben, ist dieser merkwürdige Mann, welcher zu tiefen, von jeder praktischen Verwendbarkeit entfernten mathematischen Spekulationen wie zum trübsten Mysticismus gleichsehr geneigt war, der bedeutendste unter den deutschen Mathematikern des 16. Jahrhunderts geworden. Und wenn er auch speciell für das Zahlenrechnen weniger geleistet zu haben scheint, da seine Forschungen und Funde sich mehr auf die Eigenschaften der Zahlen, auf die Reihen und verwandte Gebiete der damaligen höheren Arithmetik bezogen, so werden wir doch immerhin im Verlaufe unserer Abhandlung mehrfach seiner Leistungen Erwähnung thun müssen. Aber seine Stellung in der Geschichte beruht hauptsächlich darauf, dass er zuerst in Deutschland ein vollständiges Lehrgebäude der gesammten Arithmetik und Algebra veröffentlichte, worin er die Forschungsergebnisse seiner Vorgänger und seine eigenen zusammenstellte. *„Quanquam plurimi de Arithmetica libelli extent et quotidie plures noui gignuntur, ego tamen adhuc nullum uidi qui integram artem traderet"* — sagt er selbst in seiner *„Arithmetica integra"*, welche den gesammten Inhalt des einen Zweiges der deutschen Mathematik der damaligen Zeit darstellt. Und indem er so mit „der vollständigen Behandlung aller Regeln der Coss, welche auch Algebra heisst", und der aller übrigen „Algorithmen der irrationalen Zahlen" zugleich auch das gewöhnliche Zahlenrechnen verband — *„Algorithmos vulgares"* nennt er es — gelangte dieses letztere in der Darstellung, wie er es gab, so z. B. auch die Erläuterung der sog. Wälschen Praxis, zu Vielen und jeder Theil seines Werkes verhalf dem andern zu immer grösserer

Ausbreitung. Doch nicht den Gelehrten allein sollte sein Wissen zu gute kommen; auch für Laien hat Stifel eine Bearbeitung des Zahlenrechnens veröffentlicht, seine „Deutsche Arithmetika“, worin er auch, wie unten zu besprechen sein wird, ausführlich das Rechnen auf Linien behandelte.

Schon vor Stifel hat der oben erwähnte Arzt und Professor zu Löwen Gemma Frisius eine recht deutliche Arithmetik geschrieben (*„Arithmeticae practicae methodus facilis“*, 1540, Vorrede vom J. 1536), welche noch im 16. Jahrhundert mindestens 25 Auflagen erlebte und auch im folgenden mehrmals zur Ausgabe gelangte und sich besonders dadurch auszeichnet, dass darin, der gewöhnlichen Annahme entgegentretend, eine grössere Anwendbarkeit der sog. „Regel vom falschen Satze“ gelehrt wird.

Ausführlicher habe ich über die wichtigsten um die Mitte des 16. Jahrhunderts auftretenden Arithmetiker berichtet, da gerade sie aus verschiedenen Gründen unser Interesse in Anspruch nehmen. Wie aus den schon angeführten und später noch gelegentlich anzuführenden Stellen hervorgeht, haben noch viele Andere das in immer weitere Kreise eindringende und dabei das Rechnen auf Linien mehr und mehr zurückdrängende Zahlenrechnen dargestellt; es verlohnt sich nicht, auch nur eine Aufzählung der Namen solcher Schriftsteller hier vor Augen zu führen. Doch möchte ich nicht abschliessen, ohne wenigstens noch zweier hervorragenderer Männer Erwähnung gethan zu haben.

Der eine ist der Jesuit Christoph Clavius (1537—1612), welcher auf Wunsch des Papstes Gregor XIII. an der Verbesserung des Kalenders mitarbeitete und in Bezug auf den Gegenstand, der uns hier beschäftigt, eine wirklich hervorragende Stellung einnimmt: sein im Jahre 1584 zu Köln erschienenes Büchlein *„Epitome Arithmeticae practicae“*, welches zugleich der Vorläufer eines grösseren Werkes über Arithmetik sein sollte,* behandelt nämlich das ganze Zahlenrechnen, und was Wildermuth über die einzelnen Kapitel sagt** — „Seine Einleitung in die Bruchlehre lässt in Bezug auf verständige Anordnung, Klarheit und Vollständigkeit kaum etwas zu wünschen übrig. . . Am gründlichsten stellt Clavius die Regel de tri dar und widmet einen besonderen Abschnitt schwierigeren Fällen, die bei ihrer Anwendung vorkommen . . .“ u. s. w. — kann ich vollständig unterschreiben; sowohl was Darlegung und Begründung des theoretischen Aufbaues, als auch was Benützung desselben zur Lösung der im Leben sich

---

* Es heisst z. B. S. 5: „Der Leser möge das Büchlein benützen *„dum maius illud Arithmeticae opus in lucem exeat, quod propediem, Deo iuvante, fore speramus“* — und S. 120 *„. . ut in maiore nostro Arithmetices opere declarabimus“*; aber in der Gesammtausgabe von Clavius' Werken (1611) findet sich kein „grösseres Werk“, sondern nur der unveränderte Abdruck des Epitome.

** Wildermuth a. a. O. S. 743.

bietenden Rechnungen und was Abwägung der dabei möglichen verschiedenen Methoden betrifft, es geschieht die Behandlung in einer für das 16. Jahrhundert so meisterhaften Weise, dass Clavius geradezu die Palme unter allen Schriftstellern über Arithmetik gebührt.

Der zweite, den ich noch erwähnen wollte, ist Simon Stevin (1548—1620): seine „Arithmetik" ist zwar wenig hervorragend, ja sie leidet schon theilweise, durch Ramus wohl beeinflusst, an einem Uebermaasse von Deutlichkeit und gibt wie einen Vorgeschmack der späteren trockenen und langweiligen Wolfischen Weise, und sie hätte ihrem Verfasser gewiss auch nicht einen unvergänglichen Namen in der Geschichte der Arithmetik verschafft; aber diesen hat er sich errungen durch ein dem Umfange nach viel kleineres Schriftchen, in welchem er zum ersten Male eine zusammenhängende Darstellung der Lehre von den Decimalbrüchen gegeben hat. Wir werden zwar bei deren Besprechung sehen, dass seine Bezeichnung derselben noch etwas schwerfällig ist; aber das Wesen der Sache und deren Bedeutung hat Stevin erkannt und zum Ausdrucke gebracht, so dass ihm wohl das Lob gebührt, welches ihm von einem seiner Verehrer gezollt wird:

Non fumum ex fulgore, sed ex fumo dare lucem
Cogitat, ut speciosa dehinc miracula promat
Sume unum e multis. Quid non Decarithmia praestat
Divinum scriptoris opus? cui non ego si vel
Aurea mi vox sit, centum linguae oraque centum
Omni aetate queam laudes persolvere dignas.

Mit Stevin bin ich an das Ende des Jahrhunderts und damit des Zeitabschnittes gelangt, dessen Hauptvertreter auf dem Gebiete des Rechnens ich in kurzen Zügen vorführen wollte; ich gehe nun dazu über, das Rechnen selbst, die Uebung und die Leistung jener Zeit darzustellen und schicke dem noch eine kurze Mittheilung über deren Ansichten vom Werthe des Rechnens voraus.

8. **Ansichten über die Bedeutung der Arithmetik.** — Wie Boetius gleich zu Anfang seines mathematischen Werkes unter Berufung auf Pythagoras und überhaupt die Alten versichert, dass in der Philosophie keiner zur Spitze der Vollkommenheit gelangen könne, der nicht den vierfachen Weg des Quadriviums gewandelt und dass unter den dasselbe ausmachenden Wissenschaften (Arithmetik, Geometrie, Musik, Astronomie) zuerst die Arithmetik erlernt werden müsse, welche gewissermassen die Stelle einer Mutter zu den übrigen einnehme, so hat das ganze Mittelalter treulich derselben Meinung gehuldigt; und auch die Schriftsteller, welche am Anfang der neuen Zeit stehen, rühmen die Arithmetik und berufen sich auf des Plato und Aristoteles nicht minder wie des Augustinus

und Boetius Zeugniss: „Plato zu einer zeyt gefragt ward“ — so berichtet uns Riese — „wo durch ein mensch andre Thier vbertrette: geantwortet hat: Dass er rechnen kann vnd verstand der zaln hab“. Mit Gewissenhaftigkeit wird stets die Stelle der heil. Schrift citirt, dass Gott Alles nach Maass und Zahl geordnet habe und „deshalb die kunst Arismetrica die aller edelst vnder den sybē freyen künsten“ sei (Köbel) und darum „die zal vñ die Rechenung zum Ersten vor allen andern not ist zu wissen“ (Apianus). Aber auch ein anderer Grund wird in's Feld geführt: sie gewähre Nutzen und ein Jeder, welches auch sein Stand und seine Würde sei, könne Vortheil aus ihr ziehen; Köbel, die Sitte des folgenden Jahrhunderts vorausnehmend, singt von ihr:

„Ayn mensch dem Zal verborgen ist
„Leychtlich verfürt der wird mit list
„Diss nym zu hertzen bit ich ser
„Vnd jeyder sein Kind Rechen ler.“

Aber auch die allgemeinere Bedeutung für Menschenbildung, welche die Uebung im Rechnen verleiht, wird hervorgehoben und kaum von Einem mehr als von Melanchthon, dessen Verdienste um die Sache ich früher schon erwähnte. Seine Vorrede zu Stifel's *Arithmetica integra* beginnt sofort: „Nicht wenn ich hundert Zungen hätte, könnte ich aufzählen, in wie Vielem die Zahlen Nutzen gewähren. Und so augenfällig und auf der Hand liegend ist der Nutzen nicht nur der Zahlen, sondern auch der Kunst, welche lange und verwickelte Rechnungen mit wunderbarer Geschicklichkeit durchführt und erklärt, dass ich Niemanden für so stumpf halte, dass er nicht die Zahlen bewundere und die Kunst selbst hochschätze.... Endlich ist es für den Gebildeten schändlich, diese Kunst zu vernachlässigen, welche die Quelle und der Anfang alles Schliessens ist... Deshalb müssen gute und gelehrte Männer mit aller Macht sich bemühen, diesen Unterrichtszweig wieder in den Schulen einzuführen....“ Und wie Melanchthon in Deutschland, so klagt Ramus in Frankreich: früher bei den Hebräern, Aegyptern, Griechen, Italern haben die mathematischen Studien geblüht und auch lange nachher noch seien die Knaben in zartem Jugendalter *„in his doctis abacis, in hoc erudito pulvere“* unterrichtet worden; aber schon seit Jahrhunderten seien kaum Wenigen und nicht Knaben, sondern Gelehrten die Elemente der Mathematik bekannt; dies müsse sich ändern und er wolle nicht einen Stier nur, sondern eine Hekatombe jenen weihen, von welchen er sehe, dass sie die mathematische Kunst den Knaben leicht, den Künstlern geläufig, in Theorie und Praxis endlich nicht nur anstaunenswerth, sondern auch populär gemacht hätten. Und wenn Melanchthon, das Sprüchwort citirend: Frisch gewagt ist halb gewonnen, als Preis solch arithmetischen Wissens das Innehaben von mehr

als der Hälfte der ganzen Philosophie in Aussicht stellt, so versteigt sich der Humanist Hermann von dem Busche gar zu dem Pentameter: *Omnia tunc novit qui numerare potest.*

An Anrühmung der Arithmetik und an Empfehlungen des Studiums derselben hat es also nicht gefehlt — sehen wir nun zu, worin diese Arithmetik der Reformationszeit bestand! Dass hier im Ganzen drei durchaus verschiedene Methoden in Betracht zu ziehen sind, das Fingerrechnen, das Rechnen auf Linien und das Ziffernrechnen, wurde schon oben erwähnt. Beginnen mit der ersten!

I. Das Fingerrechnen.

9. Es steht unzweifelhaft fest, dass der Gebrauch, unter Benützung der Finger Zahlen darzustellen, ja auch wirkliche Rechnungen auf diese Weise durchzuführen, im Alterthum in allen Schichten der Gesellschaft allgemein verbreitet war. Eine Reihe von Stellen aus den lateinischen Klassikern beweist dies z. B. für die Römer und bezeugt wenigstens für deren spätere Zeit die Nothwendigkeit der Geübtheit in dieser Sache. Wenn also das auf römischem Wege fussende Mittelalter die gleiche Methode benützt, so ist das nicht zu verwundern; auch Leonardo (1202) betont*, dass die, welche das Ziffernrechnen benützen wollten, wohl auch den *computus per figuram manuum* wissen und im Addiren und Multipliciren mit den Händen sich wohl üben müssten, um darin Gewandtheit zu erlangen.

Es scheint nun die gewöhnliche Annahme zu sein, dass mit dem Mittelalter auch das Fingerrechnen sein Ende genommen habe, und es ist dies begreiflich, da in der That so sehr wenige Schriften seiner Erwähnung thun. Dass dem aber nicht so sei, dass auch diese lang gewohnte Uebung eine ungemeine Zähigkeit des Lebens besass, beweisen uns dem 15. und 16. Jahrhundert angehörige Schriften. So findet sich bei Lucas von Burgo (den ich künftig einfach Lucas nennen will) eine Tafel**, auf welcher in vier Reihen je 9 durch Einbiegen oder vollständiges Umlegen der einzelnen Finger erreichte Fingerstellungen und dadurch erzielte Formen der Hand zur Darstellung kommen; jede einzelne der letzteren bezeichnet eine Zahl und zwar so, dass die Einer und Zehner durch die linke, die Hunderter und Tausender durch die rechte Hand versinnlicht werden. Und Lucas hält nicht etwa nur die Darstellung der Zahlen auf diese Weise

* *Liber Abbaci ed. Boncompagni.* S. 5.
** *Summa de Arithmetica etc.* Fol. 36v.

für möglich; er spricht* von der Bedeutung des Rechnens, dass es „gewissermassen den Menschen als gottgleich erscheinen lasse, besonders wenn man das Dividiren, Multipliciren, Summiren und Abziehen gut auswendig wisse; dies betreibe sich noch leichter mit den Händen, wenn man noch die Handgriffe der Arithmetik auswendig wisse, was immer zu allen genannten Zweigen (des Rechnens) diene", worauf dann die erwähnten Abbildungen folgen.

10. Aber auch in einem deutschen Buche sogar aus späterer Zeit ist vom Fingerrechnen die Rede. In seinem noch mehrfach zu citirenden Rechenbuche (von 1532, Vorrede von 1527) macht Apianus gelegentlich der Erklärung der Addirens und der dabei auftretenden Nothwendigkeit, die sich ergebenden Zehnerzahlen im Kopfe zu behalten, den folgenden Vorschlag: „Ob aber einer so gar vngeschickt were | vnd die zal im sinn zu behalten nit vermöcht | sol er die finger der lincken handt | nach derselbigen zal | welche behalten sol werden | legen vnnd heben. Darnach so er kommet zu den andern Figuren | sol er die zal | welche er im sinn behalten hat nach anleytung der Finger Addirn". Und Apianus bildet hierzu zehn durch Biegen und Strecken der Finger gewonnene Handformen ab — freilich der rechten Hand — mit Beifügung der Zahl, als deren Symbol dieselbe zu gelten habe. Wenn nun auch hiermit gewiss nur eine Darstellung von Zahlen, dazu nur von 10 Zahlen bewiesen ist, so ergiebt sich aber ein Weiteres aus den unmittelbar darauf folgenden Worten Apians: „Wie auch ein jetliche zal mit einer andern zal durch die Finger beyder hend sol multiplicirt | dar durch auch die keuff im sinn gemacht werden | wirstu inn meinem Centiloquio finden". Leider ist mir letzteres Buch unbekannt, ja es ist mir sogar sehr zweifelhaft, ob es je erschienen. Denn in der Vorrede zu seinem Rechenbüchlein sagt Apian: „Die Regulas Cosse mit sampt dem Centiloquio | darin̄e der kern ligt | wird ich in kürtzer zeit (wil Got) auch in druck geben"; zwei Jahrhunderte später aber macht Leupold**, indem auch er von Apians Fingerrechnen spricht und dessen Hinweis auf sein Centiloquium erwähnt, die Bemerkung: „ich habe aber solches Centiloquium zur Zeit noch nicht ansichtig werden können, wie sehr ich mich bemühet". Jedenfalls aber geht aus Apians Worten hervor, dass zu seiner Zeit, wenn wohl auch nur wenigen Einzelnen, doch immerhin das Fingerrechnen als solches be-

---

* Ib. Fol. 36r: *„E molto aglianimi nostri deletabili com̄o appare: e quasi fa parere lhomo diuino: maxime quando sanno ben Partire. Multiplicare. Summare. e Sotrare amente. Le qual cose se hano asai piu legiermente ale mani: se ancora le mani de la Arithmetica haueremo amente: le qual servirā sempre a tutte ditte parti: si com̄o dinanze promisi mostrare. E pongotele qui figurate che sono ...."*

** J. Leupold, *Theatrum arithmetico-geometricum.* Leipzig 1727, S. 3.

kannt war und wenn auch selten geübt war. Ja, wenn wir hören, dass auch heute noch (in einer weiter unten zu besprechenden Weise) in der Wallachei hin und wieder die Finger benützt werden, um das Produkt zweier einziffrigen Zahlen, welche grösser als 6 sind, zu finden, so wird man aus dem Allem schliessen dürfen, dass wohl auch im 16. Jahrhundert das Fingerrechnen im Gebrauch war, und es darf uns nicht befremdlich erscheinen, dass diese nur den Gebrauch der Hände erfordernde und gewiss auch fast nur durch Vorzeigen und Absehen sich weiter verbreitende Zahlendarstellung so selten in gedruckten Büchern sich erklärt findet.

II. Das Rechnen auf Linien.

11. Wir sahen, dass das Fingerrechnen im Anfange der Neuzeit zwar noch gebräuchlich war, aber höchst selten nur zur Durchführung von Rechnungen benützt wurde, dass es jedenfalls nicht mehr Volkssitte, sondern wohl nur Wenigen bekannt war. Geradezu charakteristisch aber ist für das 16. Jahrhundert das Rechnen auf Linien und ganz unvermittelt scheint es mit Beginn desselben aufzutreten.

Wohl gebrauchten, wie heute noch die Ostasiaten ihren Suanpan, so die Alten ihren Abacus, d. h. eine kleine Tafel, versehen mit Einschnitten, welche gegen den Rechnenden gerichtet und in welchen mit Köpfchen versehene Stifte verschiebbar sind; je nach deren Stellung innerhalb der Einschnitte werden für irgend welche Zahl diejenigen Bestandtheile bezeichnet, welche wir heute durch unsere Ziffern darzustellen pflegen. Und auch ein Abacus ohne Einschnitte war im Alterthum gebräuchlich, mit parallelen Linien versehen, auf oder zwischen welchen durch aufgelegte Rechensteinchen *(calculi)* die Operationen durchgeführt wurden; ob aber die Linien horizontal oder vertikal, oder besser ob sie querüber vor dem Rechnenden oder gegen denselben gerichtet auf der Tafel gezogen waren, ist eine Streitfrage, doch wohl im ersteren Sinne zu entscheiden. Jedenfalls aber findet sich solches Rechnen mit Rechensteinen während des ganzen Mittelalters nirgends direct erwähnt, denn das Columnenrechnen des Boetius und Gerbert ist anderer Art.* Da mit Anfang des 16. Jahrhunderts tritt es auf einmal wieder auf, vielleicht weniger in Italien und England, wohl aber in Frankreich und ganz besonders in Deutschland.

* Vgl. über das Columnenrechnen: G. Friedlein, Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer und des christlichen Abendlandes. Erlangen 1869, S. 51—56 und S. 102—125.

Für Frankreich finde ich dasselbe zum ersten Male in einem *„De arte numerandi siue arismetice (perfectionis) summa quadripartita“* betitelten Buche, dessen Druckzeit zwar nicht darin angegeben ist, welches aber nur den ersten Jahren des 16. oder wohl auch dem Ende des 15. Jahrhunderts angehören kann. Indem der Verfasser das Rechnen *„per proiectiles“* verhältnissmässig kürzer auseinander setzt und dann beifügt (Fol. b_6^v) *„hec licet breuiter de proiectilibus sint dicta . negotianti tamen atque se exercenti per eos frequenter . abundantissime hec pauca sufficient“*, so beweist er damit, dass das Rechnen auf Linien schon längere Zeit eingebürgert war.

Dass es aber auch in Deutschland nicht erst jetzt aufkam, ersieht man aus der Schrift des Balth. Licht vom Jahre 1500*, welcher dieselbe seinem Lehrer an der Leipziger Universität widmet und dabei sagt, dass er von ihm die Anregung empfangen *(„ex tuis olim passim nobis repetitis“)* und danach sein Werkchen verfertigt habe.

12. **Wesen.** — Dieses Rechnen erforderte eine Reihe paralleler gerader Linien, welche in gleichem Abstand von einander und querüber vor dem Rechnenden von links nach rechts gezogen wurden und zwar gezogen „uff ein Tisch mit kreyden (uff einem Tuch, Filtz) oder wohin du wilt machen.“ Die Titelblätter der damals erschienenen Rechenbücher zeigen häufig Abbildungen von rechnenden Personen, entweder eine und diese „auf Linien“ oder „auf der Feder“ rechnend je nach dem bezüglichen Inhalt des Buches selbst, häufiger aber zwei oder drei Personen in gleicher Beschäftigung; auf diesen Bildern nun finden sich die „Linien“ fast immer unmittelbar auf die Tischplatte des Kaufmanns- oder Wirthstisches hingezeichnet, seltener auch (z. B. bei Menher) auf eine etwa $^1/_2{}^m$ hohe Bank, neben welcher der am Boden auf einem Kissen sitzende und sich über die Bank lehnende Rechner abgebildet ist. So versteht sich auch, wenn Albert und Köbel die Linienanordnung geradezu als „Rechenbanck“ überschreiben und wenn letzterer sagt: „es wirt diss Figur der Linien ain Rechenbanck ... genannt“ und wenn er sich an den Leser wendet mit der Vorrede: „Ich ler die Kynd an Bencken gan | Algrismum Jung vnd Alt verstan.“

Auf und zwischen die genannten Linien wurden nun „Rechenpfenninge *(projectiles)*“ gelegt, deren Einheitswerth verschieden war je nach der Stellung der betreffenden Linien selbst, so dass wohl „Von krafft der Linien vnnd jrer Bedeutung“ gesprochen werden konnte. „Clar ist — lässt sich Köbel vernehmen — das die vnderst linig Ains bedeut | Die zwait

---

* *Algorithmus linealis cum pulchris conditionibus Regule detri: septem fractionum ....“* — Kästner I, 85 citirt nur die Ausgabe von 1513 mit der Vorrede von 1509; vor mir aber liegt eine Ausgabe, deren Vorrede von 1500 datirt ist und an deren Ende keine Jahreszahl beigefügt ist, wie dies Kästner angiebt.

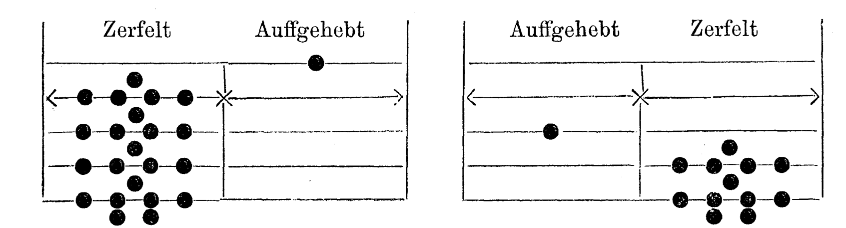
Zehen | die drit Hunndert | Die fierd Tausent | u. s. w. vnnd also auff vnnd auff | So vielder Linien gemacht werden | Bedeut aine yede Linig Zehenn mall als vil als die nechst Linig vnnder yr.“ Zur Erhöhung der Uebersichtlichkeit soll stets auf die vierte Linie „ain Crützlein oder sunst ain zeichn̄“ gemacht werden, um anzudeuten, dass sie 1000 bedeute und dass von ihr an „widerumb ain anfang ist auff Tausant zu zelen“, nach dessen Erreichung die betreffende Linie wieder durch ein Kreuzchen ausgezeichnet werden soll. Aber auch die Zwischenräume *(spacia,* bei Regius *„domus“)*, die „Feldung oder Spacien“ hatten ihren besonderen Werth: „On velenn bedeut die Erst vnd vnderst veldung oder spacium zwische̅ der Ersten vn̄ zwaiten Linien | Fünff | Das Ander Spacium zwischen der zwaytten vn̄ drittenn Linien fünfftzigk | u. s. w. vnnd also für vnnd für Bedeut ain yeklich Spacium fünff mal als vill als die nechst Linig vnder ym | vnnd halb als vil als die nechst Linig ob ym | Auss dem hastu dass | das erst spacium vnder der vnderstenn linien ainn halbs bedeut | . . . Des zu sichtlicher anschawung nym diss nachuolgend Beyspiel“:

	Zehen Tausant	●
	Funff Tausant	●
✕	Tausant	●
	Funffhundert	●
	Hundert	●
	Funftzig	●
	Zehen	●
	Funff	●
	Ains	●
	Ain halbs	●

Diese weitläufigen Erklärungen hat erst Stifel zusammengefasst in eine einzige, aus der „sollichs alles gibt sich selbs fein“, nämlich in der Regel: „Ein jeder Rechenpfenning der auff einem spacio ligt | bedeutet halb so vil | als einer auff der nehisten linien drob | vnnd fünffmal so vil als einer auff der nehisten linien drunder“. Deutlich genug tritt hier hervor, dass diese Anordnung mit der Reihenfolge der römischen — übrigens gerade von Köbel als „gemain Teusch zal“ bezeichneten — Zahlzeichen I, V, X, L, C, D, M übereinstimmt und so wohl auch lateinischen Ursprung andeutet.

Selbstverständlich ist es und dennoch wurde stets weitläufig erklärt, „das du nit fünff Rechenpfening auff ainer Linien | oder zwen in aim spacium ligen lassen solt“, sondern „alsdan soltu die selbenn fünff auffheben | vnd ain dar für in das nechst Spacium ob der selben Linien legen In gelicher weiss | als offt du zwen Rechennpfening in aim Spacium findest | soltu alweg die zwen aufhebē | vn ain dar für auf die nechst Linig ob

dem selben spacium legen“, so dass also nach beendeter Rechnung auf jeder Linie höchstens vier, in jedem Zwischenraum höchstens ein Rechenpfennig liegen konnte. Aber umgekehrt konnte man und musste beim Rechnen zuweilen einen in den oberen Gegenden der Rechenbank liegenden Rechenpfennig, „ain grosse sum in bedeutung ains ainigen Rechenpfennings“, in die Linien und Spacien darunter zerfällen oder „vndertailen“ in einer Weise, die sich (wie das Vorige) sofort aus der folgenden Darstellung Apian's ablesen lässt:



Zur **Darstellung mehrfach benannter Zahlen** „soltu dieselben Linien vnd spacien mit zwaien oder dreyen zwerg linienn von oben herab gezogen vnderscheyden vnd yegklichs geschlecht der Müntze oder Gewicht vnderschydlich in der tail ains legen“; diese Abtheilungen, deren also z. B. beim Rechnen mit Gulden, Albus, Pfennig, Heller vier nöthig waren, hiessen „wechselbenck, Cambien oder Banckir“ (bei Regius *„viculi“*). —

Man erkennt aus dem Vorstehenden, dass die Darstellung der Zahlen in der That, wie Stifel meint, „wunder leichtlich durch die Rechenpfenning geschicht“. Dass aber auch die gewöhnlichen Rechnungsarten durch dieselben „wunderleichtlich gelernet vnd gelehret“ werden konnten, ja dass man auch noch mehr damit auszurichten vermochte, werden wir nachher sehen.

13. Was nun die **Benennung** dieses gebräuchlichsten „Rechnens auf Linien“ betrifft, so habe ich mit eben diesem Namen und seither überhaupt diejenige benützt, welche in deutschen Schriften die häufigste und offenbar die volksthümlichste gewesen ist. Doch auch andere Namen sind gebräuchlich und in dieser Namengebung selbst ist die vorausgegangene Entwickelung der Arithmetik deutlich genug zu erkennen. Nachdem das Columnen- oder Abacus-Rechnen des Boetius und Gerbert durch die bei den Arabern zuerst von Mohammed ben Musa Alkharezmi gelehrte indische Methode verdrängt war, wurde es unter allmähligem Vergessen des Namens des ersten Lehrers gebräuchlich, die neue Methode selbst als Algorismus zu bezeichnen und diese Bezeichnung blieb in Uebung während der nächsten drei Jahrhunderte, so dass es im Gegensatze hierzu richtig erscheint, wenn später das Rechnen auf Linien wieder als Abacusrechnen benannt wird; doch finde ich nur, dass Regius von einer *supputatio quae*

fit in Abaco spricht und erklärt: „*Abacus vulgo mensa dicitur calculatoria quibusdam distincta lineis*". Wenn aber der Mann, welcher am meisten dazu beigetragen, das Ziffernrechnen auszubreiten, wenn Leonardo selbst sein Buch „*il Abbaco*" betitelt und auch später noch, z. B. 1501, Borgi seine nur die Rechnung mit Ziffern lehrende Anleitung „*Libro del Abacho*" nennt, so dürfte es auch nicht wundern, wenn umgekehrt im 16. Jahrhundert das Rechnen mit Rechensteinen sich als Algorismus bezeichnet fände. Doch ist ein solches Vorkommen dieses Wortes in dem bezeichneten engeren Sinne gewiss selten, und wenn Reisch von dem „*Algorithmus vulgi per lineas et denarios projectiles*" spricht oder wenn Köbel die Grundrechnungsarten, welche er auf Linien erklärt, als „Algorischtische Species" bezeichnet, oder wenn das Werk von Balth. Licht, das erste, in welchem, wie es scheint, das Rechnen mit Projectilen gelehrt wird, sich geradezu als *Algorithmus linealis* einführt, so erkennt man hieraus nur, dass allmählig Algorismus sich theilweise schon zu einer Benennung für Rechnen überhaupt umgewandelt hatte; wir werden übrigens unten hören, dass es häufiger noch immer allein das Rechnen mit Ziffern bedeutete. Unzweideutiger ist die für das Rechnen auf Linien in lateinischen Schriften gebräuchliche Benennung als „*modus numerandi qui per projectiles seu lineas fit*", am gebräuchlichsten aber ist die Bezeichnung als „Rechnen auf Linien", wofür Stifel wohl auch „Haussrechnung" gebraucht hat.

14. **Verbreitung.** — Schon mehrfach habe ich hervorgehoben, dass die Rechenmethode mit Ziffern während des 16. Jahrhunderts nur allmählig sich einbürgerte, dass die auf Linien stets daneben geübt wurde, ja während der ersten Hälfte des Jahrhunderts jedenfalls weitaus das gebräuchlichere, bei Hoch und Nieder geläufige war. So heisst es in Tzwivel's Rechenbuch (1507), wo beide Arten gelehrt werden, „*alia in scripto, alia calcularis, haec quidem facilior quoniam sensibilis, illa difficilior, licet scholasticis familiarior*".* „Man weist — sagt Stifel — vnd siehet für augen wie sie bei den höhesten Herren geliebt vnnd verehrt wirt an jren getrewen vnd geschickten Renthmeystern Kamerschreibern Kuchenschreibern Schossern vnd der gleichen Haussrechnern." Und es ist dies leicht erklärlich: wer einmal die Bedeutung der Linien und Zwischenräume aufgefasst hatte, war leicht im Stande, die einzelnen Rechenpfennige hinzulegen und wegzunehmen, um so die gewöhnlich vorkommenden Rechenaufgaben zu lösen; besonderer Zahlzeichen und besonderer Regeln über deren kunstvolle Zusammensetzung und Behandlung bedurfte es nicht. Diese Rechenweise musste also wohl „für die Summirung der Register brauchsamer erscheinen dann durch die federn oder kreide" (Apian) und war besonders „dem gemainen Laien zu

* Nach Kästner a. a. O. I, 82.

gut vnnd nutz dem die Zyffer zale am Erstenn zu lernenn schwere“ (Köbel), und auch für den Unterricht der Jugend musste sie als vorzüglich erkannt werden. Drum lässt sich Riese hören: „Ich habe befunden in Unterweisung der Jugend, dass alleweg die, so auf den Linien anheben, des Rechnens fertiger und lauftiger werden, denn so mit den Ziffern, die Feder genannt anfahen. In den Linien werden sie fertig des Zählen und alle Exempla der Kaufhändel und Ausrechnung schöpfen sie einen besseren Grund, mögen alsdann mit geringer Mühe auf den Ziffern ihre Rechnung vollbringen“; und auch schon Balth. Licht (1500) macht die Bemerkung: *„Speculatio ista linealis magna industria excogitata est facillime Que tum facilior est. tum ingenia nostra ad imitandum alacriora reddit. ymmo erigit cupiditates. et acuit industriam. posse alterius Arithmetrice consequi facultatem.“* In Uebereinstimmung hiermit finden wir, dass Viele, besonders Solche, die an der Pflege des Rechenunterrichtes ein Interesse hatten,* ihren Unterweisungen über das Ziffernrechnen entweder besondere Schriftchen über das auf Linien vorausgehen liessen (z. B. Köbel, Albert) oder in den jenen Unterweisungen gewidmeten Büchern ein besonderes Kapitel darüber voranschickten (z. B. Riese, Stifel) oder jede einzelne Operation des Rechnens jeweils „auff Linien vnd Ziphren“ (z. B. Reichelstain) durchführten.

Dass aber die „Haussrechnung“ auch von Mathematikern selbst geübt wurde, dafür giebt Stifel selbst ein Beispiel, indem er in seiner „Wortrechnung“ (1553) erzählt: „...als ich einest sass in einem wasserbad kam mich ein lust an zu legen (nach dieser meiner rechnung) dise wort die mir sonst offt im mund waren. *Vae tibi Papa vae tibi.* Ruffet meinen knaben befahle jm mit rechen pfennigen zu legen was ich jm würde angeben... Nach solchem legen fragt ich den knaben was für ein zal kommen were... eilet aus dem bad die zal zu besehen Nam die sach selbs vnter die hand vnd fand das der Knab recht gelegt hatte“.

Und wenn auch, wie wiederum Stifel bezeugt, „die Haussrechnung von den Kunstrechnern zu zeitē verachtet wirt als eine geringe kunst“, so konnte es doch dem Rechnen selbst und der allgemeinen Bildung nur zum Nutzen und Männern wie Riese, Apianus, Stifel nur zur Ehre gereichen, wenn sie, auf der Höhe der Wissenschaft stehend, es nicht unter ihrer Würde hielten, die Elemente zu bearbeiten. Möchten in dieser Hinsicht solche Zeiten wie auch die eines Euler, Lagrange, Legendre uns ebenfalls wieder kommen!

---

* So führt Leupold in seinem *Theatrum arithmetico-geometricum* (1727) allein aus dem letzten Drittel des 16. Jahrhunderts zehn Bücher über das Rechnen auf Linien an, weitere sieben aus dem 17. Jahrhundert und fügt dann bei: „und noch viele andere mehr“.

15. Grundrechnungsarten. — Gehen wir dem Rechnen auf Linien im Einzelnen nach, so sind es natürlich die Grundrechnungsarten, die hier zunächst zur Darstellung kommen müssen. Da sich aber nicht kurzweg wie heute von vier solchen sprechen lässt, so ist vorher die Zahl derselben zu erörtern; ich werde hierbei überhaupt vom Rechnen des 16. Jahrhunderts handeln, in diesem Punkte also zugleich auch die Schriftsteller in Betracht ziehen, welche über das Ziffernrechnen geschrieben haben.

Was unter Grundrechnungsarten zu verstehen sei, wird meistens mit Stillschweigen übergangen; ich finde nur bei Gemma Frisius die Erklärung: *„vocamus autem species certas operandi per numeros formas“* und bei Ramus, unter Andeutung des gegenseitigen Verhältnisses derselben, die Aeusserung: *„componendi numeri, ut contra retexendi modus est simplex aut coniunctus: simplex in additione et subductione, coniunctus in multiplicatione et partitione“*, und Beausardus (1573) meint, dass sie *„incommode vulgus plerumque arithmetices species nominat, nos commode partes appellandas censemus“*.

Die Zahl der Rechnungsarten oder Species, wie sie, zumal in deutschen Büchern, gewöhnlich heissen, wohl auch einmal (Ramus) *supputandi genera* oder *„passiones“* (bei Tzwiuel), ist eine ziemlich verschiedene, weniger von bestimmten Principien, als vielmehr von dem Geschmack der Schriftsteller und dem Zwecke ihrer Bücher abhängig. So sagt Lucas, die Alten *(Sacrobosco, Prosdocimo e molti altri in loro algorismi)* hätten stets 9 Species unterschieden: die Numeratio, Additio, Subtractio, Duplatio, Multiplicatio, Mediatio, Divisio, Progressio und das Wurzelausziehen; in gleicher Weise trennen auch Peurbach, Widmann und Huswirt. Lucas aber erklärt, die 9 auf 7 Species rückführen zu wollen, da das Dupliren ja nur ein besonderer Fall des Multiplicirens und das Mediren in gleicher Weise bereits im Dividiren enthalten sei und Widman hat früher schon, wenigstens bei der Bruchlehre, aus gleichem Grunde nur sieben Species behandelt; und wenn dann auch dieser selbe Grund in der Folgezeit Manche (z. B. Reisch, Cardanus) bestimmt, nur 7 Species anzunehmen, so kehren Duplicatio und Mediatio doch häufig genug wieder, so dass man des Gemma starken Ausdruck begreift: *„Quid uero mouerit stupidos illos nescio, cum et finitio et operatio eadem sit“*. Wie würde er sich gar aufgeregt haben, wenn er noch erlebt hätte, dass der Commentator seines eigenen Buches, Forcadel, die Zahl der Species gar auf 10 festgesetzt, indem er den genannten noch die als eine gerechnete *„Doubler et Medier“* beizählt! Mehrfach werden auch schon die lateinischen durch deutsche Benennungen ersetzt, so dass von „Zalung, Zusammenthuung, Abzyhung, Zwyfach machē, Halbmachen, Manigfaltigung, Teylung, Fürtzelung“ die Rede ist (Köbel, Stifel). Aber wenn wie hier nur 8 oder wie meist nur 7 Species angegeben werden, so sind es doch nicht stets dieselben: bald werden Dupliren und Mediren

mitgerechnet, Numeriren und Wurzelausziehen aber nicht (Köbel), bald wohl noch ersteres, dafür aber aus pädagogischen Gründen letzteres und die Progressio ausgelassen (Vuolphius). Indem ferner nur das Wurzelausziehen zum Wegfall kommt (Apianus) oder auch noch die Progressio als Anwendung der Addition zugewiesen wird (La Roche), ergeben sich nur 6 oder 5 Species, und es bleiben gar nur 4 übrig (Reichelstain, Ramus, Stifel, Gemma, Beausardus), wenn das Numeriren nicht mehr als besondere Species gezählt wird.

So behält also am Anfang des 17. Jahrhunderts Pöpping Recht, wenn er sagt: „Algorithmus ist eine Lehr so da in sich schleust die Präcepta vn̄ *species* so zum Rechen gehörig: vn̄ werden deroselben von etzlichen sieben, von etzlichen sechs, von etzlichen fünf, von etzlichen recht vnd wohl nur vier gezelet, da dann das Numeriren im Eingang vn̄ Anfang der *Speciern̄* wird gehalten vnd angesehen". Diese letztere Zahl ist dann in der gewöhnlichen Schularithmetik die feststehende geblieben.

Es ist nun unsere Aufgabe, die Rechengeschäfte auf Linien im Einzelnen darzustellen.

16. **Addiren.** — Waren die Linien gezeichnet, so hatte man zuerst durch Rechenpfennige die zu addirenden Zahlen einzeln auszudrücken, indem man gleichbenannte durch kleine Lücken oder durch Querstriche getrennt neben einander hinlegte, für ungleich benannte aber die nöthige Zahl „Cambi oder Banckire" herstellte und in dieselben die einzelnen Bestandtheile vertheilte; das Addiren selbst bestand dann in einem Zusammenziehen der sämmtlichen auf je einer Linie oder in je einem Spacium liegenden Rechenpfennige auf die einfachste Form („Aufheben, *elevare*") dadurch, dass man je fünf auf einer Linie oder je zwei in einem Spacium durch einen auf dem nächst höheren Spacium, bezw. der nächst höheren Linie ersetzte. Selbstverständlich wurden dabei die niedrigeren Sorten von Maassen, Gewichten und Münzen durch höhere ausgedrückt. Schliesslich konnte man dann die Summe leicht in „teutschen", d. i. römischen oder in indisch-arabischen Zahlzeichen aufschreiben, wobei nur „ein jeglich Spatium vnd die nechste Linia darunder zusammen allezeit verzeichnet werden" mussten.

Den Vorzug grosser Anschaulichkeit und Leichtigkeit wird man diesem Addiren nicht abstreiten wollen: drum sagt auch selbst Apian, dass „die Summirung der Register in gewicht mass vnd müntz durch die rechenpfenning auf der linie brauchsamer ist vnd vil schneller vnd füglicher geschicht dann durch die federn oder kreide", und Stifel, jede weitere Erklärung ablehnend, meint kurz: „So du die linien verstehest, so kanstu auch Addiren | das darff nicht wort".

17. Zum **Subtrahiren** legte man die grössere Zahl ähnlich hin, die davon abzuziehende aber „die magstu im sinn behalten | oder magst sie

für dich schreiben mit der kreyden oder magst sie zur linken Hand der gelegten zal“ hinlegen: ein wirkliches Wegziehen oder Aufheben der Rechenpfennige (— woher unser heute noch beim Subtrahiren gebrauchter Ausdruck „hebt sich auf“! —), wobei nöthigenfalls das oben besprochene „Zerfällen, Verwechseln, *resoluere*“ eines solchen eintrat, führte zum gesuchten „Facit oder Resto“.

18. Das **Dupliren** geschah, indem man zwei Banckire abtheilte, in das erste die gegebene Zahl auflegte und dann für jeden einzelnen auf einer Linie liegenden Rechenpfennig zwei auflegte auf dieselbe des zweiten Banckirs, jeden in einem Spacium liegenden aber auf die zunächst darüber stehende Linie des zweiten Banckirs übertrug; die richtige Zusammenfassung führte wieder zum einfachsten Ausdrucke der gesuchten Zahl.

Für das **Mediren** oder Halbiren wurden ebenfalls zwei Banckire benützt und in das erste die zu halbirende Zahl eingelegt. Dann von der untersten wie gewöhnlich oder (nach Stifel) von der obersten Linie beginnend und je auf die betreffende Linie einen Finger der linken Hand aufsetzend, „die Linie greifend“, fasste man die auf ihr und in dem zunächst darüber befindlichen Spacium liegenden Einheiten zusammen, hob je zwei auf und legte „allweg für zwen auffgehebte rechenpfenning einen hinüber auff das ander feld eben auff die linien auff welcher du deinen finger oder gryff hast. Also auch für einen auff gehebten rechenpfenning allein legstu einen hinüber auff das nehist spacium vnder die linien darauf du deinen finger hast | wo man aber nichts findet da legt man auch nichts hinüber | vnd das ist die gantz sach vom halbiren“ (Stifel).

19. Um das **Multipliciren** zweier Zahlen auf Linien durchzuführen, wurde nur die eine durch Rechenpfennige aufgelegt, die andere im Kopfe behalten oder einfach nebenhin aufgeschrieben. Die Vorschrift lautete dann einfach: „Greiff auf die höchste lini dar auff du etwas kanst auffheben | wenn es gleich nur ein halbs were. So offt du nu einen Rechenpfenning aufhebst von der lini die du greyfst so oft mustu dein geschriebne zal gantz hinüber legen (nämlich in ein anderes Banckir) gegen deinem finger das ist eben auff die lini die du greifst. So offt du aber einen Rechenpfenning aufhebst vom spacio vnder der linie die du greifst | so offt mustu dein geschribne zal nur halb hinüberlegen“. Stifel, dessen deutscher Arithmetica diese Stelle entnommen, empfiehlt deshalb auch, die Zahl, mit welcher multiplicirt werden soll, gleich von vornherein „gantz und auch halb mit der kreyden“ aufzuschreiben. War so die Linie, worauf der Finger stand und das darunter befindliche Spacium erledigt, so rückte man den Finger auf die nächste Linie darunter und verfuhr in gleicher Weise, und so allmählig alle Linien bis zur untersten behandelnd und dazwischen

die sich ergebenden Rechenpfennige „elevirend“, fand man schliesslich „die gantze summa diser Multiplicatz“. — Dass zur Abkürzung hierbei wohl auch das Einmaleins zur Anwendung kommen konnte, ist leicht abzusehen; man findet es drum auch angerühmt:

„Lern wol mit fleiss das Ein mal Ein
„So wirdt dir alle Rechnung gemein“.

Wie man sich zu verhalten habe, je nachdem die multiplicirende Zahl gerad oder ungerad, ist zwar wohl in Stifels Regel enthalten; deutlicher aber verfährt Regius, wenn er beide Fälle trennt und beim ersten leichteren Falle vorschreibt, jeden auf einer Linie liegenden Rechenpfennig oder Stein durch eine dem Multiplikanten — oder, wie wir heute sagen, dem Multiplikator — gleichwerthige Anzahl auf derselben Linie zu ersetzen, jeden in einem Spacium liegenden Stein aber auf der unmittelbar darüber stehenden Linie durch eine mit dem Multiplikanten halbwerthige Anzahl von Steinen zu ersetzen; falls aber der Multiplikant ungerade, so solle jeder Stein auf einer Linie wie vorhin behandelt, jeder Stein in einem Spacium aber solle in der darüber stehenden Linie ersetzt werden durch die Hälfte der grössten im Multiplikanten enthaltenen geraden Zahl, wozu dann noch ein Stein im gleichen Spacium komme.

So schwerfällig auch diese Regeln sich aussprechen, so leicht waren sie anzuwenden, und selbst auch dann, wenn der Multiplikant eine mehrziffrige Zahl war; dass dann die neu aufzulegenden Steine theilweise um eine oder mehrere Linien nach oben verschoben werden mussten, ergab sich wohl leicht aus der Praxis, wird deshalb seltener ausdrücklich erwähnt und ich lese nur bei Riese — und schon 1533 — als hierauf bezügliche Regel: „Wo du aber mit zweyen figuren multiplicirst (nämlich einen Pfennig in einem Spacio) | so greiff auff die ander Lini ob dem pfennig | leg dahin die meiste (d. h. Zehner-) figur halb ab. Alsdann greiff herab (leg die erst (d. h. Einer-) figur auch halb | vnd heb den Pfennig im Spacio auff | Desgleichen so du mit dreien | viern oder mehr Figuren Multiplicirn wilt | greiff über so uil Linien | vnd leg von oben herab u. s. w.“.

Dass solches Multipliciren auf Linien so sehr grosse Schwierigkeiten machte, wird man wohl kaum mit Kuckuck behaupten dürfen*, gewiss aber, dass es längere Zeit in Anspruch nahm, wie auch Stifel sagt „Multipliciren mit Rechenpfennigen vnnd diuidiren | ist ein leicht und schlecht ding | so du das greiffen verstehst“.

20. In gleicher Weise wie beim Multipliciren wird auch beim **Dividiren** nur der Dividend aufgezählt, der Divisor aber im Kopfe behalten und die Durchführung ist nur ein wiederholtes Abziehen. In einfachster Gestalt

---

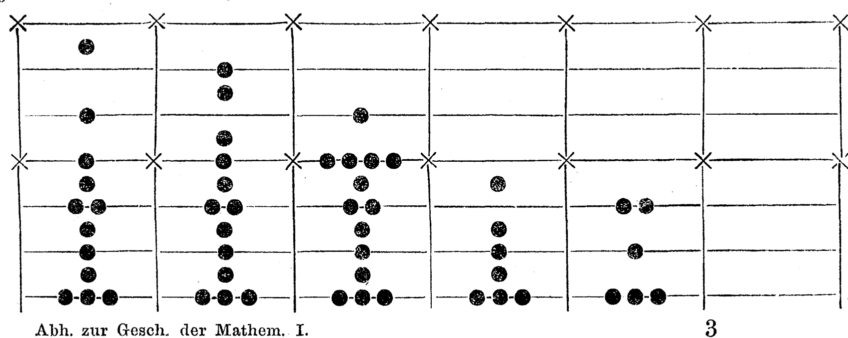
* Kuckuck a. a. O. S. 9.

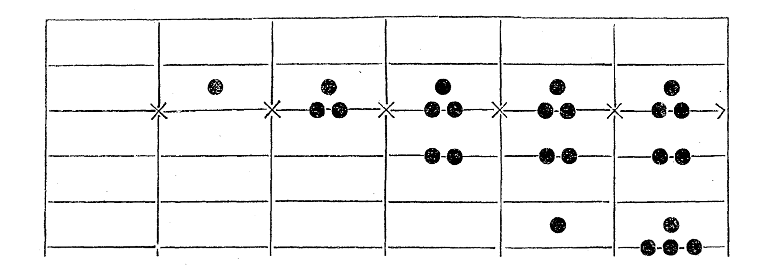
findet sich die darauf abzielende Vorschrift bei Köbel (und ähnlich bei Huswirt) wie folgt: „Greiff mit dem davmenn oder finger der Lincken handt auff die öberst linig | vnnd merck ob du deyn zaln dar durch du taylenn wilt nemen mögst | magstu sie nit nemmen | so greiff herab auff die ander linig das thu so lang biss du die zaln dar durch du tailen wilt | nemen kanst | dann heb die selbig zal auff | als offt du kanst vnnd leg alle mal ain Rechenpfening wider nyder bey dem finger | das thu als lang biss du die zal (dar durch du tailst) nit mer nemen magst | was dann bey dem finger lygen bleibt | ist das tail deiner fürgenummenen zall".

Albert macht ausdrücklich darauf aufmerksam „das du sie vber vier mal nicht darffest nemē | wo du sie 5 mal nemen wilt | so greiff eine Linie höher hinauf | nimb sie halb | vnd leg einen Rechenpfennig ins Spatium | vnder die Linien | da du deinen Finger auffgesetzt hast" und fährt dann in Uebereinstimmung mit Riese weiter: „Wiltu aber durch zwo | drey | vier odder mehr Figurn theilen | greiff auff die öberste Linien | vnnd nimb die letzte Figur | so offt du kanst (doch also) wenn du mit dem Finger herab greiffest | die folgenden Figurn samptlich durchauss | auch so offt nemen magst | Leg alsdenn so viel Rechenpfennige auff die Linie | zu deinem Finger | so offt du die Figurn alle genommen hast".

Einfacher gibt Stifel die Regel an: „ . . . vnd den theyler schreibt man mit der kreyden gantz vnd halb. Darnach greyfft man hinauff | so ferne man kann | doch also | das man den theyler auffs wenigst halb möge finden vnd aufheben. So man aber den theyler nur halb auffhebet | legt man einen Rechenpfenning hinüber | vnder die lini die man greifft | Nemlich in das nehist spacium vnder deinem gryff | als ein halbs. So offt man aber den theyler gantz auffhebet | legt man einen Rechenpfenning hinüber auff die lini die man greyfft".

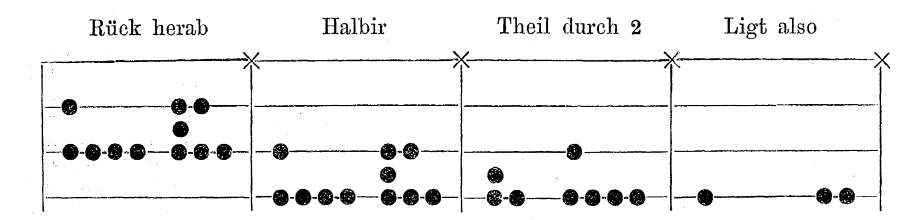
Das Beispiel, welches Stifel gibt (511768 zu dividiren durch 71) will ich hier beifügen, indem ich zuerst den ursprünglichen Dividenden darstelle und rechts davon die nach jeder Division sich ergebende neue Form desselben, umstehend aber beziehungsweise den durch eben die Division jeweils erhaltenen Quotienten:





21. Die im Vorstehenden mitgetheilten Methoden, die Grundrechnungsarten durchzuführen, reichten vollständig aus, um alle im gewöhnlichen Leben vorkommenden Rechnungsaufgaben zu lösen; man hatte nur stets die gegebenen Zahlen und die Resultate mit den üblichen Zahlzeichen aufzuschreiben. Wie Stifel sagt: „So man des (Rechnens auf Linien) gewon wirt | das man ein yede gefundne zal fur sich schreibt mit der kreiden | bedarff man des Algorithmi mit den Cifern gar nichts . . .“.

Wenn beim Dividiren die Rechnung nicht aufging, so wurde, wie wir heute thun, der Rest als Zähler eines Bruches und der Theiler als Nenner darunter geschrieben. Etwaige Abkürzungen solcher Brüche wurden zuweilen ebenfalls durch Rechnen auf den Linien vorgenommen, wie z. B. Albert an dem Bruche $\frac{140}{280}$ deutlich macht. „Wiltu nu dieselben partes oder brüche geringer haben | so rück die vbergebliebene zal vnd deinen theiler | eine vmb die ander | von einer Linien auff die andere herab | dieweil du kanst | oder aber halbir wo sie gerad sein | je eine



vmb die ander | so lang biss sie all beid oder je eine vngerad werde | alsdenn versuch ob sie in dieser vngeraden zal eine sich theilen lassen wöllen | als in 3. 5. 7. 9. oder 11. etc. Wo aber nicht | so lass es also bleiben. Ligt also“, wie in der vorstehenden Figur abgebildet ist.

Gleichwohl muss man beachten, dass, wie Stifel selbst sagt, „die Rechenpfennig vn̄ linien | sind allein eigentlich fur gantze zalen erfunden“, und dem entsprechend hat man im 16. Jahrhundert auch stets die Regeln zur Lösung der gewöhnlichen Verkehrsaufgaben, also insbesondere die berühmte „Goldene Regel“ oder Regel de tri so gelehrt, dass etwa vorkommende Brüche zum Verschwinden kamen und, wenn dies geschehen,

der weitere Verlauf durch Angabe der nöthigen Multiplikationen und Divisionen gekennzeichnet war.

Doch hiervon später!

Was die übrigen der vorhin angegebenen und hier noch nicht zur Besprechung gekommenen Rechnungsarten betrifft, so war das Progrediren, wie wir weiter unten sehen werden, nur eine Anwendung des Addirens; vom Wurzelausziehen aber kann ich hier absehen, da eine Behandlung desselben auf Linien nicht üblich war. Schon der erste Schriftsteller über unser Rechnen sagt in der Beziehung: „*Radices numerorum et propter duplata sparsa et triplata vage disiecta docentur in ciffris multo commodius quare hic taceo eas*“ und in deutscher Sprache erklärt uns Köbel dasselbe, wenn er sagt: „Dieweil ausszyehung der Wurtzeln | auff den linienn zu rechen vnbequem | auch zu heuslichen vnd Gemainenn hendeln | vndienlich wil ich yetz die feder ruw lassen.“

III. Das Ziffernrechnen.

22. Es gewährt ungemeines Interesse zu beobachten, in welch verschiedener Weise, insbesondere mit welch verschiedener Geschwindigkeit die einzelnen Erfindungen unter den Menschen sich ausbreiten. Roh und nur halb ausgebildet, den Stempel des Unfertigen an der Stirne tragend, brechen sich die einen, kaum entstanden, schon Bahn und gerade durch ihre Verbesserungsbedürftigkeit und -fähigkeit die Menschen reizend, wird, was von ihnen Zeugniss giebt, überall hingetragen mit erstaunlicher Schnelligkeit und überall regt sich der menschliche Geist, das Rohe zu gestalten, das Halbfertige zu vollenden, das Verwickelte übersichtlich auszubilden, um endlich klar aufgefasste Ziele mit den einfachsten Mitteln zu erreichen: es ist, als ob auf einem Umwege nur die Menschheit zum sehnlichst erhofften Ziele gelangen könnte. Wie entgegengesetzt ist das Schicksal anderer Erfindungen! Wie aus Jupiters Haupte fertig und vollendet entsprungen, bieten sie sich in wunderbarer Schöne und Einfachheit dem menschlichen Geistesauge dar und dennoch, sie lange Zeit kaum der Beachtung würdigend, geht der Mensch ruhig an ihnen vorüber. Es ist, als ob auch hier nicht der Besitz, sondern das Erwerben allein Befriedigung gewähren könnte! Und gehört nicht zu den letzteren Erfindungen auch die indische der zehn Zahlzeichen und des Stellenwerthes? „Der Gedanke, alle Quantitäten durch 9 Zeichen auszudrücken, indem man ihnen gleichsam einen absoluten und einen Stellenwerth giebt — sagt Laplace — ist so einfach, dass man eben deshalb nicht genug anerkennt, welche Bewunderung er verdient. Aber eben diese Einfachheit und die Leichtigkeit, welche die

Methode dem Rechnen gewährt, erheben das arithmetische System der Inder in den Rang der nützlichsten Erfindungen." Und doch — wie langsam hat sich die Erkenntniss ihrer Nützlichkeit und gar erst die wirkliche Benützung derselben ausgebreitet! Indem ich auf die oben in Kürze gegebene Skizze ihrer Entwickelung verweise, erinnere ich daran, dass selbst bis zum Ausgange des 15. Jahrhunderts im christlichen Europa ein Benützen der Ziffern auch nur zum Aufschreiben der Zahlen selten war: um nur ein Beispiel* anzuführen, noch befinden sich in dem sächsischen Städtchen Buchholz Bergrechnungen aus den Jahren 1509—16 und 1543, welche, mit Ausnahme der Jahreszahlen, in römischen Zahlzeichen ausgeführt sind. Dass man da noch weit entfernt war von einem wirklichen Rechnen mit den Ziffern, von einem wirklichen schriftlichen Durchführen der Rechenoperationen, geht deutlich genug hieraus hervor, wie denn auch Cardanus spricht von einer *operatiua scientia ex ipsis Orci tenebris resurgens.* Und in der That ist das 16. Jahrhundert die Zeit, in welcher der Kampf zwischen dem „Rechnen auf den Linien" und dem „Rechnen auf der Feder" entbrannte und ausgekämpft wurde, um daraus das letztere in einer für die Folgezeit entscheidenden Weise als Sieger hervorgehen zu lassen. Die einzelnen Schriftsteller freilich sprechen sich niemals so aus, als ob sie Anwälte für die eine oder die andere der streitenden Parteien seien: um wenige Beispiele anzuführen, so lehrt Widman nur das Ziffernrechnen und erwähnt das andere mit keiner Silbe, Köbel oder Riese behandeln beides Rechnen, doch so, dass sie das auf Linien vorangehen lassen; Balthasar Licht aber (1500), der zwar die Darstellung des letzteren als Hauptziel im Auge hat, sieht sich doch veranlasst, *„hec ars ut facilior cognitu appareret A n̄ueratione alterius Arithmetrice principium capere",* d. h. vorher die Darstellung der Zahlen durch Ziffern mitzutheilen.

Von welcher Art nun in jener entscheidenden Zeit die Ansichten über geschichtliche Entwickelung und Bedeutung des Ziffernrechnens gewesen und wie die Betreibung desselben im Einzelnen stattgefunden, sollen die folgenden Seiten vor Augen führen. Ich verweise dabei Betreffs der Anzahl der Grundrechnungsarten auf das oben in Art. 15 Gesagte und gehe sogleich über zu der gewöhnlich die erste Stelle einnehmenden.

23. **Numeration.** — Denen, welche über die herrliche indische Erfindung schriftstellerisch sich äusserten, war deren wunderbare Einfachheit meist nicht mehr auffallend genug, dass sie sich wie einst die Araber dabei aufgehalten hätten rühmend zu verkündigen, wie mit so wenigen Zeichen so Unendliches geleistet werden könne. In der *Margaritha philosophica* heisst es z. B. einfach genug *„Numeratio est cuiuslibet numeri per figuras*

* Nach Berlet 1855, S. XIII (vgl. Anm. 9).

competentes artificiosa repraesentatio". Wohl aber war ein anderes Stück der alt überkommenen Betrachtungsweise zurückgeblieben, wie Bruchtheile des alten Bauwerkes im aufgeführten Neubau sich zeigend: so die erst gegen Ende des Jahrhunderts mehr zurücktretende Eintheilung* der Zahlen in *digiti, articuli* und *numeri compositi,* d. h. in Fingerzahlen oder Einer, in Gelenkzahlen oder Zehner und in (aus Zehnern und Einern) zusammengesetzte Zahlen; ebenso die den pythagoreischen Ansichten entstammende und nun oft genug wiederkehrende Behauptung, dass unter den Fingerzahlen „das eins kein zal ist Sund' ein Anefang Samen und Fundament aller zaln genant wirt auss welchn̄ Eym alle ander zale wachsn̄ flyessen und yren ursprungk haben."

Meist beginnen die Rechenbücher sofort mit der Angabe der zehn Zahlzeichen und deren Bedeutung. Die Gestalt dieser Zahlzeichen des 16. Jahrhunderts stimmt, da ja eben durch den Bücherdruck die einzelnen Zeichen fixirt wurden, der Hauptsache nach mit der unsrigen überein, und nur seltener findet man in Druckwerken für unser heutiges 4 die Gestalt eines unten offenen 8. Dass aber mehrfach die Gestalt der geschriebenen Ziffern von der der gedruckten abwich, zeigt sich z. B. deutlich genug in der schon mehrfach erwähnten *Margaritha philosophica,* wo die Ziffern meistens die Gestalt haben, die ich in meinem Programm** abbildete, wo aber die als durchstrichene verwendeten Ziffern der Handschrift des Schreibenden entsprechend scheinen eigens geschnitten worden zu sein, und unter diesen weichen besonders die 5 und 7 ab, welche bezüglich in der Gestalt ꝗ und ʌ erscheinen.

Ueber die Namen dieser zehn Zahlzeichen hatte sich aber ein völlig bestimmter Sprachgebrauch noch nicht ausgebildet. Wohl werden fast regelmässig die 9 ersten als *figurae significativae* der zehnten als der *figura non significativa* oder in deutschen Schriften die „bedeutlich figurn" der „zehend vnbedeutlich" gegenübergestellt, zuweilen auch schon in metrischer Einkleidung (Reichelstain):

Neun seind bedeutlich Ziffer zwar |
Die zehent deut nichts sonder gar
So ·0· einer fürgesetzt all frist
Bedeut zehen mehr wanns vor ist.

Aber die Zahlzeichen überhaupt werden von Vielen (Huswirt, Apian, La Roche), wie eben schon benützt, nur als *figurae (figurn; figures* im

---

* Ramus bezeichnet diese Eintheilung als *„puerilis et sine ullo fructu"* und meint weiter *„tantum uidetur conficta, ut esset materies confingendarum regularum et demonstrationum plane ineptarum" (Schol. math. 1569, p. 118).*

** S. oben S. 6, Anm.

Franz.) bezeichnet, seltener (Gemma) als *characteres* oder *elementa,* hie und da (Ramus) als *notae* oder (bei Cardanus) auch als *literae.* Der Name „Ziffer" wird in der Mehrzahl der Fälle noch einzig für das zehnte Zeichen 0 festgehalten,* jedoch lassen sich wie der Verfertiger der vorhin angeführten Verse so auch noch manche andere Verfasser von Rechenbüchern angeben, welche das Wort „Ziffer" schon in unserem heutigen Sinne gebrauchen (so Böschenstein, Riese, Menher), ja im Volksmunde ist vielleicht die letztere Bedeutung im Anfange des 16. Jahrhunderts schon die häufigere gewesen, wie wohl daraus zu schliessen ist, dass bei Huswirt zweimal und einmal auch bei Balth. Licht *cifris* statt des sonst von ihnen gewählten *figuris* mit unterläuft, und wie dann auch wohl aus der *Marg. philos.* hervorgeht, deren Verfasser zwar die 0 als *cifra* benennt, aber trotzdem an anderer Stelle *figuras numerorum* erwähnt, *„quas cifras vocant"* und auch von *denariis projectilibus* spricht *„quibus pro cifris utimur";* das Gleiche geht auch aus Köbel's Worten hervor, wenn er spricht von den „sunderlichen figuren die der gemain man Zyfer nendt", während er selbst gleich darauf diesen Namen nur für das zehnte Zeichen benützt. In der Mitte des Jahrhunderts war jedenfalls die Bedeutung jenes Wortes die allgemeinere, wie Ramus bezeugt (1569): *„cum tamen hodie omnes hae notae vulgo ciphrae nominentur et his notis numerare idem sit quod ciphrare."* Dass übrigens das zehnte Zeichen, gewöhnlich mit den Worten *„per se nihil significat"* eingeführt, auch andere Namen erhielt, geht schon aus den in der Note auf Seite 37 angeführten Citaten hervor; *„nulla* oder *zero"* nennt es schon Lucas** und sieben Jahre später äussert sich der Italiener Borgi *„la decima e chiamato zefiro ouero nulla"* und „Nulla" heisst es auch in Christoph Rudolff's Coss (1524) und Cardanus sagt vom Aufgehen einer Division, man komme *„ad nullitatem",* gebraucht sogar auch *„nulla"* und *„nullitas";* dass aber damals im Französischen der Name *„zero"* noch nicht unbedingt gebräuchlich war, beweisen La Roche und Menher, welche ihn

---

* Ich führe als Belege an z. B. Huswirt: *„decima uero theca, circulus, cifra siue figura nihili appellatur"* — Köbel: „... und ain Zyffer ... 0 das ist die zyfer" — *Margaritha philosophica: „0 quae figura nihili vel cifra dicitur"* — La Roche: *„0 est appellee chiffre ou nulle ou figure de nulle valeur"* — Vuolphius: *„decima cifra seu nulla nuncupatur"* — Regius: *„figuram nihili, circulum et a* סִפֵּר *fortassis zyphram nominant"* — Micyllus; *„cifra suo ac barbaro nomine appellatur"* — Scheubel: *„decima uero, Zifra et Nulla uel figura nihili nunc quidem appellata"* .. — Gemma: *„unum .... quod, ob receptam consuetudinem, cyphram appellabimus"* — Beausardus (1573): *„decima ... ab alliis figura nihili, a nonnullis circulus, a plerisque cifra appellatur".*

** Hiermit fällt auch die gegen Wildermuth gerichtete Bemerkung Kuckuck's (S. 7) dahin, dass Joh. Albrecht (1534) „bereits" dem 0 den Namen Nulla gebe, während Wildermuth sagt, diesen erst aus dem Jahre 1539 gefunden zu haben.

nicht anführen, sondern dafür „*nulle*" gebrauchen, selbst auch Ramus, welcher „*cum multis*" von „*circulus*" spricht, jedoch auch erwähnt, dass von Anderen bald *theca* oder *figura nihili*, bald *figura privationis* oder *figura nulla*, bald auch *ciphra* als Benennung gebraucht werde.

24. Was ferner das **Gesetz des Stellenwerthes** betrifft, so wird dieses seltener bestimmt und in scharfer Weise ausgesprochen, sondern meist an der Hand einiger Beispiele deutlich gemacht. Dass dabei aber das Fortschreiten im Ansteigen des Werthes von der Rechten zur Linken stattfindet, während bei der gewöhnlichen Schrift die Buchstaben sich in entgegengesetzter Weise zu Wörtern an einander reihen, war immerhin auffällig genug, wird natürlich stets ausdrücklich hervorgehoben und dabei nehmen dann Manche Anlass, ihre Kenntniss, gewöhnlich freilich mehr ihre Unkenntniss der Geschichte der „Arissmetrick", wie sie wohl auch heisst, zu verwerthen. So ganz war die Erinnerung an die Verdienste der Araber doch nicht geschwunden, dass ihrer nicht Erwähnung gethan würde, ja oft genug werden sie sogar als Erfinder der Kunst ausgegeben: so von Lucas, demzufolge *Abaco* durch Unkenntniss des Volkes aus *muodo arabico* entstanden ist; „*sinistrorsum agi solet more Arabum qui ipsius (artis) primi extiterunt inventores*" sagt Peurbach und wörtlich damit übereinstimmend auch Vuolphius (1534). Aber fast möchte es scheinen, als ob in demselben Maasse wie die Jahrzehnte des Jahrhunderts voranschritten, die Kenntniss des wahren Sachverhaltes zurücktrat: denn Regius meldet „*tradunt autores.... Arabes eo modo suas, ut Hebraeos suas depingere literas, unde gentis forsitan autoritate sumpta, is ordo hactenus obseruatur*", und wenn Gemma in Bezug auf die Chaldäer schon den Conjunktiv gebraucht „*eo quod haec ars a Chaldaeis ortum habere credatur*", so fügt der eine Commentator (Steinius) seines Buches dem „*a Chaldaeis*" noch bei „*vel ab Hebraeis*" und der andere (Peletarius), um ja den Leser in der Auswahl nicht zu beschränken: „*Alii tribuunt Phoenicibus*", welch letzteren auch Cardanus die Erfindung der Ziffern zuschreibt. Aber wenn auch damit das hohe Alter genugsam klargestellt war, so verlangte das halb Wunderbare der Kunst, das Fortschreiten von rechts nach links, immer noch seine Erklärung und, den späteren rationalistischen Theologen vergleichbar, bringt Apianus auch dieses fertig, indem er sich darauf beruft, „es sei ein natürliche beweglichkeit | von der rechten zu der lincken | dann so wir etwan ein ding anblicken zu beschawen | bewegen sich natürlich vnsere augn̄ von der rechten zu der lincken. Auch sehen wirs bei den ackerleuten auff dem feldt | das sie das korn vnd andern samen saen von der rechten zu der lincken | dergleichen geschicht auch alle beweglichkeit mit schlagen | hawen | vnd werffen von der rechten zu der lincken | darümb heiss ich das (die weil vns die einbildung der natur dahin neygen vnd ziehen ist) ein rechte

natürliche ordnung für sich | vnd nit hinder sich | darumb ist die kunst der rechnung . . . . ."

Wie in der Benennung der Ziffern, so herrschte auch ziemliche Verschiedenheit im Aussprechen der Ziffernverbindungen als Zahlen, obwohl schon von früh an die Möglichkeit geboten war zu einer einfacheren Sprechweise zu gelangen als sie nachher üblich gewesen ist. Denn Lucas schon führt nach der Unterscheidung der Zahlen *in digiti, articuli, compositi* alsbald an, dass man sie *„secondo li pratici vulgari"* auch nach *Numero, Dicina, Centinaro, Migliaro* abtheilen könne und dass man für die folgenden Stellen* diese Namen in Verbindung mit *Migliara* zu wiederholen habe, so dass dann die siebente Stelle *mille miglione* bedeute oder *„secondo el volgo el milione":* demgemäss spricht er auch 7452346587 aus als *Settimilia quatrocento cinquanta — doi milioni: trecento quarantasei migliara: cinquecento* u. s. w. Zur Erleichterung des Aussprechens solcher grösseren Zahlen schlägt Lucas vor, *„a modo deli arabi"* von rechts nach links abzuzählen bis „vier", unter die 4. Ziffer einen Punkt, von ihr aus wieder ebenso abzuzählen und unter die jetzt folgende 4. Ziffer zwei Punkte, dann ebenso und drei Punkte zu setzen u. s. f. Wenn er aber verlangt, stets solle ein *quaternario* zumal ausgesprochen werden, so bezieht sich das wohl nur auf Zahlen, die nicht mehr als 10 Stellen besitzen, wie die vorige; denn er wird wohl auch Zahlen von noch mehr Ziffern ausgesprochen haben wie sein Landsmann Borgi (1501), welcher die gleiche Punktabtheilung lehrt und dann angibt, dass man, stets drei Ziffern zusammennehmend, an denjenigen Stellen, wo eine gerade Anzahl von Punkten stehe, soviel mal *million* sagen solle, als Paare von Punkten vorhanden seien, und dass an denjenigen Stellen, wo eine ungerade Anzahl von Punkten sich finde, der richtigen Zusammenstellung von *million de million* noch *miar* vorgesetzt werden solle, so dass z. B. die 16. Stelle *numero de miar* und die 17. *dexena de miar de million de million* bedeute. In gleicher Weise kommt auch Cardanus (1537) auf die *„milliaria millium quae vulgo milliones appellantur",* benützt dann aber auch nur die stete Wiederholung, bemerkt jedoch, dass die Rechenlehrer je drei Stellen zusammenfassen als eine *„casula"*.

Leider hat sich diese verhältnissmässig kurze Ausdrucksweise der Italiener in Deutschland nicht eingebürgert. Denn nur bei Scheubel (1545) und Clavius finde ich Aehnliches: der erstere führt die Benützung der

* Ich führe hier an, dass sich bei Lucas zweimal (fol. 26r, Z. 13 v. u. und fol. 28r, Z. 10 v. ob.) gelegentlich das Wort *„differentie"* in der Bedeutung von „Stellen" findet. Ebenso in der *Marg. phil lib. IV, tract. II, cap. VI.* Vgl. Cantor's Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker. Halle 1863, S. 269 u. 274.

Wörter „Myriade“ und „Million“ durch Andere an*; Clavius aber, freilich erst gegen Ende des Jahrhunderts (1584), legt die nachher zu besprechende breitere Art dar, vergisst dann aber auch nicht zu erwähnen, dass, wenn man *„more Italorum ... Milliones“* wolle, dass dann jede Zahl „mit weniger Worten und vielleicht bezeichnender ausgesprochen werden könne; es empfehle sich dann, über die 1., 7., 13., ... Ziffer bezüglich 0., 1., 2., ... zu setzen und beim Aussprechen eine diesen Zahlen entsprechende Anzahl mal „Million“ einzufügen, ausserdem aber auch unter die 4., 10., 16., ... Ziffer je einen Punkt zu setzen, um das an dieser Stelle einzuschiebende „Tausend“ zu markiren.“ Sonst lehren die lateinisch geschriebenen Bücher meist (Huswirt, Stifel, Ramus, Micyllus), dass man über die 4., 7., 10., ... Stelle oder wohl auch (Beausardus), dass man rechts von der 4., 7., . . Stelle jeweils nur einen Punkt oder dass man (Gemma) hier jedesmal einen Vertikalstrich setzen solle; manche (Reisch) ersetzen auch die Punkte durch die Buchstaben a, b, c, welche sie, mit der ersten Ziffer rechts beginnend und dieselben stets wiederholend, der Reihe nach den sämmtlichen Ziffern überschreiben. Weitaus den Meisten ist aber das Wort „Million“ unbekannt und so halten sie sich an Peurbach's Regel: *„tot millenarios nominabimus quot sunt puncta inter eandem figuram et primam inclusive“* und lesen 96897000000000 als *„Nonagies sexies millies millies millena millia, octingenties nonagies septies millies millena millia“*, wobei bemerkt werden mag, dass Ramus, dem das letztere Beispiel entnommen ist, die Punkte nur bei der Einübung benützt zu sehen, bei den Rechnungsarten aber weggelassen wünscht. Und wenn sich auch von verschiedenen Seiten (Vuolphius, Regius) Widerspruch erhebt gegen jene Häufung der Wörter *millies millies*, so geschieht dies doch allein deshalb, weil jene Benennung durchaus unlateinisch sei, nur *„secundum crassam vulgi latinitatem“* könne sie gebraucht sein; mit Stellen aus Cicero und Plinius und Macrobius wird die Vorschrift belegt: *„Numeros ad centena millia referas, Hoc est omnium excedentium prolationem ad centena millia disponas“*, so dass 1000000 ja nicht *mille millia*, sondern *multo latinius* nur *decies centena*
a c b a c b a c b a
millia und 3525500160 nur als *„tricies quinquies millies ducenties quinquagies quinquies centena millia centum et sexaginta“* gelesen werden dürfe, so dass stets die Adverbialzahlen zu gebrauchen seien. Wozu dann freilich die trotzdem verwendeten Punkte oder Buchstaben a b c dienen sollten, ist nicht abzusehen, und der Widerspruch, welcher zwischen ihrer Bezeich-

* In der Ausgabe von 1545, S. 22 heisst es: *„Hanc commoditatem et vulgo nunc sequuntur, cum dolia auri, centum millia, et Milliones, decies centena millia appellant.“*

nung und ihrer Benennung liegt, scheint jenen Männern nicht aufgefallen zu sein.

Und die deutsch geschriebenen Bücher machen gar den Eindruck, als ob für das deutsche Volk in Bezug auf Aussprache nur das Schlechteste gut genug gewesen sei. Wie in den lateinischen Anweisungen galt auch hier die Regel: „sovil punct vorhanden so manches tausent nenne,“ wie Riese sagt, oder in anderem Gewande: „Alsdann sprich auss zu aller stundt So vil tausent als seind der punct.“ Aber jene Lateiner hielten doch noch meistens darauf, dass wenigstens immer eine Gruppe von drei Ziffern zusammen ausgesprochen werde; aber was soll man vom Fortschritte denken, wenn man wie bei Huswirt, so auch bei Köbel, der sogar selbst den Begriff der „Million“ definirt, $\dot{9}18\dot{6}35\dot{7}24\dot{3}$ z. B. liest als „Neun mal Tausant tausant tausant Hundert tausant tausant Sechsundachtzig tausand tausand Drey hundert tausant Sybenundfunfftzig tausant zweyhundert und dreyundfyrtzigk“, und wenn man sieht, dass die ganze Reihe deutscher Rechenmeister und Mathematiker nach ihm, wie Rudolff, Apianus, Riese, Albert, in gleich breiter und langweiliger Weise verfährt, stets die Hunderter für sich mit ihrem ganzen Tross von begleitenden „tusent tusent“ und davon getrennt die Zehner und Einer mit derselben Begleitung auszusprechen?

Es ist ordentlich wohlthuend, doch wenigstens in einigen Schriften und zwar in französischen unseren heutigen Gebrauch in eleganter Weise verwerthet zu sehen: so spricht La Roche (1520) ausdrücklich davon, dass, „*lon peut diuiser les figures de six en six: en commencant tousiours a dextre: et sus la premiere figure dune chescune sixiesme la premiere exceptee: lon peult metre ung petit point...*“ und dass dann alle Ziffern vom ersten bis zweiten Punkt als *millions,* die vom dritten bis vierten als *millions de millions de millions* u. s. w. zu bezeichnen seien; dass man aber auch den ersten Punkt *million,* den zweiten *billion,* den dritten, vierten...... *trillion, quadrillion, quillion, sixlion, septilion,...* bedeuten lassen könne, und demgemäss spricht er auch grössere Zahlen aus. Aber auch vor La Roche findet sich schon der Gebrauch von „Million“ in Frankreich, freilich zum Theil in etwas anderem Sinne. In einem Tractat über den Algorismus, welchen Sanchez im Jahre 1495 zu Paris erscheinen liess,* findet sich nämlich (fol. 𝔄. 4^{r}.), nachdem das Abtheilen in Gruppen von je drei Ziffern gelehrt ist, die weitere Erklärung: „...*prime tres figure non habent*

---

* *Tractatus Arithmetice Pratice qui dicitur Algorismus.* — Am Ende der 14 Folien starken und mit Figuren geschmückten Schrift heisst es: „*Arithmetice pratice seu Algorismi Tractatus a Petro sanchez Ciruelo nouiter compilatus explicit Impressus Parisius in campo gaillardo per Guidonem mercatoris. Anno domini. 1495. die. 22. Februarij.*

aliquam communem denominationem · sequentes vero tres habent mille pro communi denominatione · Item alie tres habent milies mille quod dicitur cuento pro communi denominatione · et rursum alie tres denominantur a millesies cuento et alie tres sequentes denominantur communiter a millon · alie tres a millesies millon ...," so dass darnach *cuento* = 1000000 und *millon* das bedeutet hätte, was wir heute „Billion" nennen.

Mit dem gewöhnlichen Gebrauche übereinstimmend ist dagegen, was der unbekannte Verfasser eines oben schon (in Art. 11) erwähnten, wohl unzweifelhaft französischen Schriftchens* anführt: „*... ne confusio fiat in nominando tam multas millenitates siue millenarias · vtile duximus primo quodammodo necessarium noua cadere numerorum tam magnorum vocabula · per quod scilicet talis confusio rescindatur. Vbi ergo millenitas bis occurrit | videlicet pro prima vice in* 7° *loco dicimus milio est · hoc est magna millenaria siue millenitas. Et a* 7° *primato usque ad suum 7 ..... iterum duplatur millenitas · pro illo ergo dicimus bimilio est · hoc est* 2^a *magna millenitas. Et a* 13° *loco sic primato usque ad suum .7. videlicet 19. ... trimilio ... tetramilio ... pentamilio ... Et sic usque in infinitum possunt assignari noua vocabula numerorum pro milionibus*".

Ob der hiermit gemachte Fortschritt in Frankreich alsbald Eingang gefunden und sich ausgebreitet habe, vermag ich nicht zu entscheiden, da es mir an dazu ausreichender Literatur fehlt; doch scheint sich die kürzere neben der längeren Sprechweise dauernd erhalten zu haben, da ich zwar die *milion de millions* und *mil milions de milions* in Forcadel's Commentar zu Gemma (1585) gebraucht finde, in einem dazu gehörigen von Tremblay verfassten Anhang aber auch die *Millions, Billions, ... Vingtilions* benützt sind mit dem Hinweis, dass sogar Megret in seiner französischen Grammatik in gleicher Weise verfahre und ihm Claude de Boissiere in seiner Arithmetik hierin und im Gebrauche der Triaden gefolgt sei. Die letzteren benützt im Vorzug vor den Deutschen auch Ramus (1569) und Stevin, in deren Werken aber „Million" sich nicht benützt findet.

Es sollte noch lange dauern, bis jene kurze übersichtliche Darstellung der Zahlen für das Ohr sich zur allein herrschenden gemacht hatte.

25. **Addition.** — Diese erste (oder zweite) Rechnungsart, „Zusammenthuung" bei den Deutschen, *adiouster* bei den Franzosen, *recogliere* oder *summare* oder *acozzare* bei den Italienern genannt, wird gewöhnlich wie alle Rechnungsarten durch eine Erklärung eingeleitet, wonach sie „*in unum numerum complureis redigit*" (Vuolphius) oder „Leret vil zalen in

* Der Anfang dieses 20 Folien starken Schriftchens lautet: „*De arte numerandi siue arismetice summa quadripartita incipit feliciter.*" Am Ende steht: „*De arte numerandi et arismetice perfectionis summa explicit feliciter.*"

ein summa pringen" (Rudolff, Riese). Die auftretenden Zahlen werden benannt als *Numerus cui debet fieri additio, Numerus addendus* und *Numerus collectus* oder auch *productus.* Es sollen stets die gleichnamigen Stellen, wie es einmal heisst, *„dyametraliter"* unter einander kommen und der Anfang der Ausrechnung sei rechts zu machen. Dass die aus einer Reihe erhaltene Theilsumme zerlegbar und weshalb eine Verwandlung in Einheiten höherer Ordnung möglich sei, wird nirgends erläutert; es wird die Thatsache einfach angeführt und *„le dicine sane"* — sagt Lucas — seien im Kopfe zu behalten, das Uebrige als *dicina rotta* (= gebrochener Zehner) oder *numero* hinzuschreiben. Statt der für Manche vielleicht schwierigen Gedächtnissarbeit schlägt Apianus als Auskunftsmittel vor: „soll er die finger der lincken handt nach derselbigen zal welche behalten sol werden legen vnd heben" und gibt dazu auch eine Abbildung der nöthigen Fingerstellung — freilich für die rechte Hand* gültig (vgl. oben Art. 10); zu gleichem Zwecke stellt es Ramus in das Belieben des Rechnenden, die einzelnen Theilsummen vollständig aufzuschreiben und diese dann wieder zu addiren, und Gemma gibt das Gleiche als Vorschrift für den Fall, dass eine dreizifferige Theilsumme erscheine. Die bereits benützten Ziffern werden fast überall durchgestrichen; der Verfasser der *Marg. philos.* verlangt ausdrücklich, dass ein Durchstreichen nicht statthaben solle, sondern dass die Ziffern *„virgulis paruis signandas esse"*.

26. Das **Subtrahiren** (Abzyhung, *soustraction, sotrare = abattere = cauare, subductio*) „leret wie man ein zal vō der andere nemē sol" (Rise) oder gar *„Subtractio numerum a numero subtrahit"* (Vuolphius) und benützt drei Zahlen, welche häufig ohne besondere Namen auftreten, sich aber auch als *Numerus a quo debet fieri subtractio (ex quo subducitur), Numerus subtrahendus (subducendus), Numerus relictus (relictum, residuum)* oder auch als *creditor, debitor, reliquus* bezeichnet finden. Stets wird unter die grössere die abzuziehende geschrieben; der Fall, wo dann die sämmtlichen Ziffern der letzteren kleiner als die bezüglichen der darüber stehenden sind, erledigt sich leicht. Für den entgegengesetzten Fall spricht schon Lucas von drei verschiedenen Arten, von welchen je nach der Uebung die eine oder andere rascher zum Ziele führe: entweder man zähle die untere Ziffer von 10 ab, füge zum Rest die obere zu, schreibe das Ergebniss *(numerum productum)* unter die Linie und zähle dann weiter die um 1 vergrösserte nächstfolgende untere Ziffer von ihrer zugehörigen oberen ab; oder man zähle die untere Ziffer von der um 10 vergrösserten oberen ab, schreibe das Ergebniss an und zähle weiter die nächstfolgende untere

---

* Dass dies nur ein Versehen des Zeichners sein kann, ergibt sich aus den Worten des Textes.

Ziffer von der um 1 verminderten zugehörigen oberen ab; oder man verfahre zunächst wieder wie eben, zähle dann aber in der zweiten Reihe die um 1 vergrösserte untere Ziffer von der entsprechenden oberen ab — und dann fügt er bei *„el nostro usitato (modo) ene el terzo";* Borgi und später Cardanus lehren nur diese dritte. Im Gegensatze hierzu findet sich in Deutschland diese dritte sehr selten (Böschensteyn), einigemale die zweite (Huswirt, Stifel); weitaus die gewöhnlichste, auch von Huswirt als ein *„subtrahere convenientius"* bezeichnet, ist die erste Methode, deren sich Widman, Reisch, Rudolff, Riese, Apian, Gemma, Micyllus, Albert, Beausardus, Scheubel und Clavius bedienen. Rudolff beschreibt sie mit den Worten: „magstu aber die vnder figur von der obern nicht nemen so zeuch sie ab von zehen zum bleybenden gib die ober so zu kleyn war setz das collect vnder die linien. Wie offt sich denn begibt sollichs abziehen von 10 so addir alleweg 1 zu der nehisten figur gegen der linken hand an der vndern zal"; und der schon wiederholt citirte Rechenmeister und Poet macht den köstlichen Reim:

> So du magst von der obern nit
> Ein ziffer subtrahirn mit sitt
> Von zehen solt sie ziehen ab
> Der nechst vnder addir eins knab.

Auffallend ist, dass Ramus die Subtraktion von links nach rechts durchführt, dabei stets vorausschauend, ob die rechts nachfolgende Ziffer des Subtrahenden nicht grösser ist als die zugehörige des Minuenden, dass er, wenn dies der Fall, sofort die richtige Restziffer schreibt und dass er den Rest über den Minuenden setzt, also z. B. $\begin{array}{r} 84 \\ 432 \\ 348 \end{array}$. Als Gründe seines Verfahrens gibt er an, dass dies „logischer, leichter und, was die Hauptsache, dem bei der Division einzuschlagenden angepasster" sei.

27. Für die **Multiplikation** („Manchfeldigen, Manigfaltigung") ist die Verschiedenheit der Durchführung weit grösser als für die beiden vorangehenden Rechnungsarten. Was zunächst die Erklärung derselben betrifft, so findet sich fast durchgängig eine solche an die Spitze gestellt, wie z. B. Köbel sagt: „Ein zale durch die Ander Manigfaltigen oder meren ist nichts anders dann ein fürgenomme tzale durch ein ander zale als offt zusammen meren hauffen vnd manigfaltigen als vielmal eins ist" oder Reisch: *„Est numeri procreatio proportionabiliter se habentis ad multiplicandum sicut multiplicans ad unitatem";* freilich findet sich wohl auch eine solche wie die von Albert: „Multiplicirn Vielfeltigen oder mehren lehret dich wie du eine zal mit der andern Multipliciren vielfeltigen oder mehren solt". Besondere Namen erhalten gewöhnlich nur die zur Aufgabe gegebenen

Zahlen, nämlich *Multiplicandus* und *Multiplicans* und auch diese nicht immer (Riese); sehr selten ist es, dass auch die resultirende Zahl schon einen Namen hat, wie z. B. bei Regius, der sie *Summa*, oder bei Lucas, der sie als *„multiplicatione* oder *multiplicamento* oder *producto* oder *la superficie di quelli doi“* bezeichnet, während er die beiden gegebenen *multiplicanti* oder *producenti* nennt; dagegen gebraucht am Ende des Jahrhunderts Stevin *„produict“* als Benennung.

Zur Durchführung der Multiplikation wird von Manchen die Kenntniss des Einmaleins empfohlen, von den Meisten aber wird als durchaus nothwendig verlangt, dass man es auswendig wissen müsse.* Häufig genug findet sich deshalb auch eine tabellarische Zusammenstellung des heutzutage sogenannten kleinen Einmaleins, in der Gesammtanordnung entweder von dreieckiger oder von quadratischer Gestalt, jene später (z. B. von Tremblay 1585) dem Gemma, diese dem Orontius Finaeus (1532) zugeschrieben, in Wirklichkeit aber beide früher schon vorkommend. So beide schon bei Widman („eyne taffel geformiret auff den triangel geczogen auss hebraischer zungen oder iudischer“ und „die taffel in quadrat“); am häufigsten als „Pythagoras Tisch oder Tafel“, *„Mensa* oder *Mensula Pythagorae“*, *„Pythagoreus multiplicationis abacus“*, einmal auch als *„petit liure de argorisme“* bezeichnet und in der That oft auf Abbildungen auch späterer Zeit geradezu dem Pythagoras als symbolisches Attribut zugetheilt, reicht jene Tabelle gewöhnlich bis $10 \cdot 10$, seltener bis $12 \cdot 12$ und solle, wie Gemma sagt, so lange benützt werden, *„donec usus te ab hac molestia liberauerit“*.

Um aber auch „das ein mal ein durch die Rechnung zu findē das du dis fürgesetzt täflin nit bedarfst“ (Apian), wird während des ganzen 16. Jahrhunderts — jedoch nicht bei Cardanus — in theilweise verschiedener Form ein höchst merkwürdiger Kunstgriff gelehrt, welcher später wieder aus den Rechenbüchern verschwand, eine Vorschrift, welche im Wesentlichen dazu bestimmt ist, das Product zweier zwischen 5 und 10 liegenden Zahlen aus den bekannten Producten zweier kleineren abzuleiten.

Diese schon bei Widmann sich findende Vorschrift lautet z. B. in Rudolff's Coss: „zwo figuren zu multipliciren setz sie vber einander vn neben sie setze die differentz so jede hat von 10. Multiplicir ein differentz mit der andere kompt ein figur so setze sie Kommen

$$\begin{array}{c} 8.2 \\ 7.3 \\ \hline 56 \end{array}$$

* So heisst es z. B. bei Huswirt: *„Quivis bene multiplicationem digitorum inter se sciat“* — Köbel: „Ee ich fürter ge | wil ich dich abermals | des Pitagorischen Tisch ermant haben | vff das ob du den nit vsswendig gelernt dz du es nach mit allem fleiss thust | dann on dz ein mal ein | wirt dir dz manigfaltigen nit behend noch gemein“ — La Roche: *„Item plus est necessaire de scauoir tout de cueur la multiplication dune chascune des 10 . figures par soy mesme et aussi par vne chascune des aultres“* — Reichelstain nach Widman: „Lerne mit fleiss

zwo so setz die erste behalt die ander Darnach addir deine figurn zusamen und so du im multiplicirn hast etwas behalten so addir es auch hie her. Die 10 so erwachsen mustu hie lassen faren".

Um dies in die Zeichen der neueren Buchstabenrechnung zu übertragen, seien a und b die beiden zu multiplicirenden Zahlen, jede zwischen 5 und 10 liegend, dann soll man das Product der Differenzen $(10-a)$ und $(10-b)$ bilden und dazu als Zehner die um 10 verminderte Summe von a und b addiren. In der That es ist:

$$a \cdot b = (10 - a)(10 - b) + 10 . (a + b - 10).$$

Eine hiervon etwas verschiedene Regel lehrt z. B. auch Reisch (und Ramus, letzterer freilich nur um dagegen zu polemisiren), indem er wie Rudolff die Ergänzungen zu 10 multiplicirt, dann aber in die Zehnerstelle die Differenz zwischen der einen gegebenen Zahl und der Ergänzung der anderen einsetzt — nach der ebenfalls richtigen Formel:

$$a \cdot b = (10 - a)(10 - b) + 10 . \left[a - (10 - b)\right].$$

Wieder in anderer Weise verfahren schon Widman und Peurbach, welch letzterer eine Regel *(„regulam illam antiquam")* mittheilt, wornach man die mit der kleineren Fingerzahl *(digitus)* gleichnamige Gelenkzahl *(articulus)* bilden und von ihr das abziehen solle, was sich ergibt, wenn man die kleinere Fingerzahl mit der der grösseren bis zu 10 fehlenden Ergänzung multiplicirt; und es ist dieselbe Regel, wenn Riese, welcher übrigens auch die erste Art vorträgt, befiehlt: „Setz für die kleyner ein 0. Als 7. mal 8. also 70 vnnd nim daruon das kompt aus der kleynern gemultiplicirt mitt übrigen | so die grösser von 10. genommen würdt | als hierinn sprich 7. mal 2. sind 14. die nim von 70. so bleiben 56".

$$\begin{array}{r} 7.0 \\ 8.2 \\ \hline 56 \end{array}$$

Dass diese Vorschrift richtig, beweist die Identität:

$$a \cdot b = 10 . a - a \cdot (10 - b).$$

Wie diese drei, so wurden wohl, um die Multiplikation auf nur eine solche mit Zahlen zwischen 1 und 5 zurückzuführen, auch noch andere Gestaltungen der Regel benützt; wenigstens lässt sich darauf schliessen aus den Worten des Ramus, wornach ein vor ihm lebender Schrift-

---

das ein mal ein | So wirt dir alle rechnung gemeyn" — Riese: „du must vor allen dingen | dz eyn mal eins wol wissen" — Gemma: *„il sera bon deuant toutes choses, d'enseigner la multiplication des nombres simples"* — Clavius: *„necesse est nosse, qui numerus producatur ex ductu siue multiplicatione cuiuslibet figurae numericae in quamius aliam figuram"* u. s. w.

steller *„in tali multiplicatione digitorum ... septem theoremata prolixa consumpsit.“* *

Es könnte als thöricht erscheinen, dass Apian die vorletzte Regel auch auf den Fall anwendet, wo jeder der zwei Factoren kleiner als 5 ist, dass er also z. B. 3 . 4 mit Hülfe von 6 . 7 rechnet; indessen thut er dies nur, weil „es möcht dir sunst ein mal ein irthum darauss entstehen“, und indem er zur Auflösung sagt: „Sprich 6 . mal 7 . ist 42 . setz 2 . die 40 . behalt im sinn | 6 . von 3 . magst du nit. Darumb subtrahir 3 . von 6 . bleibt 3 . die subtrahir von 40 . bleibt 10 . setz vnder 3 . facit 12“, so bewegt er sich hiermit, seiner Zeit vorauseilend, wenn auch nicht in der Theorie, so doch in der Praxis der negativen Grössen und setzt sich so in Gegensatz zu Regius, der, soweit ich finde, allein noch über diesen Fall sich auslässt, jedoch in schulmässiger Weise erklärt: *„Regula te fallet, nisi duo digiti simul iuncti plus decem efficiant“*.

Noch will ich anführen, dass Ramus die Multiplikation einfacher Zahlen gelegentlich auf Multiplikation durch Theile zurückzuführen vorschlägt, also z. B. 8 . 9 der heutigen Aufgabe $(3+5)\ (2+7)$ entsprechend in nebenstehender Form ausrechnet, und dass sich bei einem Schriftsteller (Widman) eine der angegebenen ähnliche Vorschrift auch für die Multiplikation zweier zweizifferigen Zahlen findet, von welchen jede kleiner als 20 ist, jedoch ist diese Vorschrift nur ein specieller Fall des sofort zu besprechenden Multiplicirens *per crocetta*.

$$\begin{array}{cc} 2 & 7 \\ 3 & 5 \\ \hline 3 & 5 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ & 6 \\ \hline 7 & 2 \end{array}$$

28. Die Multiplikation mehrzifferiger Zahlen wird am Anfange des Zeitabschnittes, dessen Rechnen hier zur Darstellung kommt, in höchst verschiedener Weise durchgeführt. So zeigt Lucas nicht weniger als acht solcher Methoden, welche aus dem Anblicke der hier beigefügten Beispiele aus der *„Summa“* (Fol. 27—30) sofort verständlich sind.

---

* Merkwürdig ist nun, und es wurde dies oben (S. 23) schon einmal gelegentlich erwähnt, dass heutzutage noch in der Wallachei in ähnlicher Weise und zwar mit Hülfe der Finger eine solche Multiplikation durchgeführt wird. Dr. Pick berichtet nämlich (Zeitschr. für math. u. naturw. Unterricht, 5. Jahrg. [1874], p. 57) wie folgt: „Man gibt den Fingern beider Hände der Reihe nach die Werthe 6, 7, 8, 9, 10, also dem Daumen 6, Zeigefinger 7 u. s. w. Hat man nun zwei dieser Zahlen, z. B. 8×9, zu multipliciren, so legt man die betreffenden Finger, hier Mittelfinger der einen und Goldfinger der anderen Hand, an einander und multiplicirt die Anzahl der übrig bleibenden Finger der einen, hier 2, mit der der anderen, hier 1, also $2 \times 1 = 2$. Zu diesem Producte gibt man so viel Zehner zu, als Finger an beiden Händen zu dieser Multiplikation nicht benützt worden sind (inclus. der zusammengesetzten), also $3 + 4 = 7$ Zehner. Somit ist das Product 72.“

a) *Modo d' Multiplicare per bericocoli* oder *scachieri,* so genannt wegen der dem Schema zukommenden Aehnlichkeit mit einem *bericuocoli o confortini* genannten Zuckerbackwerk.

b) *Modo ditto a castellucio:* beginnt mit der Multiplikation durch die höchsten Stellen.

a)

				9	8	7	6
				6	7	8	9
			8	8	8	8	4
		7	9	0	0	8	
	6	7	1	3	2		
5	9	2	5	6			
6	7	0	4	8	1	6	4

b)

```
9876
6789
 61101000
  5431200
   476230
    40734
 67048164
```

c) *Multiplicare a colonna* oder *per tavoletta:* werde meist gebraucht, wenn die eine Zahl klein und die andere gross ist und es empfehle sich hierzu, „die Büchlein auswendig zu wissen, wie dies bei den Florentinern der Fall, welche dieselben von der Jugend auf lernen und deshalb alle Anderen übertreffen“.

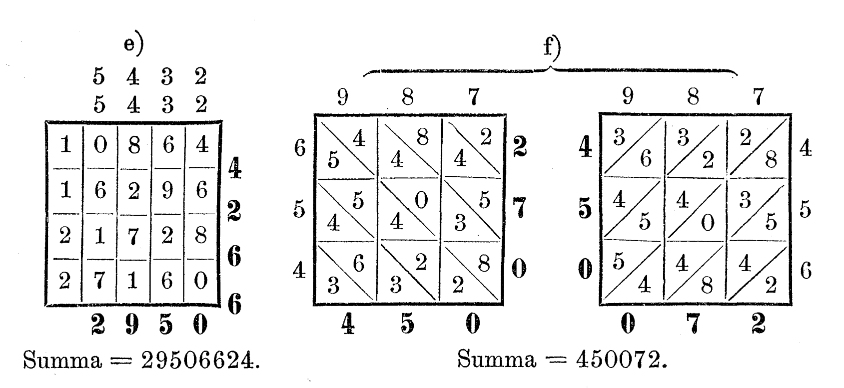
```
 4685      13 . 5 =  65, 5 angeschrieben, 6 im Sinne;
   13      13 . 8 = 104 u. s. w.
60905
```

d) *Multiplicare per crocetta* oder *per casella:* diese, wie Lucas sagt, „etwas mehr Phantasie und Verstand“ verlangende Methode beginnt mit den Einern und fährt weiter, indem jeweils sämmtliche Einzelmultipli-

3 7	4 5 6	4 5 6 7	9 8 7 6
3 7	4 5 6	4 5 6 7	0 0 7 8
1369	207936	20857489	770328

kationen durchgeführt werden, welche Zehner, Hunderter etc. zu liefern vermögen, wie dies durch die zwischen den Zahlen eingefügten Verbindungsstriche ersichtlich ist; dass Multiplikationen von Zahlen mit verschiedener Ziffernanzahl nach Beifügung der nöthigen Anzahl von Nullen am linken Ende der einen Zahl in gleicher Weise durchgeführt werden, zeigt das letzte Beispiel.

e) *Multiplicare per quadrilatero:* hier bilde man unterhalb der zu multiplicirenden Zahlen eine aus quadratischen Feldern bestehende Figur und zwar ebensoviele Reihen unter einander als die Anzahl der Ziffern der grösseren Zahl beträgt; die schliessliche Addition in diagonaler Richtung liefert das Produkt.



f) *Multiplicare gelosia* oder *per graticola**, d. h. Multiplikation nach Art eines Gitterfensters.

g) *Multiplicare per repiego:* kommt darauf hinaus, die eine der zu multiplicirenden Zahlen wenn möglich als Product anderer *(repiego)* aufzufassen und dann der Reihe nach mit den einzelnen Factoren (selbst *repieghi* genannt) zu multipliciren. Es sei zweckmässig, meint hierzu Lucas, Factorentafeln zu besitzen und die solche benützenden Florentiner (vgl. unter c) seien deshalb auch besonders geschickt in diesem Multipliciren, jedoch sei es noch besser, möglichst viele der Zerlegungen auswendig zu wissen.

h) *Multiplicare a scapezzo:* dies zerlegt die eine Zahl nicht in Factoren, sondern in Summanden und multiplicirt mit den einzelnen die andere Zahl, um schliesslich die Summe der Theilproducte zu bilden. Dass mit dieser Methode die später in Deutschland berühmte „Wälsche Praktik" zusammenfällt, werden wir unten sehen.

29. Ich sagte vorhin, dass zu Anfang des 16. Jahrhunderts wenigstens in Italien verschiedene Multiplikationsmethoden in Uebung waren, und die soeben vollendete Aufzählung beweist dies schon, wie nicht minder die bei Lucas und bei Borgi sich findende Behauptung, dass es „noch viele andere Methoden" gebe, welche, wie der Letztere sagt, schon die Alten gebraucht haben und von denen er die schönsten und leichtesten auswähle, nämlich die obige a), c), d). Dass aber im weiteren Verlaufe des genannten Jahrhunderts die Manchfaltigkeit der Methoden allmählig einer grösseren Einförmigkeit Platz machte, ist ebenso gewiss: ein Blick in die Bücher der unbedeutenderen Meister ebenso wie in die eines Riese, Apian, Gemma, Cardanus, Stifel, Clavius, Stevin u. A. zeigt sofort, dass es nur die von Lucas an erster Stelle gelehrte Methode (a) war, welche sich ausbreitete,

* Dies ist die sog. netzförmige indische Methode, welche die Araber unter dem Namen Shabacah kennen. Vgl. diese Zeitschrift [v. J. 1857], Bd. II, S. 360.

die einzige auch, welche sich in die folgenden Jahrhunderte und bis heute erhalten hat. Nur selten findet sich noch die eine oder andere der übrigen Methoden angewendet: so die vier ersten a—d) bei La Roche in derselben Reihenfolge wie bei Lucas und ebenfalls unter Hervorhebung, dass zur Durchführung von c) selbstverständlich die Kenntniss des grossen Einmaleins *(„le grant liuret")* nöthig sei; Cardanus erwähnt nur als „von Einigen geübt" die obige Methode b). Auch Apianus befriedigt sich nicht mit der Erklärung der einen gewöhnlichen Methode a), sondern gibt deren mehrere: so dieselbe a) jedoch mit der höchsten Stelle anfangend, als „eine andere art per modum Rhomboides"; so die Methode b) mit der Beifügung: „merck wie die Walhen jre product der multiplication pflegen zu setzen"; so als „eine andere Welsche art" abermals die Methode a) mit geänderter Anordnung der Ziffern, welche aus dem hier rechts stehenden Beispiele erkannt werden möge; so wiederum „eine andere art in Form einer gale", welche ich an demselben Beispiele wie eben mit Apian's Worten erläutern will: „Multiplicir zum ersten 2. mit 4. facit 8. die setz vber 2. darnach sprich 4. mal 3. ist 12. setz die 2. vber 3. 1. Addir zu 8. wirt 9. lesch 8. ab mit einem strichlin setz einen 9. darüber darnach sprich 4. mal 9 ist 36. setz 6. vber 9. vnd die 3. Addir zu 2. facit 5. delir 2. setz 5. darüber. darnach multiplicir 5. auch mit 4. sprich 4. mal 5. ist 20. setz 0. vber die 4. 2. Addir zu 6. delir 6. setz 8. darüber darnach ruck den Multiplikanten vmb ein statt fürbass 5. vnder 8. 9. vnder 4. etc. Vnd machs wie du yetzunder gethan hast". — Diese Art findet sich auch bei Micyllus, der sie als *„quaedam uetus multiplicandi ratio"* bezeichnet.

```
 4876
 2395
-------
9752840
 146288
  4383
   24
--------
11678020
```

```
      8
     77
     650
     539
    6374
    49662
  1112239
   9580050
   8264876
   2395555
    23999
     233
      2
-----------
  11678020
```

Und in der durch die nebenstehende Rechnung versinnlichten Weise gibt Apian auch die von Lucas als *per gelosia* aufgeführte Methode, übrigens, wie er sagt, „nit von nütz oder von kurtz wegen ..... sunder allein von wegen der fürwitzigen schüler das sie damit jre köpff spitzen".

	9	8	7
6	5 \ 4	4 \ 8	4 \ 2
5	4 \ 5	4 \ 0	3 \ 5
4	3 \ 6	3 \ 2	2 \ 8

4 5 0 0 7 2

Nur zweimal noch habe ich diese den Zusammenhang unseres Rechnens mit dem arabischen und indischen deutlich erweisende Methode gefunden: bei Regius, der sie als einen *„modus elegans"* behandelt und bei Ramus

in dessen *Scholis* (nicht aber in den zwei und nicht in den drei Büchern Arithmetik), wo sie als „in Kaufmannsbüchern sich findend" erwähnt wird. In der weiteren Entwickelung sind, wie schon gesagt, diese und die übrigen Methoden zurückgetreten und verschwunden: es erhielt sich nur die eine, deren wir uns heute bedienen. Doch „wil ich hye dyn rymen ynzyhen vnd das schyff an staden gen lasen vn̄ fürter zu der Diuision vnd Teilung der zalen eylen".

30. **Division.** — Wie in den Zeiten der Abacisten erfreute sich auch in den auf sie folgenden Jahrhunderten das Multipliciren, aber weit mehr noch das Dividiren des zweifelhaften Ruhmes, dem Lernenden ungemeine Schwierigkeiten zu machen: *„dura cosa e la partita"* war ein italienisches Sprüchwort des 15. Jahrhunderts. Als Ersatz für die Mühe wurde dann aber auch der Lohn dafür in Aussicht gestellt: „wenn Einer gut zu theilen weiss, sind ihm alle andern Theile wie Nichts, weil sie in jener Rechnungsart enthalten sind" (Lucas).

Gewöhnlich beginnt auch eine Erklärung die Darlegung des Dividirens. „Lernt ein zal in die andere theylen" definirt Riese mehr kurz als gut; am häufigsten liest man eine im Wesentlichen mit der folgenden übereinstimmende: *„Diuisio est inuentio numeri totics continentis unitatem, quoties numerus diuidendus continet diuidentem seu diuisorem"*. Wie hierin, so werden überhaupt damals meistens die heute üblichen Benennungen schon gebraucht; ein Unterschied liegt hauptsächlich in der damals üblichen Redeweise „Dividiren in" mit nachfolgendem Divisor, obwohl sich dann und wann wohl auch schon im gleichen Sinne: „Dividiren durch" verwendet findet.

In Bezug auf die wirkliche Durchführung der Division zeigen sich höchstens bei den Italienern und dem von ihnen unmittelbar abhängenden La Roche verschiedenartige Anordnungen. So unterscheiden Lucas und auch Borgi das Dividiren durch kleinere ein- oder zweistellige Divisoren, wobei die Reste jeweils im Kopfe behalten werden, als ein Dividiren *a regolo (= a tavoletta = a la deritta = per colonna);* so erklärt Lucas als ein besonderes das Dividiren durch *„repiego"*, d. h. dem gleichnamigen Multipliciren entsprechend ein stufenweises Dividiren durch die Factoren des Divisors; so rechnet auch La Roche (und vor ihm schon Sanchez), um 7985643 durch 1789 zu dividiren, nach nebenstehendem Schema in einer ungewöhnlichen Weise, indem er den Divisor in einem kleinen Abstand vom Dividenden schreibt, dazwischen innerhalb zweier Querstriche den Quotienten setzt, dann stets von rechts gegen links die Ziffern des Divisors mit der einzelnen Ziffer des Quotienten multiplicirt und dabei spricht: 7 durch $1 = 4$ mal; $4 \cdot 9 = 36$, von $40 = 4$, dazu

```
    1
    6
  1143
  829736
 7985643
 -------
 4463
 -------
    1789
```

5 = 9, geschrieben über 5, behalte 4. Dann 4 · 8 = 32, und 4 = 36, 6 von 8 = 2, behalte 3; 4 · 7 = 28, und 3 = 31; 1 von 9 = 8, behalte 3 u. s. w. Oder auch es rechnet La Roche dasselbe Beispiel in anderer Weise, die einzelnen Ziffern des Divisors 1789 von links nach rechts jeweils mit der gerade gefundenen Quotientenziffer multiplicirend und stets sogleich die Theilprodukte subtrahirend.

```
     1
     3
    16
    573
   1126
   44473
  182726
  3169006
  7985643
  -------
  4463
  -------
     1789
```

31. Doch alle diese verschiedenen Arten, die Division durchzuführen, haben sich vielleicht in Italien, kaum in Frankreich, jedenfalls nicht in Deutschland eingebürgert, und wo sie etwa auch in Uebung waren, sind sie verschwunden: wie beim Multipliciren wurden alle verdrängt durch eine einzige, welche geradezu als die charakteristische Divisionsmethode des 16. Jahrhunderts bezeichnet werden darf.

Auch sie findet sich schon bei Lucas, der sie das schnellste, sicherste und am wenigsten täuschende Verfahren nennt und als *galea* oder *batello* bezeichnet, weil die nach Beendigung der Rechnung sich ergebende Ziffernanordnung eine Gesammtfigur bilde, welche einem Schiffe mit seinem Kiel und Steuer und Mast und Segel ähnlich sei. In wie weit diese Aehnlichkeit vorhanden, mag man ersehen aus dem folgenden Beispiele der Division von 97535399 durch 9876, bei welchem

```
                                   8
               09                 097
16             163                1630
97535399|9     97535399|9         97535399|9
 9876   |       9876   |           9876   |

                  0                 00
                 15                 150
                 76                 765
                0929               08290
                1454               14544
 86             86162              861022
0975           097556             0975565
16301          1630157            16301573
97535399|9     97535399|9876      97535399|9876
  9876  |       9876666|-----      9876666|-----
                 98777              98777
                  988                988
                   9                  9
```

der ganze Rechnungsverlauf für die einzelnen Stationen der Entwickelung getrennt dargestellt ist. Das Angenehme mit dem Nützlichen zu verbinden, füge ich auch den auf dieses Verfahren bezüglichen

poetischen Beibericht unseres früher schon citirten Rechenmeisters Reichelstain hinzu:

Die erst Regel.

Setz vnder die theylent zal fein
Den theyler gen der lincken dein.

Die ander Regel.

Wenn der theyler vil ziffer hat |
So nim die erst als hoch sie stat |
Das die andern auch nemen künst |
Vnd im abtheyln kein falsch gewünst.

Die dritt Regel.

Im abtheyln | nim den Quotient
Mehr damit den theyler behend |
Darnach zeuchs von der öbern zal
Die ziffer solt auch leschen all |
Vnd solt den theyler über 9
Nit nemen | merck gar eben fein |
Dann ruck jn fürbass vmb ein stat
Wie dich dein meister geleeret hat.

Es ist wohl unzweifelhaft, dass die im Vorstehenden besprochene eigenthümliche Methode der Division von Italien aus sich ausgebreitet hat: wie bei Lucas, so findet sie sich auch bei Borgi, bei La Roche (als *„partir par galee ou par anteriorer“)*, bei Cardanus, bei Menher und bei sämmtlichen deutschen Arithmetikern, von Widman an bis Clavius, findet sich sogar nur die eine. Ramus zeigt, wie man zuerst alle Vielfachen des Divisors bis zum Neunfachen aufschreiben könne, um sofort die Theilziffer des Quotienten zu wissen; aber er erklärt dies selbst als zu langwierig. Es macht wenig Unterschied, ist aber immerhin erwähnenswerth, dass Einzelne (wie La Roche, Cardanus) schon nicht mehr die aus der Einzelziffer des Quotienten und den einzelnen Ziffern des Divisors sich ergebenden Theilproducte von links nach rechts bilden, sondern in umgekehrter Richtung, so dass bei dieser im letzten Rechnungsbeispiel statt der allmähligen Entwickelung bis zur vierten Form an deren Stelle sofort die folgende auftritt:

$$\begin{array}{l} 8651 \\ \not9\not7\not5\not3\not5399\ (9 \\ \not9\not8\not7\not6 \end{array}$$

Es ist aber für die Art der Ausbreitung gewiss bezeichnend, wenn Apianus zwar nicht diese Divisionsmethode selbst, aber doch unter den verschiedenen aus Wälschland stammenden Multiplikationsweisen gerade die mit unserer Divisionsmethode die gleiche schliessliche Ziffernanordnung gebende als die der „gale“ bezeichnet*.

Veränderungen hat jene Methode auf ihrer Wanderung unter den Völkern wenige erfahren: höchstens dass Riese in den späteren Auflagen seines kleineren Buches (noch nicht in der v. J. 1533) und auch Regius

* Besonderer Erwähnung werth scheint es zu sein, dass das Wort *„secundare“*, welches schon bei den Abacisten für das Fortrücken einer Zahl um eine Stelle gebraucht wurde, sich so lange erhielt, dass es Reisch z. B. ebenfalls noch in gleichem Sinne gebraucht. (Vgl. des La Roche *„partir par anteriorer“* oben im Text.)

und Beausardus es für wünschenswerth erachteten, die bei der Multiplikation einer Quotientenziffer mit den einzelnen Ziffern des ganzen Divisors sich ergebenden Theilprodukte aufzuschreiben, um dann von links nach rechts hin die Subtraktion durchzuführen. Als Beispiel dieser geänderten Anordnung wähle ich das vorige mit Kürzung um zwei Ziffern (975353 : 9876), indem ich dabei ebenfalls die ganze Rechnung in drei Theilen durchführe:

```
                                       7
                                      85
                                     1460
  86              86                 8611
  975             975                9755
 16301           16301              163015
 975353 (9       975353 (98         975353 (98 7505/9876
  9876            98766              98766
 81234           81234              812348
  765             7657               7657
                   98                7986
                                      244
                                      65
```

Apianus rechnet „practice“ in ähnlicher Weise, schreibt jedoch nicht die einzelnen Theilproducte, sondern die aus jeder Quotientenziffer sich ergebenden vollen Producte.

Wohl lehrten die Männer, welche hier von links nach rechts subtrahirten, in besonderem Capitel dasselbe Geschäft des Subtrahirens in einfacherer Weise, d. h. in entgegengesetzter Richtung — aber was vermag nicht die Macht der Gewohnheit! Wohl machte auch Clavius darauf aufmerksam, dass man das Schreiben mancher Ziffer erspare, wenn man von rechts nach links multiplicire — und doch wie spät erst kam dies zur Geltung!

32. Gerechtes Erstaunen überkommt uns heute ob dieser ganzen im vorigen Artikel behandelten Rechenweise und wir meinen uns nicht genug wundern zu können, dass man sie überhaupt so erfand, dass man nicht während des 16. Jahrhunderts blos, sondern auch während der zwei folgenden und selbst bis in unser Jahrhundert herein stets so viele Ziffern über einander häufte, um kaum fertig mit deren Niederschrift sie immer und immer wieder durchzustreichen. Aber auch hier gilt der Frau v. Staël Wort *„comprendre tout c'est pardonner tout“*: jenes Rechnen muss man als Ergebniss einer geschichtlichen Entwickelung begreifen, um ihm gerecht zu werden. Die Inder führten ihre Rechnungsoperationen auf einer meist weiss angestrichenen Tafel durch, welche mit Sand oder mit einem roth gefärbten Mehle bedeckt wurde, und bedienten sich zum Schreiben der Ziffern eines hölzernen Griffels, durch den sie den Sand oder das Mehl bei Seite schoben, so dass auf dem weissen Grunde die Zahlzeichen sicht-

bar wurden; war eines derselben durch den Verlauf der Rechnung unnöthig geworden, so bewirkte eine sanfte Berührung des Sandes mit dem Finger eine Ausbreitung des ersteren, die vorhandene Ziffer verschwand und an ihre Stelle konnte sofort die neue geschrieben werden. Es mussten so alle Zwischenstufen der Rechnung verschwinden und zum Schlusse fand sich nur das letzte Resultat auf der Tafel. In gleicher Weise verfuhren auch die Araber, und dass der ihre Rechenweise am meisten im christlichen Europa ausbreitende Leonardo sich eben solcher Mittel bediente, bezeugt er selbst. Unter solchen Voraussetzungen erscheint das stete Ersetzen einer Ziffer durch eine andere als rasch fördernd und natürlich; sobald aber solches Rechnen auf Papier mit Dinte ausgeführt wird, müssen alle Zwischenrechnungen und die dazu nöthigen Ziffern erhalten bleiben, jede fertige Rechnung erscheint als eine wunderliche Anhäufung durchstrichener Ziffern — natürlich: die Methode hat den Boden verlassen, auf dem sie erwachsen, sie zeigt sich unförmlich und starr und scheint uns Nachgebornen eine unnatürliche Missbildung zu sein.

33. Bevor ich zu einem neuen Abschnitt meiner Darstellung übergehe, will ich doch nicht unterlassen, auf eine eigenthümliche und schon völlig den Charakter der neuen Zeit verrathende Methode der Division aufmerksam zu machen, die ich bis jetzt nur bei Apianus gefunden habe, eine Methode, welche in gewissem Sinne von den Decimalbrüchen Anwendung macht.

Anstatt nämlich, falls etwa die Division durch 48 verlangt ist, wirklich durch 48 zu dividiren, dividirt Apian, wo jenes nicht bequem ist, durch die Hälfte oder durch ein Viertel, ein Achtel, ein Sechzehntel u. s. w. von 48, schreibt dafür aber auch in den Quotienten nicht die Einheit als Theilquotienten, sondern bezüglich die Hälfte, das Viertel, Achtel u. s. w. der Einheit. Ein Beispiel möge dies deutlich machen. Es sei 11664 „in 48 zu teylen“, wie man damals meist sagte oder „durch 48“, wie wir heute sagen. Apian stellt sich nun hierzu die Liste auf:

Der Teyler	48	und dem entsprechend:	Der Teyler setzt	1
Eyn Halbs	24		Der halbe teyl setzt	05
Eyn Virtel	12		Der vierteyl setzt	025
Eyn Achtel	6		Das achteyl setzt	0125
Eyn Sechzehētheyl	3		Das sechtzehēt teyl	00652

wo wir in der letzten Reihe nur je nach dem ersten 0 ein Komma zu schreiben hätten, um unsere Form der Decimalbrüche zu erhalten. Nun ist 48 in 11 (der Zahl 11664) nicht enthalten, auch 24 und 12 nicht, wohl aber 6, und zwar ist 6 in 11 einmal oder, was dasselbe, 48 in 11 ist $1/8$ mal = 0,125 mal enthalten oder, wie Apian schreibt, 0125. Es

wird hiernach seine Anleitung verständlich sein, welche lautet: „Heb an bey der lincken handt | vnd schaw welchen teyl des teylers du haben magst | als 6 hastu in 11 | bleibt 5 | die setz darüber vnd setzs vnder den finger (Versthe | da du die 6 genommē hast) Ein Achteyl | das ist 0125. Darnach bleib mit dem finger an der selbigen statt | vnd nym den sechtzehenteyl des teylers | das ist 3 | von 5 | bleiben 2 | die setz darüber | vnd setz den Sechtzehenden teyl als 00625 | von dem finger gegen der rechten. Nach dem hastu 26 | so du vmb ein stat weiter gehest | darinne magstu 24. (das ist der halbe teyler) haben | darumb setz zu dem finger 05 . . . Ruck weiter etc.“.

```
     2
   5̸22
  11664
 ----------
  0125|
  0062|5
   05 |
    05|
     0|5
 ----------
 Facit 243
```

Aehnlich auch: „Diuidirt ein ander Exempel auff yetz berürte art | alss 81648 in 144.

```
          11
         928
       81648
        0562|5         144 d'teyler
          02|5          72 halbtheyl
          01|25         36 viertheyl
          00|625        18 achtheyl
           0|125         9 sechzehentheyl
 ---------------
  Facit 567|000
```

Apian fügt noch die Bemerkung bei: „Bleibet bei der rechten handt 5. vber dem strichlin | so bedeuttet es ein halbes | bleibt 25. so bedeuts $\frac{1}{4}$ | 125. bedeut $\frac{1}{8}$ | 625 $\frac{1}{16}$“.

34. **Proben.** — „Eyn ygklich wercke ist zweifelhafft vnd onuolkommē geacht ee es zu end volnpracht | vn̄ genugsam probirt vn̄ bewert wordē ist“. So giebt Köbel den von den Meisten nicht ausdrücklich erwähnten Grund an, weshalb stets zu „Probiren | ob du dein Rechnung wol vnd recht volnpracht | oder ob du geirt habst | vff das du dein Irrung bald fürkommen vnd allen zweyfel abwenden mögst“; denn „Dye Prob ist ein zweyfel gewyss machen“.

In der That aber ist das Anstellen der Probe wohl auch aus dem in Art. 32 besprochenen Umstande zu erklären, dass bei dem unter Indern und Arabern gebräuchlichen Rechenverfahren sämmtliche Zwischenresultate verschwanden, so dass eine Bewahrheitung des Schlussergebnisses auf anderem Wege als dem nochmaliger Durchrechnung als wünschenswerth erscheinen musste. Wie deshalb schon die arabischen Arithmetiker häufig den Rechnungen die Probe auf ihre Richtigkeit zufügten, so hat sich dieser Gebrauch erhalten und fehlt wohl in keinem einzigen Lehrbuche

der Arithmetik des 16. Jahrhunderts; fast immer folgt sie sofort der betreffenden Rechnungsart, meist auch der Lehre von den Progressionen, unmittelbar nach. Des bequemeren Ueberblickes wegen fasse ich hier Alles zusammen, was über die Proben der oben abgehandelten Rechnungsarten zu bemerken ist, indem ich die der übrigen Capitel auf die Behandlung dieser letzteren selbst verschiebe.

Im Allgemeinen werden, wenn man von der einfachen Wiederholung der durchgeführten Rechnung absieht, drei verschiedene Arten angewandt, die Richtigkeit eines erzielten Rechnungsresultates zu prüfen: erstens die nochmalige, jedoch nach anderer Methode als vorher stattfindende Durchführung derselben Operation; zweitens die Verwendung einer der zu prüfenden entgegengesetzten Operation; drittens (wie bei der bekannten Neunerprobe) die Verwendung einer Hülfszahl als Theiler und Vergleichung der bei der Theilung durch dieselbe sich ergebenden Reste.

Obwohl die Schriftsteller ziemlich oft für dieselbe Rechnungsart verschiedene Methoden lehren, finde ich doch, dass, einen einzigen Fall ausgenommen, niemals darauf hingewiesen wird, das nach der einen Methode eben gewonnene Resultat durch Anwendung einer anderen auf dieselben gegebenen Zahlen zu prüfen. Nur Lucas und nur für die Addition lehrt Lucas als eine „bei Kaufleuten gebräuchliche Weise", die Summe dadurch zu prüfen, dass man, wenn vorher die einzelne Ziffernreihe von unten nach oben addirt worden war, sie nun von oben nach unten addire, und wenn dabei die vorher erlangte Ziffer sich wieder finde, unter dieselbe einen Punkt setze.

Häufiger als von dieser ersten, auf das Subtrahiren z. B. überdies kaum anwendbaren Art der Prüfung wird von der vorhin erwähnten zweiten Art Anwendung gemacht. Wenn damals auch die Theorie der Beziehung der verschiedenen Rechnungsarten zu und der Ableitung derselben aus einander noch nicht so behandelt und hervorgekehrt wurde, wie dies heutzutage in jedem richtigen elementaren Unterrichte der allgemeinen Arithmetik geschieht, so war die Erkenntniss des Zusammenhanges zwischen Addition und Subtraktion, ebenso des zwischen Multiplikation und Division doch selbstverständlich vorhanden und machte sich in der Praxis der „Probe" geltend. „Zu dem Ersten soltu wüssen | das beinahe alle species vnder ynen selbs eynander wyderwertig sein | deshalb gemeinlich ye ein die ander probirt vnd bewert" sagt Köbel, und in demselben Sinne empfehlen schon Widman und Lucas, dem Beispiele der *„phylosophi"* folgend, nicht nur die Subtraktion durch die Addition, die Division durch die Multiplikation, sondern auch je die letztere durch die bezügliche erstere zu prüfen. Und wenn diese Art auch Vielen als *„subrustica"* erschien, so setzt doch Vuolphius, der dies berichtet, sogleich

hinzu *„mihi tamen non displicet"*, und wie von ihm, so wurde auch vorher (z. B. Peurbach) und nachher (Riese, Albert) stets diese Probe zugelassen und anempfohlen. Und sie anzuwenden war auch beim Rechnen auf Linien zwar weitläufig, aber jedenfalls das Naturgemässeste; dass es auch geschah, zeigen z. B. Köbel und Stiefel, bei welchen stets „also wirt das exemplum probiret" und „probatz" gefunden.

Weitaus am häufigsten aber findet sich als Mittel zur Prüfung einer Rechnung die vorhin angegebene dritte Methode verwendet, die durch Benützung einer Hülfszahl als Theiler und Vergleichung der bei der Theilung durch dieselbe sich ergebenden Reste. Allgemein ist es die Zahl 9, welche hierbei eine wichtige Rolle spielt, und auch dieses Auftreten der bei den Arabern schon vorkommenden sog. „Neunerprobe" ist ein deutlicher Wegweiser für den Gang, welchen die Arithmetik bei ihrer Ausbreitung genommen. Schon der am Anfange der Neuzeit stehende Lucas bezeugt, dass *„molti anticamente per li libri si trouano haver la usitata"*; er setzt sie auseinander und zwar in doppelter Weise: einmal indem er die *„proua per lo partire"* macht, d. h. indem er wirklich unter Beachtung des Stellenwerthes die gegebene Zahl durch 9 dividirt oder indem er die *„proua per vio delo infilzare le figure"*, also durch Einfädeln der Ziffern macht, d. h. indem er vom Stellenwerthe absehend aus der Summe der zwei am meisten links stehenden Ziffern das ihr am nächsten kommende Vielfache von 9 weglässt, den Rest zur nächsten Ziffer addirt, mit der entstehenden Summe wieder so verfährt und so schliesslich zur „Probe" der gegebenen Zahl gelangt. Dass aber beide Arten nur verschiedene Formen desselben Verfahrens seien, bemerkt er selbst, sowie er auch die Richtigkeit seines Verfahrens mit Hülfe geometrischer Versinnlichung der Zahlen durch Abtragen von Strecken beweist. Wie mit jenen Proben die Rechnungsarten geprüft werden, brauche ich wohl im Einzelnen nicht anzugeben; es genügt zu sagen, dass im Gegensatze zu Lucas bei den Schriftstellern des 16. Jahrhunderts fast immer nur die Vorschrift ohne Erläuterung der Beweiskraft gegeben wird, die Vorschrift nämlich, dass die „Probe" des Rechnungsergebnisses übereinstimmen müsse mit der „Probe" derjenigen Zahl, welche sich ergibt durch Anwendung der in der Rechnung überhaupt vorgekommenen Operationen auf die „Proben" der einzelnen gegebenen Zahlen.

Da aber bei den Grundaufgaben der Rechnungsarten stets zwei Zahlen gegeben, eine dritte gesucht ist, so bezeichnet Köbel die ersteren durch A und B, die letztere durch C und kann nun die „Proben" jener bequem angeben. Nach ihm aber — und selbst schon vor ihm sich findend bei Widman und Huswirt, jedoch nicht bei Lucas und Borgi — wurde fast allgemein gebräuchlich, aus zwei Geraden ein schiefes (oder aufrechtes)

46376	6
8071	8 ╳ 7
54447	6

Kreuz zu bilden und für die Addition z. B. die „Probe“ der einen Zahl „die setz ins Creutze zur lincken | Desgleichen thu in der andern zal | Was bleibt setz gegenn vber zur rechten | Addirs beides zusammen | Wirff 9. so du kanst auch dauon | das bleibent setz oben | soviel sol dir kommen auch inn der gantzen Summa | das setz vndē ins Creutz | Ist recht probirt“ (Albert).

Es ist aber nicht die Zahl 9 allein, welche zum Erproben der Richtigkeit verwendet wird. Schon Lucas empfiehlt die Probe vermittelst der Division durch 7, ja sie zeige sogar besser etwaige Fehler als die durch 9 an, da letztere sowohl vorkommende Nullen als auch etwaige Umstellungen der Ziffern in der zu prüfenden Zahl nicht beachte. Lucas verfehlt aber auch nicht darauf aufmerksam zu machen, dass beide Proben nicht unbedingt die Wahrheit erkennen lassen: so gebe 124 bei der Neunerprobe 7 und bei der Siebenerprobe 5, die gleichen Reste finde man aber auch aus 187, d. h. der um $7 \cdot 9 = 63$ vergrösserten Zahl.

In der Folgezeit findet sich dann die Probe durch 7 fast eben so häufig als die durch 9, ja oft die erstere allein; aber Apian schon verwendet auch andere Zahlen und gibt eine „Probirtaffel durch 8. 7. 6.“, d. h. eine zur Erleichterung des Rechnens gemachte Zusammenstellung der Vielfachen dieser Zahlen, fügt aber auch bei „Du magst auch durch 11 probiren“, ja selbst „desgleichenn durch eine yetzliche zal“. Und wie Apianus verfuhren auch einzelne Andere nach ihm, doch meistens die Probe durch 9 bevorzugend.

Eine Ausnahmestellung in Bezug auf die hohe Meinung von der Probe, bezw. von deren Beweiskraft nimmt Ramus ein: er verwirft eine jegliche Probe sowohl durch 9 oder 7 u. s. w., als auch durch Umkehrung der Rechnungsart, indem er auf die Unsicherheit der ersteren hinweist und zugleich logische Widersprüche in der letzteren angibt; seiner Meinung zufolge ist „das Gesetz und die Regel jeder Rechnungsweise der wahre Beweis für die Entscheidung der Richtigkeit oder Falschheit der Rechnung“, d. h. er lässt nur eine jeden Theil der Ausführung genau überwachende Wiederholung der ganzen Arbeit als Probe zu und erklärt die „Beweiskrankheit für eine seit Euklid und Theon wahrhaft erbliche Krankheit“.

35. **Progrediren.** — Dass die an die speculative Arithmetik der Alten sich anreihende, ja durch sie veranlasste Lehre von den Progressionen im Anfange der Neuzeit noch zu den Capiteln der gewöhnlichen Arithmetik gezählt wurde, ist oben schon zur Erwähnung gekommen; in der That findet sich dieselbe, die allerelementarsten Bücher ausgenommen, in allen Rechenbüchern des 16. Jahrhunderts.

Wohl in der Mehrzahl der Fälle wurde aber die Progressio als *„numerorum in unam summam collectio“* definirt oder wie es bei den Deutschen heisst „Progredirn lernt vil zalen . . . in ein summa pringen“, und nur bei den besten Schriftstellern findet sich der Begriff der gesetzmässigen Reihenfolge von Zahlen angegeben. Die heute stets befolgte Eintheilung der Progressionen in arithmetische und geometrische war nicht allgemein durchgeführt: Peurbach, Stifel, Scheubel, Widman, Cardanus, Regius, Clavius folgen ihr zwar und die drei ersten führen als dritte Art sogleich auch die harmonische Progression an; Andere aber, wie Huswirt, Rudolff, Riese, Apian, sagen, dass „Progressio ist zweyspeltig Natürlich vnd Vnderschnitten *„continua siue naturalis* und *discontinua siue intercisa*“; die natürlich Progression oder fürzelung | ist so man etzliche zal in natürlicher ordnung | daz ist so die grösser die kleiner in eim vbertrit | auff ein ander gezelt, die vnderschnitten ist so die zal nit natürlicher ordnung | sonder vnderschnitten eine die ander vbertritt“, und erst eine Untereintheilung der letzteren Art, wenn „die zalen mitt gleichen mitteln vber sich wachsen“, führt zu der Unterscheidung, ob sie stets um den gleichen Betrag aufsteigt oder ob „die fürkomen zalen in gleicher proportzen über sich wachsen | als nemlich in proportione dupla | tripla | quadrupla u. s. w.“

Von ganz wenigen Ausnahmen abgesehen werden regelmässig für beiderlei Progressionen nur die Regeln zur Summation einer gegebenen Anzahl von Gliedern angegeben. Im Besonderen lassen sich die auf die arithmetischen bezüglichen nach unserer heutigen Bezeichnung kurz darstellen als $S = \frac{n}{2} \cdot (a + t)$ oder $S = n \cdot \left(\frac{a+t}{2}\right)$; beide werden während des ganzen 16. Jahrhunderts und theilweise auch noch im folgenden meist strenge geschieden, je nachdem entweder die Gliederanzahl n oder die Summe aus dem ersten Gliede a und dem letzten t gerade ist, wie Huswirt z. B. seine Vorschrift in die Verse einkleidet:

Si primus numerus cum postremo faciat par,
Eius per medium loca singula multiplicabis,
Ast impar medium vult multiplicari locorum.

Doch hatte schon ein (französischer?) Schriftsteller aus dem Anfange des 16. oder aus dem Ende des 15 Jahrhunderts die beiden Fälle zusammengefasst in die Vorschrift: „*Medietas indifferenter vel numeri locorum | vel numeri extremorum simul iunctorum multiplicetur per reliquum hoc est per alterum eorum totum et non mediatum*“. Später gibt auch Stifel von den angegebenen Formeln nur die letztere, selbstverständlich in Worten, ohne durch das Auftreten von Brüchen sich stören zu lassen; Clavius aber, „um Brüche zu vermeiden“, schreibt vor $S = \frac{n \cdot (a+t)}{2}$, ist übrigens der einzige,

der sich bemüht und dem es gelingt, den wahren Grund solcher Regel aufzuzeigen.

Etwas grössere Manchfaltigkeit herrscht in den Vorschriften zur Auffindung der Summe sämmtlicher Glieder einer geometrischen Reihe. Wenn wir wiederum durch a das erste, t das letzte Glied, durch q den Quotienten und durch n die Gliederzahl einer solchen bezeichnen, so lautet Peurbach's Regel dahin, die Summe S in der durch $S = \frac{t-a}{q-1} + t$ bezeichneten Weise auszurechnen, eine Vorschrift, welcher ich sonst nicht wieder begegnet bin; weitaus am meisten gebräuchlich ist unsere heutige einfache Formel $S = \frac{tq-a}{q-1}$, und nur Stifel, der übrigens auch die letztere mittheilt, benützt (*Arithm. int. fol. 30*^{v}) in complicirterer Weise ausser dem als *Relictum maius* eingeführten Werthe $(tq-a)$ auch noch ein *Relictum minus*, nämlich $(aq-a)$ und bildet hiermit $S = \frac{(tq-a) \cdot a}{aq-a}$.

Nur ausnahmsweise, wie schon erwähnt, finden sich ausser der Summation noch wenige andere Bestimmungen: so lehrt Apian als „ein fortheyl der weit vbersteigend Progression" ein beliebiges Glied zu bilden ohne Berechnung aller zwischenliegenden; Cardanus wie Clavius thun dasselbe für eine arithmetische Reihe und bestimmen für eine solche auch den Werth von n aus a, d, t. An eine vollständige Behandlung der Aufgaben über Reihen, also an Berechnung je der übrigen zwei Bestimmungsstücke einer solchen, wenn drei gegeben sind, ist während des 16. Jahrhunderts noch nicht zu denken.

Einzig Stifel hat in der genannten Zeit die Lehre von den Progressionen gefördert: das erste Buch seiner *Arithmetica integra* ist grösstentheils derselben gewidmet und die darin vorgetragenen Lehren — die Betrachtungen über die Reihen der Polygonal- und Pyramidalzahlen, die Bildung magischer Quadrate, die Beziehungen zwischen den Reihen und der Coss, die berühmte, die Entdeckung der Logarithmen anbahnende *„tractatio, ut progressioni Arithmeticae respondeat Geometrica progressio"* (Fol. 35 sq.), die Zurückweisung der Ansicht, als könnten die harmonischen Proportionalitäten nicht über drei Glieder ausgedehnt werden (Fol. 55^v), die wirkliche Betrachtung der harmonischen, der contraharmonischen und der musikalischen Reihen und deren Beziehungen zu den arithmetischen und geometrischen — sind ebensoviele Aeusserungen seines regen wissenschaftlichen, stets mehr dem Theoretischen zugewandten Geistes; doch gehört die Behandlung solcher Lehren nicht zu meiner vorliegenden Aufgabe.

36. Das **Wurzelausziehen** macht heute kaum mehr einen Bestandtheil des gewöhnlichen Rechnens aus, wurde aber während des ganzen

Mittelalters und auch während des ganzen 16. Jahrhunderts als solcher gerechnet, wie dies schon oben bei der Aufzählung der Rechnungsarten besprochen wurde (Art. 15). Freilich wurde auch nur das Ausziehen der Wurzeln aus gegebenen Zahlen als solch elementarer Theil gezählt; denn die Durchführung der Rechengeschäfte an Wurzelausdrücken (Irrationalen) war einer der „vorleufflen | so zur erlernung der Coss nottürftig sein" und blieb deshalb dem Unterrichte in der „grossen | Edlen | sinnreichen kunst der regel Algebre | sso gewonlich die Coss genendt wirt" vorbehalten.

Eine symbolische Bezeichnung der Wurzelgrössen, welche in den vorangehenden Zeiten gefehlt hatte, wird jetzt zu Anfang des 16. Jahrhunderts eingeführt, jedoch nur erst zu einem Theile und selbst dies Anfangs nur in Deutschland. Wie während des ganzen Mittelalters, so schreibt z. B. Lucas die Namen der zur Verwendung kommenden Wurzelgrössen entweder ausführlich mit Worten oder er verwendet dafür Abkürzungen wie ℞.2ª, ℞.3ª, ... für *radice seconda*, *radice terza* u. s. w.

La Roche geht davon aus, dass es unendlich viele Arten von Wurzeln gebe, von welchen freilich die Alten nur die zweite, dritte und vierte benützt haben, da diese für die Bedürfnisse der Arithmetik und Geometrie ausreichten, dass aber „die Modernen tiefer in das Meer der Zahlen eingedrungen seien und auch fünfte, sechste ... Wurzeln hinzuerfunden hätten". Er bezeichnet dann diese bezüglich durch ℞^{2} oder ℞, ℞$^{\square}$ oder ℞^{3}, ⱧR oder ℞^{4}, ℞^{5}, ℞^{6}, ... Im Vergleiche zu dieser so einfachen und passenden Bezeichnung scheint man noch ein Vierteljahrhundert später in Italien auf dem alten Standpunkte zu stehen, Cardanus wenigstens redet einer Ausdehnung des Wurzelbegriffes über den der dritten hinaus nicht das Wort*, benützt auch kaum einmal fünfte oder höhere Wurzeln und bezeichnet die niedrigeren durch ℞. *quadrata* oder einfach ℞, ℞. *cubica* oder ℞ *ca*, ℞ ℞, welche Zeichen den Zahlen, auf welche sie sich beziehen, einfach vorgesetzt werden. — Zur gleichen Zeit hatte die Bezeichnung in Deutschland schon weit grössere Fortschritte gemacht. Schon Rudolff (1525) — und er wohl zuerst, da sich bei Henricus Grammateus (1518), auf den er sich bezieht, nichts Entsprechendes findet — „vermerkt von kürtz wegen radix quadrata mit solchem character √", „radix cubica würt bedeut durch solchen character C√√" und „radicis radix | das ist: radix quadrata auss der geuirten wurtzl würt vermerkt durch solchen character C√"; für höhere Wurzeln (wie etwa „Radix cubica auss der

---

* Cardanus opp. IV, 323 z. B. „. . . . *quoniam usque ad cubum inuenitur differentia in natura rerum: nam dantur lineae, superficies, et corpora: et lineae correspondent rebus: superficies censibus: corpora cubis: si igitur tradiderimus sufficienter de his erit cognitum quod est necessarium, verum quod superaddidimus ultrà, est ad voluptatem, non ad effectum rei deducendae in opus.*

radix von radice | oder radicis radix von radice cubica") hat Rudolff keine besonderen Zeichen.

Erst Stifel hat durch Verallgemeinerung von Rudolff's Zeichen solche geschaffen: entsprechend den Zeichen ʒ, cϵ, ʒʒ, ß, ʒcϵ, bß, ʒʒʒ, ..., welche bei ihm und den deutschen Cossisten überhaupt zur Darstellung der 2., 3.,. . ., Potenz der Unbekannten dienen, verwendet er die Zeichen √ʒ, √cϵ, √ʒʒ, . . ., um die 2., 3., . . . Wurzel anzudeuten, gebraucht damit also (nach La Roche) zum ersten Male zur Wurzelbezeichnung ein und dasselbe Zeichen, welchem andere beigefügt werden. Auch hierin folgte man seinem Beispiele, wie z. B. Menher's Buch zeigt, und auch Stevin mag durch das Lesen von Stifels Werken (Ar. p. 76 u. 32) dazu gekommen sein, wie auch, was er bezeugt (ib. p. 30), durch Bombelli, also mittelbar durch Stifel, die Zeichen √, √√, √√√, √√√√, √③, √√④, √√④, . . . √⑫ für die 2., 4., 8., 16., 3., 9., 4., 16., . . 12. Wurzel zu benützen.

37. Dem **Ausziehen der Quadratwurzel**, zu welchem ich nun übergehen will, geht meist die Bemerkung voran, dass zwar „Eyne jegliche zal mag radix quadrata sein. aber nit widerumb eine jegliche zal quadratus" und dass nur eine solche als „quadratus" bezeichnet werden könne, welche in Einheiten vertheilt und aufgezeichnet die Gestalt eines Quadrates ergebe, d. h. einer „gefirten fleche | one dicke | in vier rechten winckeln | vnd gleichen linien beschlossen | vnd jetliche seyt in sunderheit heist costa oder radix quadrati".

In der Methode, zunächst aus quadratischen Zahlen die Quadratwurzel auszuziehen, stimmen wohl sämmtliche Schriftsteller unter einander und mit der heute noch gebräuchlichen überein. Ich würde dieselbe übergehen, wenn ich nicht gleichzeitig auch die verschiedene Art der Darstellung vor Augen führen wollte. Ich gebe deshalb hier zunächst Peurbach's Darstellung, welche von den Späteren vielfach benützt wurde, wie denn z. B. Huswirt dieselbe (also noch vor deren Druck) mehrfach wörtlich wiedergiebt. Peurbach sagt: „Schreibe die Zahl durch ihre Stellen auf und bezeichne die erste, 3., 5., . . . also die ungeraden Stellen oberhalb durch Punkte; denn die gesuchte Zahl wird soviel Ziffern haben als mit Punkten bezeichnete Stellen in der gegebenen Zahl vorhanden sind.

2	235	235
6̇60̇49̇ (2	6̇60̇49̇ (25	6̇60̇49̇ (257
4	4	50
	225	3549

Beginne nun bei der letzten so bezeichneten Stelle und suche einen Digitus, welcher mit sich multiplicirt das, was an jener Stelle und links davon steht, tilgt oder doch soviel wie möglich davon tilgt. Solcher Digitus kann aber höchstens 9, muss wenigstens 1 sein. Dann schreibe ihn neben eine wie bei der Division rechts von unserer Zahl gezogene Linie, multiplicire ihn mit sich

selbst, ziehe das Produkt von seiner Auffindungsstelle ab, streiche diese durch und schreibe den etwaigen Rest darüber. Verdopple dann den gefundenen Digitus und schreibe das Doppelte unter die nächste Ziffer rechts von dem Orte der Auffindung des Digitus. Dann suche unter der nächsten Ziffer vor dem Doppelten einen Digitus von solcher Grösse, dass er, mit dem Doppelten multiplicirt das über dem letzteren Stehende tilgt und dass er, mit sich multiplicirt, die Stelle, in welcher man ihn findet, entweder vollständig oder möglichst viel davon tilgt. Hierauf schreibe ihn vor (rechts neben) den vorher gefundenen Digitus (führe die genannten Multiplikationen und Subtraktionen aus und setze bleibende Reste darüber), verdopple den eben gefundenen Digitus und setze dessen Duplat unter die nächste Ziffer rechts von der Stelle, wo er gefunden wurde [also im Beispiel $= 2 \cdot 5 = 10$, setze zunächst 0 unter 4], rücke das vorige Duplat um eine Stelle weiter [also das unter 6 stehende 4 jetzt unter 0] und wenn beim zweiten Duplat etwas über 9 erwuchs, so füge dieses als Articulus dem eben vorgerückten ersten Duplate zu. Dann suche wiederum unter der den Duplaten folgenden Ziffer einen Digitus, welcher .... und fahre so fort, bis du zur ersten Ziffer (-Einerstelle) der gegebenen Zahl gelangt bist“.

In ganz gleicher Weise verfahren Apian, Riese, Regius u. A.

La Roche rechnet in derselben Art, gibt aber, wie später Cardanus und vor ihm schon Sanchez (dessen Büchlein schon 1495 zu Paris erschien), den vorkommenden Zahlen eine geänderte Stellung: er schreibt nämlich nicht rechts vom Radicanden, sondern unterhalb desselben, durch einen Querstrich davon getrennt, die einzelnen Ziffern der Wurzel und zwar je unter denjenigen Stellen, aus deren Benützung sie sich fanden, macht darunter wieder einen Querstrich und benützt den Raum unter demselben, um die Doppelten der gefundenen Theilresultate anzuschreiben (vgl. das angefügte Beispiel!). Er gewinnt dadurch den Vortheil, die zuletzt gefundene Wurzelziffer mit den unterhalb und links davon stehenden Doppelten zusammen als eine Zahl betrachten und mit eben jener Ziffer multipliciren zu können.

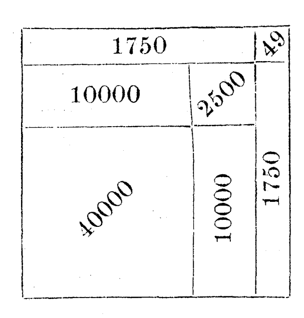
```
   3
 2 65
 6|60|49
 -------
 2  5  7
 -------
  450
```

Denselben Vortheil erreicht Gemma Frisius, indem er — und wohl zuerst — die gefundene Wurzelziffer jeweils sofort rechts neben das als Divisor benützte Doppelte schreibt und dann die ganze so erhaltene Zahl multiplicirt; auch das Anschreiben des hierbei entstehenden Produktes und nachfolgendes Abziehen in der Richtung von rechts nach links scheint Gemma Frisius zuerst angewandt zu haben.

```
235
66049 (257
4
 45
225
  507
 3549
```

Der Beweis der Richtigkeit der gefundenen Zahl wird theils durch Quadriren derselben, theils durch Anwendung der Proben mit 9 oder 7

geführt. Das zunächst liegende erstere Verfahren wählt Scheubel, jedoch nicht nur, um die Richtigkeit des Resultates zu zeigen, sondern vielmehr um darzuthun, dass die benützte Methode wirklich eine natürliche sei und die naturgemässe Entstehung der Quadratzahl aus der Wurzel berücksichtige; zu grösserer Deutlichkeit legt er dies (etwa für das vorhin gerechnete Beispiel) an der beigesetzten Figur dar.



Dieselbe Bemerkung benützt umgekehrt Ramus, um zu zeigen, wie man die gebräuchliche Methode der Wurzelausziehung auffinden könne: vor den Augen des Lernenden lässt er das Quadrat einer Zahl entstehen, z. B. $12 \cdot 12 = 100 + 2 \cdot 10 \cdot 2 + 4$, so dass daraus *„partium genesis et compositio“* erkannt werden könne, so dass dann, wie er mit Recht weiterfährt, *„qua intellecta, analyseos contrariae via et caussa intelligitur“*.

38. Das Ausziehen der Quadratwurzel aus nicht quadratischen Zahlen wird während des 16. Jahrhunderts auf verschiedene Arten durchgeführt, und es müssen dieselben hier Erwähnung finden umsomehr, als die eine derselben die Decimalbrüche schon vor Erfindung derselben benützt.

a) Zunächst ist hier zu beachten die naheliegendste Methode, die durch Probiren. La Roche erklärt zwar, solche *„racines imparfaites“* zu finden sei nur *„labeur sans vtilite“*, aber *„pour la perfection de ce liure“* wolle er sie doch mittheilen. Er thut dies, wie er es nennt, *„par la regle de mediation entre le plus et le moins“*, deren Wesen darin besteht, zwischen zwei auf einander folgende ganze Zahlen beliebig viele mittlere Zahlen einzuschieben und unter diesen eine mit beliebiger Annäherung an dieselben anzugeben. Sie leistet dies durch Beachtung der zwei von $\frac{1}{2}$ ausgehenden Progressionen: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$ und $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$, von welchen die erste an-, die zweite absteigt; die Einschiebung der ersten, bezw. zweiten zwischen die zwei gegebenen Zahlen würde eine beliebige Annäherung an die grössere, bezw. kleinere derselben hervorrufen. Um aber auch zwischen zwei solche Mittel je ein weiteres Mittel einzuschieben, habe man als solches zu benützen einen Bruch, dessen Zähler und Nenner gleich der Summe der Zähler bezw. Nenner der Mittel sei, zwischen welche die Einschiebung stattfinden solle.

Von dieser Art der Annäherung macht nun La Roche Gebrauch auch beim Wurzelausziehen. Da z. B. die Quadratwurzel von 6 zwischen 2 und 3 liegt, so probirt er zunächst $2\frac{1}{2}$; da dies zu viel, ersetzt er es durch $2\frac{1}{3}$, was zu wenig ist; die weiteren Einschiebungen von $\frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, \frac{9}{20}, \frac{13}{29}, \frac{22}{49}, \frac{31}{69}, \frac{40}{89}, \frac{49}{109}, \frac{89}{198}$ führen alle zu Werthen, welche ungenau sind,

deren Fehlerbeträge sich aber angeben lassen; der letzte endlich führt zur Annahme von $2\frac{881}{1960}$ als Wurzel von 6, wobei der Fehler gleich $\bar{p}\ \frac{1}{3841600}$ ist. In ähnlicher Weise findet er als Wurzel von 10 den Werth $3\frac{1405}{8658}$ *Plus* $\frac{1}{74960964}$ oder $3\frac{228}{1405}$ *Moins* $\frac{1}{1974025}$.

b) Eine andere von der eben dargelegten durchaus verschiedene auf geometrischem Grunde aufgebaute Methode der Annäherung findet sich häufig während des 16. Jahrhunderts, gehört aber, wie Stifel vermuthen lässt (s. unten!), einer viel früheren Zeit an. Scheubel z. B. gebraucht diese Methode (1545). Er sagt, wenn bei dem Ausziehen der Wurzel ein Rest bleibe, so müsse man dessen „Denomination" suchen; dies geschehe so, dass man die gefundene Wurzel verdopple und dem Produkte 1 zuzähle: so erhalte man *„denominationem utcunque atque proximam"*. Denn die so erhaltene Zahl, zugefügt zu dem grössten in der gegebenen Zahl enthaltenen Quadrate, gebe das nächst höhere Quadrat*. Man schreibe also unter den gebliebenen Rest als Zähler die so gebildete Denomination als Nenner und füge diesen Bruch zu der vorher gefundenen ganzzahligen Wurzel, so erhalte man die Wurzel (*„habebis radicem"*). Dem Wortlaute nach scheint Scheubel den gefundenen Werth für die wirkliche Wurzel zu halten und Drobisch greift ihn auch deshalb an; es ist aber doch kaum denkbar, dass er nicht beim Quadriren die Unrichtigkeit gesehen und so den Werth doch auch selbst nur für einen angenäherten erachtet habe; immerhin ist sein Stillschweigen hierüber auffallend.

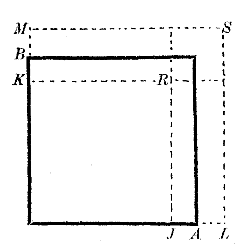
Gemma Frisius dagegen, bei dem sich das angegebene Verfahren ebenfalls und schon vor Scheubel findet (1540), bezeichnet es deutlicher als Annäherungsverfahren und betont die Unmöglichkeit der Auffindung der Wurzel aus einem *numerus surdus;* aber eine Begründung des Verfahrens ist auch bei ihm nicht angegeben.

Was wir so bei Scheubel und Gemma vermissen, die innere Begründung des Verfahrens, das deutliche Aussprechen, dass auf diese Weise statt der Wurzel selbst nur ein angenäherter Werth gefunden werde und die Angabe weiterer Näherungswerthe, das Alles finden wir bei Ramus. In seiner Geometrie (v. J. 1569, S. 89 f.) sagt er, dass zwar geometrisch die Seite eines Quadrates von gegebenem Inhalt dargestellt werden könne, aber *„Arithmeticum latus et numero explicabile nullum reperietur, et hic numerus figuratus est umbra figurae geometricae, nec assequitur"*; durch Zahlen könne man unmittelbar nur die Seite des grössten im gegebenen enthaltenen

* Für die Richtigkeit dieser Behauptung, die wir uns durch Ramus sogleich werden beweisen lassen, beruft sich Scheubel auf einen Satz (II, 33) einer *„demonstratae arithmetices incerti autoris"*, auf welchen unbekannten Verfasser er sich auch beim Cubikwurzelausziehen bezieht. Auch diese Bezugnahme beweist, dass das gelehrte Näherungsverfahren jedenfalls vor Scheubel benützt wurde.

Quadrates finden (so z. B. 12 als Seite von 144, wenn 148 gegeben ist), und wenn man sich auch dem wahren Werthe mehr und mehr annähern könne, so doch niemals so nahe *„quin propius posset inueniri“*. Solche Annäherung könne auf zwei Arten durchgeführt werden.

Seine erste Art stimmt mit der vorhin bei Scheubel beachteten überein; er nennt sie *„per gnomonis additionem“*. Ist nämlich die Wurzel von 148 zu suchen, so lässt man 148 einen quadratischen Flächenraum AB bedeuten, welcher dann als aus dem Quadrate JK über der Seite 12 und dem Gnomon $AJKB$ bestehend angesehen werden kann; würde die Seite 12 um $KM = 1$ vergrössert, so bestände das neue Quadrat LM aus dem früheren *plus* dem Doppelten des Rechteckes RM *plus* dem Quadrate RS, d. h. der die Gestalt des Gnomons $LJKMS$ besitzende Zuwachs von LM im Vergleiche zu JK wäre $= 2 \cdot 12 + 1$, somit gleich dem um die Einheit vermehrten Doppelten der zuvor gefundenen Seite. Der Ueberschuss des gegebenen Quadrates AB $(= 148)$ über das nächst kleinere JK $(= 144)$ hat nun aber auch die Gestalt eines Gnomons. Setzt man nun — was freilich unrichtig ist — das Verhältniss des noch zu findenden Stückchens KB zu KM $(= 1)$ gleich dem Verhältnisse des Gnomons $AJKB$ zu dem Gnomon $LJKMS$, so ergibt sich sofort der der gefundenen Seite noch beizufügende Betrag KB $(= \frac{4}{25})$ gleich dem Quotienten aus dem Reste, welcher bei der Wurzelausziehung übrig blieb, durch das um 1 vermehrte Doppelte der schon gefundenen Zahl, also gerade durch die von Scheubel bestimmte Denomination.



Wie bei Scheubel und Ramus, so findet sich eine mit der eben dargelegten fast übereinstimmende Methode der Annäherung auch bei einem Vertreter der dritten der concurrirenden Nationen, bei **Cardanus**, und zwar selbst früher als bei jenen. Schon in seiner 1539 erschienenen *Practica Arithmeticae generalis* (S. 30) benützt er dieselbe und zwar sogar ausgedehnter als jene die ihrige verwertheten: er dividirt nämlich den gebliebenen Rest nur durch das Doppelte der zuvor gefundenen Zahl, benützt aber diese erste Annäherung zur Auffindung einer zweiten, so dass er, wenn $\sqrt{a}$ zu finden ist, zunächst $\sqrt{a} = b$ setzt, dann $b_1 = b + \frac{r_1}{2b}$, dann $b_2 = b_1 - \frac{r_2}{2b_1}$ u. s. w. setzt, vom zweiten Näherungswerthe an die gefundene Correction stets abziehend. In seinem Beispiele $\sqrt{20}$ wäre demnach $4 = b$, $20 - 16 = 4 = r_1$, $4 + \frac{4}{8} = 4\frac{1}{2} = b_1$, $20\frac{1}{4} - 20 = \frac{1}{4} = r_2$, $4\frac{1}{2} - \frac{1}{36} = 4\frac{17}{36} = b_2$, $b_2{}^2 = 19\frac{28}{36} + \frac{289}{1296}$, $20\frac{1}{1296} - 20 = \frac{1}{1296} = r_3$, also $4\frac{17}{36} - \frac{1}{11592} = 4\frac{5473}{11592} = b_3$ u. s. w.

Clavius gegen Ende des Jahrhunderts (1584) erläutert die beiden zuletzt vorgeführten Arten der Annäherung zugleich mit der ausdrücklichen Zufügung, dass die erstere stets einen Werth ergebe, welcher kleiner und die andere stets einen solchen, der grösser ist als der wahre Werth, dass übrigens beide Regeln genäherte Werthe zu finden schon frühe geometrisch erwiesen worden seien, von dem Alexandriner Theon (zum 1. Buch des Almagest) und später von Commandino (zu des Archimedes' Kreismessung).

Auf den Almagest und damit auf Ptolemäus als ersten Benützer unserer in Rede stehenden Annäherungsmethode weist uns auch Stifel hin. Denn nachdem er in seiner *Arithmetica integra* (Fol. 209) 103 als Wurzel aus 10800 und dabei 191 als Rest gefunden, multiplicirt er diesen Rest behufs Verwandlung in Minuten mit 60 und dividirt das Product 11460 durch 206, d. h. durch das Doppelte der gefundenen Wurzel; der Quotient wird so $= 55'$ und der Rest $= 130'$. Nun zieht er $(55')^2 = (\frac{55}{60}^0)^2 = 3025''$ ab von den gebliebenen $130' = 7800''$ und dividirt den bleibenden Rest $4775''$ wieder durch 206, woraus sich $23''$ ergeben. Das Gesammtresultat $= 103^0\,55'\,23''$ finde sich im Almagest des Ptolemäus angegeben, jedoch ohne die Art der Ausrechnung, so dass Stifel als *„Regula resolutionis numerorum irrationalium in numeros rationales, qua Ptolemaeum usum fuisse uidemus"* geradezu die folgende aufstellt: *„Extrahe radices .... et residuum multiplica per 60 productumque diuide per duplum radicis inuentae, ita tamen ut post diuisionem subtrahas quotientem a residuo remanente"*.

c) Eine dritte Methode, für die Quadratwurzel aus einer nicht quadratischen Zahl einen Näherungswerth zu finden, besteht im Wesentlichen in der Anwendung der Decimalbrüche. Sie wird, wie Cantor* sagt, gewöhnlich Stevin (1585) zugeschrieben; Cantor selbst aber wollte früher dieselbe als eine Entdeckung des Cardanus betrachtet wissen, welcher sie auch „ausdrücklich als seine Erfindung in Anspruch nehme". Nun wäre es wohl möglich, dass Cardanus die Methode selbst ebenfalls aufgefunden habe, es ist dies aber aus noch anzuführenden Gründen höchst unwahrscheinlich; jedenfalls aber ist in den Worten des Cardanus** von einem Beanspruchen der Erfindung Nichts zu entdecken. Hören wir zunächst, worin diese geistreiche Methode besteht.

„Man füge der Zahl, aus welcher die Wurzel gezogen werden soll, sovielmal 00 zu, eine wievielmal angenähertere Genauigkeit man erreichen will. So wenn man 00 zufügt, erhält man eine Genauigkeit bis zu $\frac{1}{10}$; wenn man 0000 zufügt, so erhält man eine Genauigkeit bis zu $\frac{1}{100}$; fügt man 000000 zu, so erhält man eine Genauigkeit bis zu $\frac{1}{1000}$ .... und so

* Zeitschrift für Math. und Physik II (1857), p. 373.
** *„modus . . . quo ego utor"*.

stets in der Hälfte der zugefügten Nullen". Dies ist der Wortlaut der Vorschrift bei Cardanus (opp. IV, 31): soll also z. B. $\sqrt{17}$ auf Zehntausentel genau ausgezogen werden, so füge man 8 Nullen an 17 und findet sich dann $\sqrt{1700000000} = 41231$, so hat man nun rechts vier Stellen wegzuschneiden (*„aufer 4. litteras a dextra"*) und findet $4\frac{1231}{10000}$ als Wurzel.

Dass diese den Gebrauch der Decimalbrüche vor deren Erfindung vorausnehmende Methode lange vor dem 16. Jahrhundert entstanden, ist daraus ersichtlich, dass sie sich — und hierauf hat später Cantor selbst zuerst aufmerksam gemacht* — schon in der dem 12. Jahrhundert angehörigen Arithmetik des Johannes von Sevilla (Hispalensis) findet. In gleicher Weise wie bei Cardanus wird sie gelehrt in einem hebräisch geschriebenen Werke *„in libro* מספר *quem olim aedidit Rabbi Elia qui cognominatur Orientalis"* und welches i. J. 1546 durch Seb. Münster und Schreckenfuchs im Urtext und in lateinischer Uebersetzung herausgegeben wurde (S. 204); dass der erhaltene Zahlwerth nicht in gewöhnlichem Bruche stehen bleibt, sondern schliesslich in Graden, Minuten . . . der 60theiligen Brüche dargestellt wird, ändert an der Methode selbst Nichts. — Dass die Methode grössere Verbreitung hatte, als man gewöhnlich annimmt, dass es also auch wenig wahrscheinlich ist, dass Cardanus der Erfinder derselben sei, geht auch daraus hervor, dass sie schon von Sanchez (1495) wie später von Gemma Frisius (1540) angewendet wird und dass sie** in einem nachgelassenen Werke des um 1550 gestorbenen Engländers Buckley in folgenden Versen dargestellt ist:

Quadrato numero senas praefigito ciphras
Producti quadri radix per mille secetur.
Integra dat Quotiens, et pars ita recta manebit
Radici ut verae, ne pars millesima desit.

Aber auch in Deutschland tritt sie, obwohl von Widman nicht erwähnt, schon in einer früheren Zeit auf, als Drobisch z. B. anzunehmen scheint***, welcher deren Vorkommen zuerst in dem grösseren Buche des Adam Riese (1550) nachweist. Es ist ihm, dem genauen Forscher, entgangen, dass in Chr. Rudolff's Coss schon (1525), freilich gelegentlich in dem den „Algorithmus de surdis quadratorum" lehrenden Capitel, jene Annäherungsmethode sich angewandt findet und zwar genau bis auf „tausentteil". Um so auffallender ist es, dass Stifel sich derselben nicht bedient hat.

Aber auch in dem gewöhnlichen Rechenbuche von Adam Riese, in dem von Helm bearbeiteten Abschnitte „der ware Process vnd kürzist weg

* Mathem. Beiträge zum Culturleben der Völker. Halle 1863. S. 275.
** Nach Kästner's Bericht in dessen Gesch. der Mathematik I, 48.
*** A. a. O. S. 25.

Visier vnd Wechselrüten zu machen“ (1533), auch bei Menher findet sich eine *Tabula radicum quadratorum* von der folgenden Form:

1	1	1000		7	645		13	606
	2	414		8	828		14	741
	3	732	3	9	1000		15	873
2	4	1000		10	162	4	16	1000
	5	234		11	316		17	123
	6	449		12	464		.	. . .

Die hierin zusammengestellten Quadratwurzeln der 240 ersten ganzen Zahlen sind offenbar Decimalbruchwerthe, deren Auffindung ganz in der gekennzeichneten Weise gelehrt wird.

Interessant ist noch die Beobachtung, dass Ramus, welcher schon in seinen drei Büchern Arithmetik (1555) das Anhängen von Nullen verwerthet und in seiner Geometrie (1569) darauf, als auf den „*modus per dati numeri non quadrati reductionem ad partes maioris alicuius nominis*“, zurückkommt, nun noch diese Methode mit der zweiten, deren Benützung durch Ramus ich schon anführte, in Verbindung bringt: so setzt er $7 = \frac{7000000}{1000000}$ und findet als Wurzel des Zählers $= 2645$ mit 3975 als Rest, so dass, von dem letzteren abgesehen, $\sqrt{7} = \frac{2645}{1000} = 2\frac{645}{1000}$ wird, d. h. mehr als das nach der früheren Methode allein gefundene Resultat $2\frac{3}{5} = 2\frac{600}{1000}$.

39. Wie bei dem Ausziehen der Quadratwurzel, so ist auch beim Berechnen der Cubikwurzel aus ganzen Zahlen das Wesen der angewandten Methoden stets dasselbe, auf der Identität $\sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} = a + b$ beruhende; die Art der Durchführung im Einzelnen aber und die äussere Anordnung der dabei verwendeten Hülfszahlen ist noch ungleich manchfaltiger. Auch hier scheint es mir von Interesse, die wichtigsten Darstellungen vor Augen zu führen.

$$\begin{array}{rl}
 & 3 \\
 & 306932 \\
 & \dot{9}4\dot{8}1\dot{8}81\dot{6} \quad \left(\overset{a}{4}\;\overset{b}{5}\;6 \;\; A = 45,\; B = 6\right) \\
3a = & 12 \\
(a+b) = & 45 \\
3a^2 = & 48 \\
3ab = & 60 \\
\hline
 & 540 \\
 & 5 \\
\hline
3a^2b + 3ab^2 = & 2700 \\
b^3 = & 125 \\
\hline
 & 27125 \\
 & 15 \\
 & 12 \\
\hline
3A = & 135 \\
(A+B) = & 456 \\
\hline
 & 61560 \\
 & 6 \\
\hline
3A^2B + 3AB^2 = & 369360 \\
B^3 = & 216
\end{array}$$

Ich lasse wieder dem Altmeister Peurbach den Vortritt, und ich werde bei Mittheilung seiner Anweisung, obwohl sich dieselbe nicht von einem Beispiele begleitet zeigt, doch ein solches zufügen und werde gleichzeitig, die Buchstaben a und b der obigen

Formel verwerthend, auch die Bedeutung der einzelnen zur Benützung kommenden Zahlen andeuten.

Peurbach theilt die gegebene Zahl durch übergesetzte Punkte in Gruppen von je 3 Ziffern ab und bestimmte die höchste Wurzel der ersten (*digitus* = 4) und sucht den Rest (30). Dann schreibt er das Dreifache des gefundenen Digitus unter die dritte Ziffer rechts von der Stelle, wo man den Digitus fand (2 von 12 unter 1). Nun handelt es sich um die Auffindung des zweiten Digitus, was nur durch Probiren* geschehen kann (*„librando inuestigabis“*). Ist er bestimmt (hier = 5), so schreibt man ihn und den vorigen unter das vorhin berechnete Dreifache, multiplicirt jeden mit dem letzteren und addirt die Produkte unter Beachtung der richtigen Stellung, multiplicirt dann die Summe mit dem zweiten Digitus allein und fügt noch den um eine Stelle nach rechts gerückten Cubus des letzteren zu, worauf das Abziehen von der früher übrig gebliebenen Zahl (30818) stattfindet. Zur Auffindung des nächsten Digitus schreibt man das Dreifache des eben gefundenen unter die nach rechts nächstfolgende dritte Stelle (5 von 15 unter 1) und verschiebt das vorher benützte Dreifache (= 12) um 2 Stellen: die Summe beider (135) lässt den nächsten Digitus (= 6 = B) finden. Das Produkt aus diesem sammt den vorigen ($A + B = 456$) in das Dreifache ($3A = 135$) wird gebildet und mit dem letzten Digitus multiplicirt, das Ergebniss subtrahirt und vom bleibenden Reste noch der Cubus des letzten Digitus subtrahirt. In ähnlicher Weise wird fortgefahren: *„nec cessandum est a talis digiti inuentione, descriptione eius una cum aliis digitis in triplata, et deinde ipsius solius in productum et post in se cubice ductione et producti ultimati a suprapositis detractione et triplatione, et triplatorum per duas differentias anterioratione“*.

Mit Peurbachs's Art der Durchrechnung stimmen seine Nachfolger im Wesentlichen überein; doch werde ich deren Verfahren unter steter Benützung desselben Beispieles hier vor Augen führen, dabei aber i. A. den begleitenden Text weglassen. Ich bemerke nur noch, dass die zur Verdeutlichung des Ganges der Rechnung verwendeten Buchstaben sich nirgends finden, den einzigen Apian ausgenommen.

---

* Peurbach gesteht, das die ganze Schwierigkeit in der Auffindung des Digitus liege und er empfiehlt folgendes Probiren. Ist das Dreifache (oben $3a = 12$) angeschrieben, so setze man unter dessen Einer einen Punkt und links davon den vorher gefundenen Digitus, multiplicire mit demselben (vgl. neben) und sehe nun zu, wie oft das Produkt ($48 = 3a^2$) in der über dem Dreifachen entsprechend stehenden Zahl (oben = 308) enthalten ist: der Quotient ist höchst wahrscheinlich der gesuchte Digitus.

12
4.
48

La Roche (1520).

3
30 693
94|818|816
4 5 6
$a+b=$ 45
$3a=$ 12
540
$b=$ 5
2700
$b^3=$ 125
27125
$A+B=$ 456
$3A=$ 135
61560
6
369360
$B^3=$ 216
3693816

Chr. Rudolff (1525)

I.*

369
308132
94818816 (456
$3a=$ 12
$3a\cdot(a+b)=$ 540
$3a\cdot(a+b)b=$ 2700
$b^3=$ 125
$3A=$ 135
$3A(A+B)=$ 61560
$3A(A+B).B=$ 369360
$B^3=$ 216

II.

3
30693
94818816 (456
b a c b a c b a
Triplatum quadrati des quocients 48
Triplatum des quocients 12
Prod: des obern trip: mit der new 240
Das vntere mit d. quadrat der new 300
Cubus der newen 125
Summa der drey product 27125
Triplatum u. s. w. 6075
135
36450
4860
216
3693816

Apianus (1532).

3
30693
94818816 (456
a b c
64
b 5 48
25 12
240 — genitura . 3 .
300 — q 16 | 48
Cubus 125 .... 125 — a 4 | 12
27125
c 6 6075
36 .... 135 — Genitura . 3 .
36450 — 2025 | 6075
4860 — 45 | 135
Cubus 216 .... 216 — a b
3693816

Cardanus (1539).**

3
6 48
306932
94818816
4 5 6
485550
7276
108
64

45
45
2025
3
6075

108
45
4860

---

* Chr. Rudolff bemerkt zu I: „Itzgemelter weg wil etlichen gar zu müsam sein | in dem das sie ein new figur on grosse erbeit nit wissen zu suchen: wiewol es gar ein schlechtē griff hat: den selbē gib ich dise operation wie nachuolgt" (= II).

** Cardanus bildet $3a^2=\mathbf{48}$, dividirt in 308, geht 5 mal; $5.48=\mathbf{240}$, von 308 bleibt 68; dann $b^2=25$, $3b^2=\mathbf{75}$, $3b^2a=300$, subtrahirt von 681 bleibt 381;

Gemma Frisius (1540).

3
30693
94818816 (456
Triplum 12
Diuisor 48
240
300
Cubus 125
27125
135
6075
36450
4860
216
3693816

Stifel (1544).

16 ____ 300 ____ 5 24000
4 ____ 30 ____ 25 3000
125 125
27125

2025 ____ 300 ____ 6 3645000
45 ____ 30 ____ 36 48600
216 216
3693816

3
30693
94818816 (456

Ramus.

I. (1555).*

3
66482
306938
94818816 (456
$3a =$ 12
$3a^2 =$ 48
$b^2 =$ 25
$b^3 =$ 125
$3A =$ 135
$3A^2 =$ 6075
4860
216

II. (1569).

3
30693
94818816 (456
$3a =$ 12
$3a^2 =$ 48
$b^2 =$ 25
$3a^2b =$ 240
$3ab^2 =$ 300
$b^3 =$ 125
27125
$3A =$ 135
$3A^2 =$ 6075
$B^2 =$ 36
$3A^2B =$ 36450
$3AB^2 =$ 4860
$B^3 =$ 216
3693816

$b^3 =$ **125**, subtrahirt bleibt 3693816; $A^2 = 2025$, $3A^2 =$ **6075**, in 36938 geht 6 mal, 6 . 6075 gebildet und sofort subtrahirt, dann $B^2 = 36$, $3B^2 = 108$; $3B^2 . A =$ **4860**; subtrahirt von 4881 bleibt 21; nun $B^3 = 216$, von 216, geht auf. (Nur die hier fett gedruckten Zahlen schreibt Cardanus wirklich auf!)

* Ramus bildet $3a$, dann $3a^2 = 48$, dividirt damit in 306, geht 5 mal, multiplicirt und subtrahirt, bleibt 66; er bildet nun $b^2 = 25$, multiplicirt mit $3a = 12$ und subtrahirt während des Multiplicirens, bleibt = 3318; er subtrahirt dann noch $b^3 = 125$, bleibt = 3693. Ebenso zum zweiten Male.

Menher (1565).

3
30693
94818816 (456
64125816
27693
3

	4	16
	3. *gen.*	3 *geniture*
5	12	48
25.	25.	5.
125.	300.	240
		300
		125
		27125
	45.	2025.
	3.	3.
6.	135.	6075.
36.	36.	6.
216.	4860.	36450
		4860
		216
		3693816

Stevin (1584).*

I.

				3
				30693
16.	300.	5.	24000	94818816
4	30	25.	3000	4 5 6
		125.	125	64125816
			27125	27693
				3
2025.	300.	6.	3645000	
45.	30.	36.	48600	
		216.	216	
			3693816	

II.

13 48			
36651			
5079323	*Du premier poinct* (= a)	4	45
94818816	*Tousiours* (3)	3	3
4 5 6	*Produict* ($3a$)	12	135
16 05506	*Du premier poinct* (a)	4	45
482713	*Produict* ($3a^2$)	48	6075
608	*Prod. antecedant* ($3a$)	12	135
6	*Du second poinct* (b)	5	6
	Produict ($3ab$)	60	810

Ist die Zahl, zu welcher die Cubikwurzel gefunden werden soll, nicht selbst eine Cubikzahl, so ist die Cubikwurzel nicht genau, sondern nur mehr oder weniger angenähert angebbar, eine Thatsache, deren in den Schriften des 16. Jahrhunderts meist ausdrücklich Erwähnung geschieht.

La Roche lässt sich nur i. A. darüber aus, dass die Cubikwurzeln „*se peuuent sercher par la forme et maniere que lon quiert les racines quarrees imparfaictes*“, fügt aber sogleich bei „*que ce nest que temps perdu et labeur*

* Stevin sagt von seiner Methode I: „*Laquelle nous avons seulement descript, pour demonstrer par icelle, la generale methode des extractions de toutes racines*“ — und von seiner Methode II: „*autre maniere d'operation à sçavoir comme nous l'usons en la practique et a mon advis plus facile que n'est la precedante.*“

sans vtilite ne aulcune necessite" (Fol. 34^v) und gibt dem entsprechend auch keine Vorschrift im Einzelnen. Sonst wird die Annäherung meist in zweifacher Weise erlangt: entweder durch Verwandeln der gegebenen Zahl in Tausendtel oder in Milliontel u. s. w., d. h. durch Anhängen von beliebig vielen Gruppen von je drei Nullen (Cardanus, Gemma, Ramus) oder durch Berechnung einer Ergänzung unter Benützen des nach Ausziehung der ganzzahligen Wurzel gebliebenen Restes. Und wenn $\sqrt[3]{a^3+r}$ verlangt ist, so verfährt zunächst Cardanus, der angenäherten Quadratwurzelausziehung entsprechend, so, dass er als erste Annäherung $\sqrt[3]{a^3+r} = a + \frac{r}{3a^2}$ setzt, letzteren Werth cubirt und den Ueberschuss über (a^3+r) wieder durch $3a^2$ dividirt; ist das Erhaltene $= \frac{r_1}{3a^2}$, so subtrahirt er letzteres von der ersten Annäherung und benützt $\left(a + \frac{r}{3a^2} - \frac{r_1}{3a^2}\right)$ als zweiten Annäherungswerth u. s. w.

In seinem Beispiele $\sqrt[3]{11}$, wo 2 ganzzahliger Bestandtheil der Wurzel und 3 der Rest, ist demnach die erste Näherung $= 2\frac{3}{12} = 2\frac{1}{4}$; da nun $(2\frac{1}{4})^3 = 11\frac{25}{64}$, so ist weiter $\frac{25}{64} = r_1$, somit findet sich durch Subtraktion des Bruches $\frac{25}{768}$ von $2\frac{1}{4}$ die zweite Näherung $= 2\frac{167}{768}$.

Scheubel aber bestimmt die Denomination des Restes so, dass er die gefundene ganze Zahl sowohl selbst als auch in ihrem Quadrate verdreifacht und zur Summe beider noch 1 zuzählt; in gleicher Weise verfährt Ramus (1569), welcher zugleich die Begründung gibt durch Hinweis auf den Zuwachs des Würfels, wenn dessen Kante von a auf $(a+1)$ anwächst. Beide setzen also $\sqrt[3]{a^3+r} = a + \frac{r}{3a^2+3a+1}$, z. B. $\sqrt[3]{17616} = \sqrt[3]{17576+40}$ $= 26 + \frac{40}{3.676+3.26+1} = 26\frac{40}{2107}$.

40. Dass sich auch gewisse Wurzeln höheren als zweiten oder dritten Ranges mit Hülfe eben dieser ausrechnen lassen, ist schon früh beachtet worden, und oft genug finden sich, meist zur Uebung im Quadrat- und Cubikwurzelausziehen, Beispiele, bei welchen die 6., 8., . . . Wurzel zu finden ist. Wie aber etwa die 5., 7., . . . Wurzel, also solche, deren Wurzelexponent, wie wir heute sagen, nicht nur aus 2 und 3 als Factoren zusammengesetzt ist, wie solche auszuziehen seien, habe ich vor Stifel's Zeit nur ein einziges Mal, bei Apian, gefunden.

Denn La Roche sagt zwar: „*Toutes les aultres racines qui nont nulle familiarite aux racines secōdes tierces quartes ou sextes comme sont les racines quintes septiesmes vnziesmes treziesmes etc. sabbreuient immediatement en nombre quant abbreuier se peuuent*" — er verschweigt aber vollständig, wie dieses *abbreuier* (= Ausrechnen) durchzuführen sei.

In Apians Rechenbuch aber findet sich eine Reihe von Beispielen, an welchen die Art gezeigt ist, wie unmittelbares Ausziehen bis zur achten Wurzel statthaben könne; eine Erklärung hat Apian leider nicht beigefügt, sondern auf sein später herauszugebendes „Centiloquium“ verwiesen, das aber wohl nicht veröffentlicht wurde (vgl. Art. 10).

Eine Wirkung werden wir aber wohl den Apian'schen Bemühungen zuschreiben dürfen: dass nämlich Stifel sich durch dieselben angeregt fand (Ar. int. Fol. 102[r]), das Gesetz für das einzuschlagende Verfahren aufzuspüren, Stifel, der übrigens durch seine vielfachen Beschäftigungen mit den Zahlenreihen (vgl. z. B. Art. 35) ohnedem schon auf gutem Wege sich befand. Und so können wir es immerhin Stifel zum Verdienste anrechnen, wie er es auch ausdrücklich als seine Erfindung in Anspruch nimmt, das gewöhnliche Verfahren des Wurzelausziehens auch auf die vorhin genannten anderen Fälle ausgedehnt zu haben; dass er hierdurch zugleich der Vorläufer auf dem Wege zur Erfindung des Binomialsatzes geworden, werden wir sogleich bemerken.

Stifel gibt nämlich die folgende Tabelle „derjenigen Zahlen, welche in besonderer Weise zu jeder Art von Wurzelausziehungen gehören“. Er gibt auch die Vorschrift dieselben zu finden: die erste Reihe enthält die natürlichen Zahlen, die zweite beginnt mit der dritten und bildet die folgenden durch jedesmalige Addition der bezüglich in der ersten Reihe nebenan stehenden, die dritte Reihe beginnt wieder mit und neben der dritten Zahl der zweiten Reihe und bildet die folgenden in gleicher Weise u. s. f.

1						
2						
3	3					
4	6					
5	10	10				
6	15	20				
7	21	35	35			
8	28	56	70			
9	36	84	126	126		
10	45	120	210	252		
11	55	165	330	462	462	
12	66	220	495	792	924	
13	78	286	715	1287	1716	1716

Zu irgend welcher Wurzelausziehung werden nun die Zahlen der betreffenden Querreihe herausgeschrieben, dann alle mit Ausnahme der letzten rückwärtsschreitend wiederholt, dann jeder dieser Zahlen eine Null und ausserdem noch so viele Nullen angehängt als ihr Zahlen nachfolgen, so dass zur Ausziehung der 7. Wurzel *(„radicis bsursolidae“)* z. B. die folgenden Zahlen zu benützen sind:

7000000   2100000   350000   35000   2100   70

Die Benützung selbst geschieht in der oben beim Cubikwurzelausziehen an den Zahlen 300 und 30 gezeigten Weise und Stifel bestimmt so in der That auch noch die 8. Wurzel aus einer 17stelligen Zahl.

Dass Stifels Vorgehen Anerkennung und Nachahmung gefunden, beweisen die Schriften des 17. Jahrhunderts deutlich genug; aber auch noch

zu seinen Lebzeiten breitete sich seine Methode aus und wurde in weiten Kreisen bekannt gemacht, wie man z. B. aus Menher's Werk ersieht (vgl. oben dessen Methode der Cubikwurzelausziehung!); und auch Stevin nennt zwar gelegentlich des Wurzelausziehens Stifels Namen nicht, aber wie schon sein vorhin mitgetheiltes Verfahren beweist, folgt er beim Berechnen der 2. und 3., aber auch bei den höheren Wurzeln (bis zur 8. durch Beispiele belegt!) seinem berühmten Vorgänger; dass er dessen Werke gekannt, geht unzweifelhaft daraus hervor, dass er (S. 721) dieselben denen, welche sich weiter unterrichten wollen, zum Studium anempfiehlt.

41. **Bruchrechnen.** — Während wir heute beim Lehren des Geschäftsrechnens den Schluss von der Vielheit auf die Einheit zur Anwendung bringen und hierdurch auf die Benützung der Brüche geführt werden, wurden früher auch beim Unterrichte, wie wir sehen werden, die heute sogenannten Zweisatzrechnungen nach Anleitung einer Reihe von Vorschriften in Multiplikationen und Divisionen von ganzen Zahlen umgewandelt, so dass wohl die Lehre von den Brüchen erst nachfolgen konnte, wie dies die Bücher von Riese, Böschensteyn, Gemma u. a. wirklich zeigen. Gewöhnlicher aber geschah es doch, der Regel de tri die Bruchlehre vorangehen zu lassen.

Hierbei unterschied man gemeine Brüche *(numeri rotti, nombres rouptz, fractiones* oder *minutiae vulgares seu mercatoriae)*, „welche die Kaufflewt brauchen in kauffen vnnd verkauffen", und Sexagesimalbrüche *(fractiones astronomicae)*, „die minutie phisice | welch die Astronomi vnd die natürlichen meister brauchen".

Die ersteren, von welchen allein hier die Rede sein soll, werden häufig genug nicht ihrer Entstehung nach betrachtet, sondern meist wird rein äusserlich sofort Zähler und Nenner unterschieden und die Benützung des „strichleins" dazwischen hervorgehoben. Die Werthbeziehung zum Ganzen, je nachdem der Zähler gleich, grösser oder kleiner als der Nenner, wird, dem ganzen Charakter des Rechnens der damaligen Zeit entsprechend, nur einfach mitgetheilt, oft vorher noch als besonders wichtig für das praktische Leben das Verfahren, um zu finden, „was odder wie viel ein jeglicher bruch inn sich beschleust", d. h. die Ermittelung des Maass-, Gewichts- oder Münzwerthes eines Bruches in niedrigeren Sorten, z. B. nach den Versen:

„Soluir den zeeler in sein werdt |
„Theyl ab mit dem nenner geferd |
„Wirst auss dem quotient bericht
„Des bruchs inhalt | vn̄ trogen nicht".

Da ferner „ein yeglicher bruch verstentlicher vnter einer kleinen satzung | denn vnter einer grösseren" (Stifel), so findet sich auch allgemein das Abkürzen der Brüche benützt, zuweilen so, dass die Gleichheit z. B. von $\frac{10}{15}$ und $\frac{2}{3}$ nur gelegentlich behauptet, der Regel nach so, dass als

Vorschrift mitgetheilt wird „Das selbig zu thun | magstu brauchen das, teylen beyde dess Zelers vnd des Nenners | durch ein einige zal", seltener so, dass an Maassen oder Münzen das Wesen der Sache anschaulich gemacht wird, etwa wie bei Köbel, welcher die „Form der Elen" abbildet und zufügt: „So nym vor dich ein Elemess | do mit mann tuch ussmysst | und teile das selbig Elemess inn 16 geleicher teile | vnd teile alsdann die Ele auch inn fier geleicher fierteile | dem nach mach ein punktē vff das 12 teile des Elemess | so wirstu sehen | das | dass selbig 12 teil das vff dez Elemess gezeichet auch gerad drey fierteil eyner elen ist | dar zu sein die selbē dri fierteil zwölff sechzehen teil einer Elen | die mann also schreibt $\frac{12}{16}$".

Eine eigentliche Erklärung der Werthgleichheit aber trotz vorgenommener Formveränderung haben nur ganz wenige Schriftsteller gegeben; so z. B. Clavius, dessen Darstellung der Lehre von den Brüchen überhaupt zu dem Besten gehört, was in der damaligen Zeit auf dem Gebiete der elementaren Arithmetik geschrieben wurde.

Wie aber das Abkürzen durchzuführen, zeigt uns am ausführlichsten Lucas, indem er vier Wege zum Ziel zu gelangen beschreibt: 1) Probiren der Reihe nach, ob Zähler und Nenner durch 2, 3, (4), 5, (6), 7, . . . dividirt werden können; 2) Aufsuchen der beiden Zahlen des Bruches in eigens zu diesem Zwecke angelegten (Factoren-) Tabellen; 3) die von Boetius gelehrte Methode, bei unächten Brüchen wiederholt den Zähler vom Nenner, bezw. vom bleibenden Reste abzuziehen, bis der Rest kleiner geworden als der Zähler, dann den Rest vom Zähler abzuziehen u. s. f.; 4) die aus Euklid (VII, 1. 2. 39.) abzuleitende und mit unserer heutigen stete Division benützenden übereinstimmenden Methode, welche „weniger Arbeit mache, kürzer und sicherer sei" als alle anderen. Dass die folgende Zeit meist bei der ersten dieser Arten sich befriedigte, geht aus dem Vorangehenden hervor.

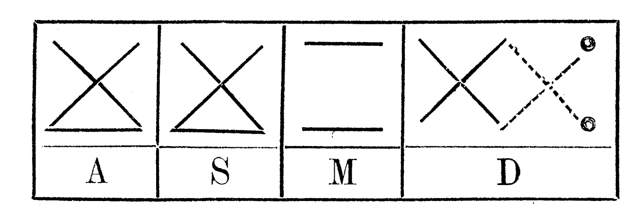
Im Vergleiche zum Abkürzen gewöhnlich mit etwas mehr Aufwand an Worten und Beispielen wird das Gleichnamigmachen von Brüchen mit verschiedenen Nennern gelehrt, jedoch auch bei besseren Schriftstellern kaum anders als bei Köbel: „Mere den tzeler des ersten pruchs | durch den nenner des andern bruchs | vnd was darauss kompt | dz halt an stat des ersten zelers | Dem nach mere den Zeler des and'n bruchs | durch den Nenner des ersten bruchs | vnd wz darauss wirt das halt an statt des andern zelers | Darnach mere einē nenner durch den andern | vnd was vss demselben merē kombt | das ist der gemein nenner yglichs zelers | so setze dann den selbē nenner vnder yglichē zeler so ist es recht gemacht". Falls aber mehrere ungleiche Brüche zu addiren sind, so ist die Ansicht fast Aller, „dass man zuerst die zwei ersten erledigt und dann mit dem Produkte und dem dritten Bruche in gleicher Weise verfährt und so fort bis zu

Ende". — Selten (z. B. von Gemma) wird darauf Rücksicht genommen dass möglicher Weise nicht das Produkt der Nenner, sondern eine kleinere, Zahl den neuen Nenner abgeben könne; gar ein Verfahren, das kleinste gemeinsame Vielfache aller Nenner *(minimum numerum ab omnibus denominatoribus numeratum)* aufzusuchen, habe ich — ausser bei Scheubel (1549) und Clavius — nirgends entdecken können, so dass Reisch z. B. auch die folgende einfache (bei ihm freilich nicht in Zeichen, sondern durch Worte gegebene) Aufgabe $(\frac{1}{2}+\frac{6}{8})-(\frac{2}{3}+\frac{1}{4})$ löst, indem er sie allmählig überführt in $(\frac{8}{16}+\frac{12}{16})-(\frac{8}{12}+\frac{3}{12})=\frac{20}{16}-\frac{11}{12}=\frac{240}{192}-\frac{176}{192}=\frac{64}{192}$, welches Resultat dann unabgekürzt stehen bleibt.

Dagegen wird hierbei gewöhnlich die Frage erledigt, welcher von zwei Brüchen den grösseren Werth habe und meist erledigt nach der Vorschrift: „Multiplicir einen Zeler mit des andern Nenner | so hastu einen newen Zeler | welcher Zeler der gröst ist | derselbig bruch ist auch der gröst"; nur Apian hat ausser dieser Vorschrift noch eine andere: „setz für yeglichen Zeler einen nulla | theyl yeglich in (= durch) seinen Nenner | der gröst quotient zeyget an den grösten bruch | also $\frac{2}{3}$ vnnd $\frac{3}{5}$:

$$\frac{2}{3} \text{ vnd } \frac{3}{5} \qquad \begin{matrix} 2 \\ 20 \\ 3 \end{matrix}\, (6\tfrac{2}{3} \qquad \begin{matrix} \\ 30 \\ 5 \end{matrix}\, (6.$$

42. Dem ersten Theil der Bruchlehre entsprechend werden auch die Grundrechnungsarten mit Brüchen meist handwerksmässig und wie mit möglichster Eile abgethan. So schickt Apian die dem nachfolgenden Schema



beigegebenen Worte voraus: „Item durch dise nachgesetzte Character magst du alle Speties der brüch leichtlich lernē vnd so du sie mit fleiss merkest | magst du die species schwerlich vergessen". Die Anweisungen im Einzelnen reduciren sich dann auf wenige Worte, so beim Addiren „Multiplicir durchs Creutz Addir", ähnlich bei der Subtraktion und Multiplikation. Eigenthümlich ist das Verfahren des Ramus, das Produkt zweier Brüche abzuleiten, bezw. das Verfahren zu erklären. Er fasst, dem natürlichen Gange entsprechend, $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}$ auf als die Aufgabe, 3 Viertheile von $\frac{2}{3}$ zu nehmen und behandelt sie im Anschlusse an die Regel de tri: es sei die Aufsuchung des vierten Gliedes, wenn 1 als erstes zugefügt werde, und wie 1 zu 3 so verhalte sich 2 zu 6, ebenso wie 1 zu 4 so

verhalte sich 3 zu 12, daher erscheine $\frac{6}{12}$ als Resultat. — Die Division kam gewöhnlich darauf hinaus, die Brüche gleichnamig zu machen und dann die Zähler zu theilen; manchmal findet sich dies auch mit ähnlichen Worten ausgedrückt; Apian aber schreibt vor „Setz den theyler zu der rechten handt | vnnd multiplicir durchs Creutz | setz die product nach anzeygung des Characters". Wenn ich nun noch zufüge, dass nur Stifel — auch Stevin (1584) noch nicht — vom Umkehren des Theilers mit nachfolgender Multiplikation spricht und sich etwas hierauf zu gute thut, endlich dass man alle Zusammenstellungen von Ganzen, gebrochenen und gemischten Zahlen als getrennte Fälle bei den Rechnungsarten behandelt und dabei jeder ganzen Zahl 1 als Nenner beifügt, so habe ich in der That Alles angegeben, was in den Bereich der als solche abgehandelten Bruchlehre gehört; höchstens dass ich noch wenige Worte sage über die sog. „Brüche von Brüchen".

Wie heutzutage noch „ein halb Viertel" die stehende Bezeichnung für $\frac{1}{8}$ ist, so hat man früher ebenfalls und allgemeiner Bruchtheile von Brüchen betrachtet und, wenn auch nur in beschränkter Weise, bei dem Rechnen verwendet. Eigenthümlich ist die verschiedenartige Bezeichnung, welche von Verschiedenen dafür angewandt wird. So schreibt Peurbach $\frac{2}{5}$ eines Sechstels in folgender Weise: $\frac{2}{5}\,{}^{1}_{6}$, d. h. „so dass der Hauptbruch, der wieder getheilt ist an die letzte Stelle kommt, jedoch ohne einen Bruchstrich". Apianus aber sagt: „So schreib ich das also $\frac{2}{5}$ von $\frac{1}{6}$ oder also $\frac{2}{5}\frac{1}{6}$" und in gleicher Weise auch Micyllus. Dagegen schreibt Stifel die Theile des ursprünglichen Bruches rechts erhöht von demselben und bezeugt ausdrücklich in seiner Ausgabe von Rudolff's Coss, „das ich erstlich aus Margarita Philosophica gelernet hab solliche brüch also zu schreiben $\frac{2}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ fl. Das ist ein dritteyl eines vierteyls zweyer fünffteyl von einem floren facit $\frac{1}{30}$ fl.", während ich wenigstens in der 2. Ausgabe der *Marg. phil.* (1504) eine mit der des Apian übereinstimmende Darstellung finde; Regius aber schreibt wie im Mittelalter die sämmtlichen Zähler und Nenner je in eine Reihe auf, bezw. unter denselben Bruchstrich.

Dass aber „mit solchen Brüchen nichts anzufangen sei, ausser wenn sie auf einfache Brüche zurückgeführt sind", sagt uns wörtlich schon Peurbach, und so findet sich bei ihm wie bei Allen die Regel, dass man das Produkt sämmtlicher Zähler durch das sämmtlicher Nenner zu theilen habe.

Es ist aber nicht ausser Acht zu lassen, dass verschieden von den eben betrachteten Brüchen von Brüchen unter derselben Bezeichnung zuweilen auch noch anders zu deutende Bruchverbindungen auftreten. Wiederum entsprechend der heute noch oft zu hörenden Redeweise

„anderthalb Viertel“, was wir durch $\frac{1\frac{1}{2}}{4}$ darzustellen hätten, finden sich in den Büchern des 16. Jahrhunderts Zusammenstellungen wie $\frac{2}{3}\,\frac{3}{5}$ jedoch in dem Sinne, dass zwei und drei Fünftel Dritttheile zu nehmen seien. Das Verwandeln in einen einzigen Bruch, bei Cardanus z. B. *infilzatio seu insitio*, also Einfädelung genannt, geschieht nun nach leicht anzugebender Regel, so dass $\frac{2}{3}\,\frac{3}{5}\,\frac{5}{7}$ durch die Umwandlungsstufe $\frac{13}{15}\,\frac{5}{7}$ hindurch den Schlusswerth $\frac{96}{105}$ giebt. Dass hier vorliegt, was man in neuerer Zeit „aufsteigende Kettenbrüche“ genannt hat, bedarf nur der Erwähnung. — In anderer Art fasst Clavius die *„insitio“* von Brüchen auf. Benützen wir wieder das vorige Beispiel, so ist ihm $\frac{2}{3}\,.\,\frac{3}{5}$ (wie er schreibt) nicht $=\frac{2\frac{3}{5}}{3}$, sondern es ist ihm ein Zeichen für zweierlei: entweder kann jene Zusammenstellung bedeuten „zwei Drittel eines Fünftels addirt zu $\frac{3}{5}$“ oder „zwei Drittel von drei Fünfteln addirt zu $\frac{3}{5}$“; im ersteren Falle ist nach unserer heutigen Bezeichnung der Werth $=\frac{2}{3}\,.\,\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=\frac{11}{15}$, im zweiten $=\frac{2}{3}\,.\,\frac{3}{5}+\frac{3}{5}=\frac{15}{15}$. Wie für zwei Brüche, so fügt Clavius auch die Regel bei, wie mehrere Brüche aufzureihen sind. Dieselbe, weitläufig auszusprechen, lässt sich leicht ablesen, wenn wir Buchstaben verwenden: $\frac{a\;x\;r}{b\,.\,y\,.\,s}$ würde nach der ersten Art $=\frac{(ry+x)\,b+a}{bys}$, nach der zweiten aber $=\frac{(ry+rx)\,b+axr}{bys}$ gefunden, während die gleiche Zusammenstellung bei Cardanus bedeutet* $=\frac{(ay+x)\,s+r}{bys}$. — Auf seine erste Art kommt Clavius gelegentlich der Division gemischter Zahlen durch ganze. Ausserdem nämlich, dass er $100\frac{5}{6}:8$ ausrechnet $=\frac{605}{6}:8=\frac{605}{48}=12\frac{29}{48}$, führt er auch die Division durch, wie folgt $=100:8+\frac{5}{6}:8=12+\frac{4}{8}+\frac{5}{6}\,.\,\frac{1}{8}=12+\frac{5}{6}\,.\,\frac{1}{8}+\frac{4}{8}$ und dies ist nach seiner Bezeichnung $=12$ und $\frac{5}{6}\,.\,\frac{4}{8}$. Seine zweite Art, die *„insitio“* aufzufassen, findet Verwerthung bei den geometrischen Reihen.

Wenn ich vorhin sagte, dass die Behandlung des Bruchrechnens meist eine dürftige sei, so bezieht sich das auf die diesem Abschnitte gewidmeten besonderen Capitel der Bücher aus jener Zeit; in den dem praktischen Rechnen gewidmeten Theilen derselben hat man dann meist die Ergänzung zu jenen Capiteln zu suchen. So führe ich z. B. betreffs des Multiplicirens mit gemischten Zahlen zwei Beispiele aus Apian's Buch an, indem ich in Bezug auf die dabei benützte Methode i. A. auf den unten folgenden

---

* Dass bei der Wahl solcher Zahlbeispiele von zwei Brüchen, worin je der Nenner um 1 grösser ist als der Zähler, die Cardanische Art der Einfädelung und die erstere des Clavius dasselbe Resultat ergeben, ist leicht ersichtlich.

Art 50 von der „Wälschen Praktik“ verweise. Es sei erstens 453 mit $124\frac{1}{2}\frac{3}{5}$ zu multipliciren.

$$\begin{array}{rr} 453 & 124\frac{1}{2}\frac{3}{5} \\ & 45300 \\ & 9060 \\ & 1812 \\ & 90\frac{3}{5} \\ & 45\frac{3}{10} \\ \hline \text{Facit} & 56307\frac{9}{10} \end{array}$$

$$\frac{3}{1} \times \frac{3}{10}, \frac{1}{10}, \frac{3}{10}$$

Zweitens werde „multiplicirt gantz vn gebrochen mit gantzen vnd gebrochen“, und zwar $1357\frac{2}{7}$ mit $2468\frac{5}{6}$. Man erhält:

$$\begin{array}{lr} 1357\frac{2}{7} & 2468\frac{5}{6} \\ & 2714000 \\ & 542800 \\ & 81420 \\ & 10856 \\ \hline \frac{2}{7} \text{ von } 2468 & 705\frac{1}{7} \\ \frac{1}{2} \text{ von } 1357\frac{2}{7} & 678\frac{9}{14} \\ \frac{1}{3} \text{ von } \quad , & 452\frac{6}{14} \\ \hline & 3350912\frac{3}{14} \end{array}$$

43. Es ist hier der Ort, der **Decimalbrüche** Erwähnung zu thun, auf welche ohnedem schon durch die in Art. 33 behandelte eigenthümliche Divisionsmethode Apian's und durch das in Art. 38, c) besprochene vielfach angewandte Verfahren der Wurzelausziehung unsere Aufmerksamkeit gelenkt wurde. Schon die Inder hängen bei Wurzelausziehungen, welche mit grösserer Genauigkeit vorgenommen werden sollen, eine Anzahl von Nullen an die zu radicirende Zahl und dividiren dann den erhaltenen Werth durch die entsprechende Potenz von 10, und auch bei Johannes Hispalensis,* einem spanischen Juden des 11. Jahrhunderts, findet sich das gleiche Verfahren. Weitere Ausnützung dieser Methode sucht man bis jetzt während der nächsten vier Jahrhunderte vergeblich. Erst gegen Ende des 15. Jahrhunderts kommt man von Seiten der rechnenden Astronomie darauf, die alt überkommene Sexagesimaltheilung zu verlassen und an ihrer Stelle die decimale Theilung zu verwenden: theilweise geschah dies schon durch den auch von mir mehrfach genannten Peurbach, am meisten aber verdankt das Decimalbruchrechnen dessen Schüler Regiomontan, der „kühner und consequenter als sein Lehrer“ die Decimaltheilung in seine goniometrischen Tafeln aufnahm und so von grosser

* Vgl. *Trattati d'Aritmetica pubblicati da Baldassare Boncompagni: II. Joannis Hispalensis Liber Algorismi de pratica arismetrice.* Roma 1857, S. 86—90. Hierauf hat Cantor zuerst aufmerksam gemacht: s. dessen Math. Beiträge S. 275.

Bedeutung für die Ausbreitung derselben wurde (1475 und später). Wann und wo während der ersten Hälfte des 16. Jahrhunderts sich noch Anklänge an Decimalbrüche finden, wurde oben (S. 70) besprochen.

Aber stets ist hierbei ein klares Aussprechen des Grundsatzes, das Gesetz des Stellenwerthes von nun ab auch über die Einerstelle hinaus nach rechts gelten zu lassen, nicht aufzufinden, obwohl er, wie wir heute wohl sagen, nahe genug lag. Und merkwürdigerweise verging noch fast ein halbes Jahrhundert, bis die erste zusammenhängende Darstellung der Lehre von den Decimalbrüchen gegeben wurde: es ist der in der Geschichte der Physik wohlbekannte Simon Stevin, dem wir dieselbe verdanken. In einem den sonderbaren Titel *„La Disme“* (= der Zehnte) tragenden Schriftchen von nur 10 Octavblättern veröffentlichte er (1585) seine Anweisung *„facilement expedier par nombres entiers sans rompuz tous comptes se rencontrans aux affaires des Hommes“*. Er geht aus von der beim Anschreiben unserer Ziffernverbindungen bestehenden Gültigkeit *„de la dixiesme ou disme progression“,* d. h. von dem dabei benützten Uebereinkommen, dass „jede Einheit der zehnte Theil der ihr links vorangehenden Einheit ist“, und wie wir heute jede hiernach angeschriebene ganze Zahl als „Einer“ bezeichnen, so nennt er sie *„Commencement“* und er gibt ihr ⓪ als Zeichen*, also z. B. 365⓪. Indem er nun jeden zehnten Theil der Einheit des *commencement* als *„Prime“*, jeden zehnten Theil der Primeinheit als *„Seconde“*, ... und alle solche Zahlen als *„Nombres de Disme“* benennt, gibt er auch diesen Theilen bezw. die Zeichen ① ② ③ . . . . , so dass, was wir heute 8,9307 schreiben, bei Stevin sich darstellt in der Form 8⓪9①3②0③7④.

Die Analogie dieser Benennung und Bezeichnung mit der der ganzen Zahlen, wie sie uns von den alten Indern berichtet wird, ist so auffallend, dass ein Hinweis darauf an diesem Platze wohl gestattet ist. Während wir nämlich von den sogenannten Stufenzahlen 1, 10, 100, 1000, . . . nur die vier ersten, dann die 7., 10., 13., 19, ... mit besonderen Namen benennen, so hatten dagegen die Inder schon seit den ältesten Zeiten für jede einzelne jener Stufen je einen besonderen Namen im Gebrauch, so dass sie 481556 z. B. als „6 und 5zig und 5 *Sata* und 1 *Sahasra* und 8 *Ajuta* und 4 *Prajuta*“ aussprachen. In gleicher Weise gibt Stevin jeder der unter 1 herabreichenden Stufen $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, . . . ebenfalls besondere Namen und sogar Zeichen, und wie diese später verlassen wurden, da dann unter Zuhülfenahme des die Ganzen von den Bruchtheilen trennenden Kommas die Stelle selbst jeder Ziffer ihren Werth verlieh, so wird man hierin wohl auch eine höchst kräftige Unterstützung für die Richtigkeit

* Die Zeichen von Stevin sind Ziffern mit umschliessenden vollständigen Kreisen.

der von Wöpcke aufgestellten Ansicht erblicken müssen, wonach die indische Art des Aussprechens „geradezu auf das Princip des Stellenwerthes führen musste“.

Doch kehren wir zu Stevin zurück! Nach Aufstellung seiner Definitionen lehrt er, wie mit seinen *Nombres de Disme* die Grundrechnungsarten durchzuführen seien: zu zeigen, wie die Rechnungen wirklich stets ohne eigentliche Anwendung der Brüche erledigt werden, ist dabei sein Hauptaugenmerk. Die Beweise für die Richtigkeit führt er durch nochmaliges Durchrechnen desselben Beispiels unter Benützung der Brüche. Um ein Beispiel anzuführen, setze ich hier neben bei, wie sich bei ihm die Multiplikation der Zahlen ausnimmt, welche wir 0,000378 und 0,54 schreiben. — Für die Division gibt Stevin die Vorschrift: *„On divisera les nombres donnez (omettant leurs signes) selon la vulgaire maniere de diviser par nombres entiers“*, und zur Bestimmung der Natur des Quotienten *„le dernier signe du diviseur soubstraira du dernier signe du nombre à diviser“*. Wenn freilich, wie bei der Division von 7② durch 4⑤, die Zeichen des Divisors höher sind als die des Dividenden, *„l'on mettra joignant le nombre à diviser autant des 0 qu'on veut ou autant qu'il sera mestier“* und man erhält das Nebenstehende. Falls aber 4① durch 3② zu dividiren wäre, so würde freilich 13⓪ 3① $3\frac{1}{3}$② der vollständige Quotient sein, jedoch genügt es *„en tel accident l'on peut approcher si pres comme la chose le requiert, omettant le residu“*. Das Verfahren beim Wurzelausziehen ist ähnlich.

```
      ④⑤⑥
      3 7 8
        5 4②
  -----------
    1 5 1 2
  1 8 9 0
  -----------
  2 0 4 1 2
  ④⑤⑥⑦⑧
```

```
32
7000 (1750⓪
4444
```

In solcher wohl noch etwas schwerfälligen Form hat Stevin zum ersten Male die Ausdehnung des Gesetzes vom Stellenwerth vorgetragen und hat die Anwendbarkeit davon auf die verschiedenen Rechnungen des praktischen Lebens durch Beispiele erläutert; was er gibt, nennt er selbst nicht etwa „eine bewundernswerthe Erfindung, sondern eine so einfache Sache, dass sie gewissermassen nicht den Namen einer Erfindung verdient, sondern wie ein dummer Bauer rein zufällig einen grossen Schatz findet, ohne dabei irgend welches Wissen aufgeboten zu haben, so ist auch in unserm Falle ganz das Gleiche eingetreten“.

Die weitere Entwickelung der Theorie und Praxis der Decimalbrüche gehört dem 17. Jahrhundert an, deren Darstellung würde also die Grenzen meiner Arbeit überschreiten.

44. **Regel de tri.** — Die vorangehenden Abschnitte haben gezeigt, dass die während des 16. Jahrhunderts gegebenen Darstellungen der Rechenoperationen in weitaus den meisten Fällen eine Einsicht in das Wesen und die Gründe der Entwickelungen nicht vermittelten, ja nicht vermitteln

wollten; ein Abrichten mehr als ein Unterrichten war der Erfolg bei der Unterweisung im Rechnen. Wenn schon bei den Grundrechnungsarten überall her das „Thu ihm also" entgegentönt, so noch mehr bei den Anweisungen oder „Regeln" zur Lösung der im gewöhnlichsten Geschäfts- und Verkehrsleben vorkommenden Aufgaben, am deutlichsten bei der vielberühmten Regel de tri. Bei den Indern schon sich findend, spielt in der von uns betrachteten Zeit diese „vom Volke der Ungelehrten" *„corrupte"* als *Regula de tre* oder *tri,* von Einigen aber unter Hervorhebung ihres besseren Lateins als *Regula trium* oder *de tribus* bezeichnete Vorschrift eine grosse Rolle und nimmt oft genug unter Vortritt vor der Bruchlehre die erste Stelle ein sogleich nach Erläuterung der Grundrechnungsarten; sie werde gebraucht „gleycher weyss alss eyn hammer in eyner schmit zu vil hübschern dingen dan er an ym selbst ist" lässt sich schon Widman vernehmen und sie sei „niemals genug gerühmt" sagt von ihr Gemma, und so wird sie selten mit bescheidenem Namen „der Kauffleut Regel", bei Cardanus *„clauis mercatorum",* seltener „bey den erfarnē der kunst Mathematice Regula Proportionum" genannt, am häufigsten aber heisst sie „wegen ihres unendlichen Nutzens und vmb jrer subteyligkeit vnd artlicher kunst willen" die gulden Regel *(regula aurea, règle dorée),* und im folgenden Jahrhundert noch erhebt sie ein Rechenmeister über die Algebra, während Stifel sich doch nur dahin äussert, dass „gar wunderbarlich wickeln vnd verknüpffen sich zusammen die Detri vnd die Coss also dass die Coss im grund auch wol möchte genennet werden die Detri... Vn̄ steckt also die gantz Coss in der Regel Detri | widervmb steckt die Gantz Detri in der Coss..."

Und doch ist die ganze Leistung dieser Detri die höchst einfache, aus drei bekannten Zahlen eine unbekannte vierte zu finden, wie in dem Beispiele: 3 ℔ Waare kosten 12 ₰., was kosten 5 ℔? Von den drei hier vorkommenden Zahlen ist „die erst die zale des dings oder der ware, die mann kauffen oder verkauffen will *(numerus emptionis vel emptae rei)* die setz allweg gegē der lincken hant | vff die erst stat | Vnd die tzale des gelds | das man vmb die ware geben wil od' das ding cost *(numerus pretii)* | soltu vff die zweit stat gegen der rechten hant | dz ist in die mitte stellen | Vnnd die zale der frage *(numerus questionis)* vff die drit stat gegen der rechten hant schryben", d. h. folgendermassen:

3 12 5

Und nun ist der stets wiederkehrende Wortlaut der Regel de tri genau entsprechend dem, wie ihn z. B. Böschensteyn in den Versen ausspricht:

„Das mittel mit dem hindern multiplicier
„Dasselbig mit dem vordern Diuidier
„Was dir kumbt zu stunden
„Hast du der frag antwort gefunden".

Seltener begegnet man der Vorschrift, dass auch das letzte Glied mit dem Quotienten aus dem mittleren und ersten oder dass das mittlere mit dem Quotienten aus dem letzten und ersten multiplicirt werden solle: aus diesen drei Auflösungsarten ebensowohl wie aus der Verwendung von drei Zahlen führe sie ihren Namen als *règle des trois,* meint Forcadel.

Da bei solchem rein mechanischen Rechnen in der That „beynahe die gröste sorg an dem vffschreiben der Fragē | vñ wie mann die in die regel ordñ sol | gelege ist", ist unmittelbar klar; ausdrücklich wird deshalb auch regelmässig darauf aufmerksam gemacht, dass „alweg die erste zale gegē der lincken hant vnd die Leste zal gegen der rechten hant in dem namen vnd der beteutung geleich sein sollen", so dass Riese auch geradezu als Regel aussprechen kann: „setz hinden das du wissenn wilt | Das ihm vnder den andern zweyen am namen gleich ist | setze forn | vñ das ein ander ding bedeut | mitten".

Sind also beide in Maassen u. s. w. von verschiedenen Sorten angegeben, so hat vor Anwendung der Regel eine Umwandelung in die niedrigere Sorte stattzufinden, entsprechend dem Gedächtnissverse:

„Hinden vnd vornen gleich namen richt
„Das grösser von wegen des kleinern zerbrich".

Das Multipliciren und Dividiren wurde darauf meist in der durch die Hauptregel angegebenen Weise durchgeführt und nur selten und erst spät wurde beachtet (Riese z. B. 1533 spricht kein Wort darüber), dass die dabei auszuführende Arbeit erleichtert werden könne durch gleichmässiges Verkleinern einer äussern und der mittleren der drei Zahlen, obwohl schon Grammateus und Apian auf diesen „Fortheyl" aufmerksam gemacht hatten. So rechnet Apian:

„Ein Exempel.

℔	fl.	℔	gefortheylt
48	36	124	durch 4
12	36	31	durch 4
3	9	31	durch 3
	Stet im Fortheyl		
1	3	31	Facit 93 fl."

Eine Erklärung besonders bezüglich der Stellung der drei Glieder sucht man bei der landläufigen Darstellung vergebens; eine solche ergibt sich nur bei denjenigen, welche entweder unter Verweisung auf Euklid oder unter mehr ausführlicher Darlegung der betreffenden Sätze die Regel de tri auf die Lehre von den Proportionen gründen. Eben den letzteren Schriftstellern fällt es denn auch leicht, die Fälle der Regel zu behandeln, bei welchen in einem oder mehreren der drei gegebenen Glieder gebrochene

Zahlen vorkommen. Aber durch eine besondere Reihe von Unterscheidungen und Regeln nur konnten sich die helfen, welche rein mechanisch die Sache behandelten, dem entsprechend auch keinen Anstoss daran fanden, die Regel de tri in Brüchen der eigentlichen Bruchlehre vorangehen zu lassen oder die letztere mit der ersteren zu verschmelzen. Es boten sich dann als wohl zu unterscheiden die Fälle dar, wo nur je in einem der drei Glieder oder je in zweien derselben gebrochene Zahlen vorkommen; dem entsprechend hatte man dann auch besonders zu erlernen „die sechs Regel der Prüch", von welchen Riese z. B. nur die drei ersten behandelt, indem er vorschreibt: „Würdt dem fordersten ein Bruch zugesatzt | so geh mit seinem Nenner ins hinder | Wo dem mitlen oder dem hindern | so geh mit seinem Nenner ins forder | Alsdann brich die gantzen in seine theyl bei dem bruch". Bei Böschensteyn aber finden sich alle ausführlich aufgezählt; ich wähle als Beispiel die letzte: „Die sechst Regel der prüch | ist an allen orten geprochen. Item einer kaufft $16\frac{1}{4}$ eln tuchs von $6\frac{1}{2}$ fl. was kosten $2\frac{1}{3}$ eln | setz wie nach volgt:

Eln	fl.	eln
$16\frac{1}{4}$	$6\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{3}$

Nun prüch yedes mit seinem pruch | vnd für dann den mitteln pruch auff das forder | so stehet es also.

130	13	7

Nun für den fordern pruch auff das hynder | vnd den hyndern auff das forder | so stehet es dann in der Regel | wie hernach volgt.

390	13	28

Nun machs nach der Regel | so findest du das die $2\frac{1}{3}$ eln kosten 7 fl 25 ₰. $\frac{1}{5}$ ₰."

Reichelstein fasst seine ganze Anweisung in die mehr kurzen als verständlichen Verse zusammen:

Wann der ersten zal | merck auff du |
  De Tri ein bruch gesetzt wirt zu
Mit seim Nenner in die letst tritt
  Aber der Mitt vnd letst lass nit
Mit den Nennern in die erst schantz |
  Also kommen die brüch ins gantz.

Die Schriftsteller, welche wie Apian, Gemma etc. die Bruchlehre vor der Regel de tri abhandeln, haben für den Fall, dass im Ansatze der letzteren Brüche vorkommen, leichtes Spiel: sie verfahren mit diesen genau nach der für ganze Zahlen gegebenen Vorschrift.

45. Ein besonderer Fall der Regel de tri, die *regula conversa* oder *eversa,* findet, wenn auch nicht bei allen, so doch bei den besseren Schriftstellern oftmals besondere Erwähnung, der Fall nämlich, dass die beiderlei

in die Rechnung eingehenden Grössen im umgekehrten Verhältnisse stehen. Sehr selten aber wird das Wesen der Sache erläutert, die Aeusserlichkeit überwiegt; auch Männer wie Apian erklären: „Dise Regel heist darumb Conversa | das sie die Exempel vmbkert | was Regula de Tri vorne setzet | das setzt dise Regel hinden“. Stets werden sofort Beispiele beigezogen und ausgerechnet; nur bei Clavius, höchstens noch bei Gemma, findet sich eine genügende Erklärung.

Als Probe für die Regel de tri wird fast durchgängig die Umkehrung des Beispiels empfohlen, d. h. die Annahme der zuvor gefundenen Zahl als einer bekannten und die Ausrechnung einer der zuvor bekannten; zuweilen wird im Anschlusse an Euklid auch das Vergleichen des Produktes aus dem mittleren und dritten Gliede mit dem aus dem ersten und dem gefundenen empfohlen; Apian aber verwendet auch „die prob durch 9. 7. 11 oder durch welche zal du wilt auss yeglicher zal in sunderheit“, d. h. das Bilden der zu den vier Zahlen gehörigen Proben α, β, γ, δ und Vergleichen der Produkte $\alpha\delta$ und $\beta\gamma$; „sein die zwey product einander gleich | so hastu den kauff recht gemacht“.

Die **zusammengesetzte Regel de tri** wird oft nicht erwähnt, von Manchen nur in der einfachsten Form als *Regula duplex* oder „zwifach Regel de tri“ behandelt; erst Clavius spricht von einer *Regula trium composita*. Das Beispiel etwa: 8 Ctr. 15 Ml. weit zu führen kosten 4 fl., was beträgt der Fuhrlohn für 6 Ctr. 36 Ml. weit? wird von Regius zurückgeführt auf zweimalige Anwendung der Regel de tri:

Ctr.	fl.	Ctr.		Ml.	fl.	Ml.	
8	4	6	Facit = 3 fl.;	15	3	36	Facit = $7\frac{1}{5}$ fl.

Apian aber schreibt dieselbe Aufgabe in folgender Form an:

Centner 8 > 4 < 6 Centner
Meilen 15 / \ 36 Meilen

und führt sie ohne weitere Erklärung durch Multiplikation der zusammengehörigen Zahlen zurück auf die einfache Aufgabe de tri:

120 4 216,

deren Facit ebenfalls $7\frac{1}{5}$ fl. ist. — Clavius bespricht beide Arten der Lösung, wie immer, klar und gründlich.

46. Ueberblickt man die in den Büchern des 16. Jahrhunderts nach der Behandlung der goldenen Regel noch folgenden Abschnitte und Beispiele, so muss man Gemma Recht geben, wenn er in Bezug auf deren Lösung sich dahin ausspricht, dass „die vielen verschiedenen Regeln oder Rechenvorschriften aus jener einen und mit Recht goldenen Regel wie die Aeste aus dem Stamme ihren Ursprung nehmen“. In der That, alle die Abschnitte, die wir auch heute noch in den Rechenbüchern finden und die

schon damals unter den verschiedensten Namen sich einführen, als Gesellschaft der Kauffleut *(regula consortii seu societatis)*", „Regula Alligationis", „Von Gewinn und Verlust", „Vom Stich", „Von Pagament und Schickung des Tygels", „Vom Münzschlagen", „Regula Fusti oder Fusci" — sie sind alle nur Anwendungen der einen Regel de tri.

Als Beispiel der Durchführung möge hier eine „theylung des geldts vnnd gewins in Gesellschaft" Platz finden: Drei legen bezw. 12, 46, 29 fl. zusammen und gewinnen mit einander 234 fl. Wie viel erhält Jeder davon? „Machs also. Summir das eingelegte geldt | wirdt darauss der theyler | den setz zu der lincken handt | den gewinn in die mitt | das

Theyler	gewin				
87	234.	—12 fl. facit	32 fl.	2 sh.	$6\frac{6}{29}$ hlr.
		..46 fl. facit	123 fl.	5 sh.	$23\frac{23}{29}$ hlr.
		—29 fl. facit	78 fl.		

eingelegt gelt zu letst | yegliches in sunderheit | vn̄ machs nach der Regel de Tri | Multiplicir eines yegliche̅ gelt in sunderheit mit dem gewinn. Nach der theylung findest du wz einem yeglichen zustehet".

47. **Besondere Lösungsarten.** — Dass die Regel de tri, gleich einfach nach Entstehung wie Anwendung, für weitaus die meisten Aufgaben des gewöhnlichen bürgerlichen Verkehres völlig ausreichte, ist klar und durch die Lehrbücher des 16. Jahrhunderts bezeugt. Während aber wir heutzutage, in den Schulen wenigstens, die jene Regel vertretende Schlussrechnung allein zur Anwendung bringen, war während des 16. Jahrhunderts noch eine Reihe besonderer Lösungsarten gebräuchlich, welche für bestimmte Aufgaben oder Gruppen von Aufgaben in Anwendung kamen und welche, ursprünglich unzweifelhaft durch Vermittelung algebraischer Methoden gefunden, später durch ausgedehntere Benützung der Algebra wieder verdrängt wurden. Dahin sind zu rechnen die alt überkommene „Regula Falsi", die merkwürdige „Regula virginum" und die auch jetzt noch verwerthete einstens berühmte „Wälsche Praktik". Die beiden letzteren sollen hier noch ausführlicher betrachtet werden.

48. Die **Regula Falsi** werde ich hier übergehen, da ich dieselbe in ihrer geschichtlichen Entwickelung besonders zu behandeln gedenke.

49. Die **Regula virginum** ist, in unserer heutigen Sprache zu reden, eine Vorschrift, vermittelst Probirens die Lösungssysteme einer unbestimmten Gleichung ersten Grades zu finden. „Die würt gebraucht — sagt Riese — in solchem fal | Als wa Menner | Frawen | vn̄ Jungfrawen in einr zech bei einander ein anzal gelt vngleich zegelten (= zu bezahlen) haben." Ich wähle zur Verdeutlichung zunächst Riese's einfachstes Beispiel: „Item 21 personen Menner vnd Frawen | haben vertrunken 81 ₰. Ein man sol geben 5 ₰. | vn̄ ein fraw 3 ₰. Nun frage ich wieuil ieder

in sonderheit gewesen". Ersetze ich hierin zum Behufe der allgemeinen Lösung die Zahlen 21, 81, 5, 3 bezüglich durch P, S, a, b und bezeichne ich die Zahl der Männer durch x, also die der Frauen durch $(P-x)$, so besteht die Gleichung: $ax + b.(P-x) = S$, woraus $x = \frac{S - b.P}{a - b}$. Die Betrachtung dieser Formel ermöglicht uns heute zu verstehen, was Riese betreffs der Auflösung sagt: „Setz also:

21 person	Man 5 Fraw 3	₰.	81 ₰.

Nim 3 ₰. von 5 ₰. | bleiben 2. der teyler. Nun multiplicir 3 mit 21. kommen 63. die nimm vonn 81 ₰. | bleibt 18. die teyl ab mit 2. kommen 9 menner | die nim von 21. personen | bleiben 12. souil seind der weiber".

Von diesem einen Beispiele abgesehen werden regelmässig dreierlei Personen vorgeführt. So gibt Apianus, bei dem ich überhaupt als dem ersten die in Rede stehende Regel finde, folgendes Beispiel als erstes: „Item 26 personē haben verzecht 88. ₰. dabei sein man | frawen | vnd junckfrawē | sol ein man gebē 6. ₰. | ein fraw 4. ₰. | ein junckfraw 2. ₰. Ist die frag wie vil sein man | frawē | vñ junckfrawē yeglicher in sunderheit in der zech". Ersetzen wir auch hier wieder 26, 88, 6, 4, 2 bezw. durch P, S, a, b, c und nennen wir die Zahl der Männer $= x$, die der Frauen $= y$, also die der Jungfrauen $= P - x - y$, so besteht die Gleichung $ax + by + c.(P - x - y) = S$ oder $(a-c).x + (b-c).y = S - c.P$, wonach man also $S - cP$ in zwei solche Summanden zu zerlegen hat, dass der eine ein Vielfaches von $(a-c)$, der andere von $(b-c)$ sich darstellen lässt. Wir verstehen also, wenn Apian vorschreibt: „Machs nach der Regel.

	Ein man 6 ₰.		4 theyler
26 person	Ein fraw 4 ₰.	Subtr. 2	2 theyler
	Junckfraw 2 ₰.		0 — —

2. mal 26. ist 52. subtrahir von 88. bleibt 36. die theyl durch 4. wie wol du 4.9. mal habn magst | darffstu das nit so vil nemen | auff das du 2. auch darinn nemen magst. Darumb nimm 4. acht mal bleiben 4. darinne hastu 2. zweymal. Facit 8. man 2. Frawn. Das sein 10. personen | die subtrahir vō 26. bleiben 16. sovil sein der Junckfrawen".

Da aber nicht nur $4.8 + 2.2 = 36$, sondern auch z. B. $4.6 + 2.6 = 36$ oder $4.5 + 2.8 = 36$ so führt auch Apian diese verschiedenen Lösungen an und, soweit ich finde, ist er auch der einzige, welcher die hieraus folgende Verallgemeinerung ausspricht: „Also soltu dich in anderen wissen zu halten | dann es mag offt ein Exempel manicherley zal der personen erleiden | vnd wirt das facit allenthalben gerecht".

Während wir heute unter Zuhülfenahme der Algebra uns wohl Gang und Sinn solcher Rechnung verdeutlichen können, zeigt gerade diese so recht augenfällig, wie mechanisch noch das Rechnen in jenen Zeiten allüberall keimenden neuen Lebens behandelt wurde; man muss hinzunehmen, dass sofort an der Spitze des unsern Gegenstand enthaltenden Abschnittes die allgemeine Vorschrift mitgetheilt wird in einer geradezu geheimnissvollen Weise: „Setz die zal der personen zu der linckenn handt. Die zal des gelds | so sie verzert haben | zu der rechten | in die mitt setz die namen der personen mit sambt dem geld das ein person gibt. Nach dem resoluir einer yeglichen persone gelt in das kleinst gelt | so in dem Exempel gefunden wirt. Subtrahir die kleiner zal von den obern von yeglichem in sunderheit | die vberig heissen theyler. Mit dem kleinern geldt multiplicir die zal der personen u. s. w." (Apian).

Als Beispiele für die Anwendung unserer Regel finden sich, den vorigen entsprechend, meist nur solche, bei denen Männer und Frauen, oft im Verein mit Jungfrauen und Gesellen, in einer Zeche eine gewisse Menge Geldes „vertruncken" haben; seltener sind die Fälle, wo um eine bestimmte Summe Geldes verschiedene Waaren je zu bestimmten Preisen oder „auch Rinder schaff vñ ander vich durch einander gekaufft vnd alles das in solcher gestalt gefragt wird". — Der Name der Regel aber, *regula virginum,* ist offenbar entnommen aus jenen ersten Beispielen, wie auch Micyllus (1555) meint *„regula quam ab eo, ut videtur, appellarunt, quod virginum personae ac nomen inter exempla illius subinde repetuntur. Quomodo et apud dialecticos cornuti et crocodilitae sylogismi nominantur, in quibus cornuum et crocodilorum crebra mentio fieri solet".* Merkwürdiger ist es, dass „etlich die Regel auch nennen Cecis", was Klügel auf *coecus* (= für Blinde) zurückführen will, da sie gleichsam blind herumtastend gefunden worden; mit Recht aber weist Wildermuth solche Erklärung zurück und lässt an das Wort „Zeche" denken, was ursprünglich das zu gemeinschaftlichem Trinken zusammengelegte Geld bezeichne.

50. **Wälsche Praktik.** — Auch im 17. Jahrhundert hat sich die „Jungfrauenregel" noch erhalten; während sie aber nur für eine ziemlich eng umgrenzte Gruppe von Aufgaben anwendbar war, hatte eine andere Rechenweise, die schon oben erwähnte „Wälsche Praktik" den Vorzug, ähnlich der Regel de tri fast das gesammte Gebiet der im praktischen Leben vorkommenden Aufgaben zu umspannen. Aller Ueberlieferung zufolge in Italien entstanden und dort, weil dem kaufmännischen Bedürfniss genügend, vermuthlich viel geübt und ausgebildet, hat sie sich wohl zu Anfang des 16. Jahrhunderts in die nördlichen Länder, nach Frankreich und Deutschland, ausgebreitet, wenigstens finde ich sie aus diesen Zeiten erst in gedruckten Rechenanleitungen. Wie schon früher hervorgehoben,

scheint für Frankreich auch in diesem Punkte La Roche die Vermittlerrolle übernommen zu haben; bei ihm finde ich sie zuerst dargestellt, in deutscher Sprache zuerst bei Henricus Grammateus (1518), auf dem Gebiete der Coss dem Vorläufer von Chr. Rudolff, und dann bei Apianus, welcher dem entsprechend auch gleich dem ersteren dem Titel seines Buches beifügt „Sunderlich was fortel vn̄ behendigkeit in der Welschen Practica vnnd Tolleten gebraucht würt | des gleichen vormals weder in Teutscher noch in Welischer Spraach nie getruckt“.

La Roche widmet der Sache einen besonderen Abschnitt (Fol. 77^{v} ff.), den er „*Des regles briefues aultremēt dictes regles de practique*“ überschreibt; er fasst den Begriff der Praktik etwas enger als er nachmals zumal in deutschen Werken auftritt. La Roche geht davon aus, dass „man in allen Ländern als Münzen *liure, solz* und *deniers* gebrauche“, und dass zwar der Werth des *liure* von Land zu Land verschieden sei, dass es aber überall in 240 *deniers* (= 20 *solz*, also 1 *sol* = 12 *deniers*) eingetheilt werde. Da also jede Waarenberechnung die Verwandlung kleinerer Münzsorten in grössere nöthig macht, so versteht La Roche unter „Praktik“ das Verfahren, jene Umwandlung möglichst rasch und bequem durchzuführen. Zu dem Zwecke stellt er tabellarisch (Fol. 78^{r}—81^{r}) die Werthe von 1, 2, 3, 4, 5, . . . 239, 240 *deniers* als Theile des *liure* zusammen und berücksichtigt dabei sehr die Mehrfachheit der Zerlegung. So ist z. B.

2 *d.* = $\frac{1}{4}$ von $\frac{1}{5}$ von $\frac{1}{6}$. Oder $\frac{1}{3}$ von $\frac{1}{5}$ von $\frac{1}{8}$. Oder . . . .

17 *d.* (= 1 *s.* 5 *d.*) = $\frac{1}{4}$ von $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{3}$ (soll heissen = $\frac{1}{4}$ von $\frac{1}{4}$ und dazu $\frac{1}{4}$ von $\frac{1}{10}$ eines Drittels).

204 *d.* (= 17 *s.* 0 *d*) = $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{5}$ (soll heissen = $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ von $\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{2}$ und dazu $\frac{1}{5}$ von dem eben gerechneten $\frac{1}{3}$ von der Hälfte eines Halben).

Diese 240 Vorschriften nennt nun La Roche „*regles briefues*“ oder auch „*regles de practique*“ und macht von denselben vielfältigen Gebrauch, wie etwa bei der Lösung folgender Aufgabe: „Wenn 1 Elle 17 *s.* kostet, was ist der Werth von 23 Ellen?“ Er gibt hier folgende drei Arten der Lösung:

a) „Multiplicire 23 Ellen durch 17 *s.* und dividire durch 20 und du wirst erhalten 19 *l.* 11 *s.*

b) „Nach der 204. Regel [— da ja 17 *s.* = 204 *d.* sind —] nimm die Hälfte von 23 und $\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{2}$ und dann $\frac{1}{3}$ der letzten Hälfte und noch $\frac{1}{5}$ des Drittels und addire und du erhältst 19 *l.* 11 *s.*“ Vgl. das nebenstehende Schema.

	23		
$\frac{1}{2}$	11 *l.*	10 *s.*	
$\frac{1}{2}$	5	15	
$\frac{1}{3}$	1	18	4 *d.*
$\frac{1}{5}$		7	8
	19 *l.*	11 *s.*	

c) „Wenn 1 *s.* die Elle, so würden 23 kosten = 23 *s.* = 1 *l.* 3 *s.*, also ist der gesammte Werth 17 mal so viel, d. h. er ist 19 *l.* 11 *s.*

Apianus fasst den Begriff derselben allgemeiner, indem er sagt, sie sei „nichts anders dann ein geschwindigkeit | so einer auss teglicher vbung vberkombt“. Um solche Uebung zu erzielen, lehrt er zuerst die vier Grundrechnungsarten „practice“ durchführen, d. h. — von einigen schon oben (S. 83) besprochenen mehr fördernden Multiplikations- und Divisionsmethoden abgesehen — er lehrt zuerst die Anwendung der Rechnungsarten auf verschieden benannte Münzen und Maasse und geht dann dazu über, an einer sehr grossen Anzahl „nachgesetzter Exempel viel vnd mancherley griff vnd behendigkeyt“ zur Anwendung zu bringen; jedoch fügt er ausdrücklich hinzu: „Es ist aber mein meynung nit | das ich hiemit alle griff | fortel vnd behendigkeytē wöll berürt haben.... denn die Practick begert mancherley fortel | vnd was ein Exempel nit erleiden mag | das mag offt ein anders erleiden“, also ganz in derselben Weise wie ein Schriftsteller des folgenden Jahrhunderts auch sagt: „Je vnd allwegen ein Exempel nicht wie das ander gepracticiert vnd vervortheilt wird“.

Um nur ein Beispiel anzuführen, sei hier der verschiedenen Behandlung gedacht, welche Apian der folgenden Aufgabe zu Theil werden lässt: „Item einer kaufft $3\frac{1}{2}$ Emer wein | kosten 16 Emer 36 fl. 7 *sh.* 20 ₰. [wobei 1 fl. = 8 Schilling = 240 ₰.]; ist die frag....“ Apian schreibt seinen Ansatz folgendermassen:

16 ————	36 —	7 —	20 ————	$3\frac{1}{2}$
$3\frac{1}{2}$	32	4	10	
	4	2	10	
		1		

und indem er, wie der Ausdruck lautet, „das zweit auff das erst Proporcionirt“, zerlegt er, wie schon angedeutet, 36 fl. in 32 + 4 und sagt sich: So wie 16 zu 32 werden, so müssen $3\frac{1}{2}$ auch zum Doppelten, zu 7 fl. werden, und ferner: so wie die übrigen 4 fl. der achte Theil von 32, so ist das weiter zu Erhaltende der 8. Theil von 7 fl., d h. 7 Schilling. Aehnlich zerlegt er die zu 36 fl. noch hinzukommenden 7 Schilling in 4 + 2 + 1 und rechnet weiter: So wie 16 Eimer 4 *sh.* kosten, so würden 7 Eimer $\frac{7}{4}$ *sh.* = 1 *sh.* $22\frac{1}{2}$ ₰. kosten, also kosten entsprechend $\frac{7}{2}$ Eimer = 0 *sh* $26\frac{1}{4}$ ₰. Und ähnlich weiter calculirend ergibt sich Nebenstehendes als Ausrechnung.

7
0—7
1 — $22\frac{1}{2}$
0 — $26\frac{1}{4}$
0 — $13\frac{1}{8}$
0 — $6\frac{9}{16}$
0 — $4\frac{3}{8}$

Facit fl. 8 *sh.* 0 ₰. $20\frac{5}{16}$

Es wird hiernach leicht verständlich sein, wenn Apian in Bezug auf dieselbe Aufgabe weiter führt: „Auff eine andere arth practicirt darinne wirdt die letzste auff die erste Proporcionirt.

16 ————	36	— 7 —	20 ————	$3\frac{1}{2}$		
				2		
	4	— 4 —	$28\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$		
	2	— 2 —	$14\frac{3}{8}$			
	1	— 1 —	$7\frac{3}{16}$			
Facit	fl. 8	*sh.* 0	₰ $20\frac{5}{16}$			

	2	
8		7
5		4
	2	

„Aber auff ein andere art practicirt | darinne ist ein jtlicher absatz der miteln zal in sunderheit Proporcionirt auff die erste.

16 ————	36 —	7 —	20 ———— $3\frac{1}{2}$	
$.3\frac{1}{2}$	16	4	16	
	8	2	4	
	8	1		
	4			
	3 —	4		Proporcionirt 16 auff 16
	1 —	6		
	1 —	6		
	0 —	7		
		0 —	$26\frac{1}{4}$	Proporcionirt 4 *sh* auff 16
		0 —	$13\frac{1}{8}$	
		0 —	$6\frac{9}{16}$	
		0 —	$3\frac{1}{2}$	Proporcionirt 16 ₰ auff 16
		0 —	$0\frac{7}{8}$	
	fl. 8	*sh.* 0	₰ $20\frac{5}{16}$	

Obwohl Apian eine sehr grosse Zahl von kaufmännischen Beispielen der verschiedensten Art behandelt, findet sich in seinem Buche doch nirgends irgend welche zusammenfassende Angabe über das Gemeinsame der verschiedenen benützten Verfahrungsweisen, nirgends eine Anleitung zu solcher Behandlung von Aufgaben.

Erst Stifel bespricht in seiner inhaltreichen *Arithmetica integra* (1544) in allgemeinerer Weise die *„Praxis Italica quam ab Italis ad nos deuolutam esse arbitramur“*. Er erklärt sie als *„ingeniosa quaedam inuentio quarti termini regulae De Tri ex tribus terminis“* und bestimmt sofort ebenso kurz als gut, dass jene Auffindung des 4. Gliedes geschehe *„mediante distractione uaria eorundem terminorum, distractarumque particularum proportionatione, atque denominationum vulgarium translatione“*. Also dreierlei sei zu beachten: die „zerstrewung oder zerfellung“, wie man im Deutschen

sagte, die Aufsuchung der „proportz“ der so erhaltenen Theile zu gegebenen Zahlen und die sich hieraus ergebende Ausrechnung der Theilwerthe und drittens die Verwandlung niedrigerer Münz-, Maass- und Gewichtssorten in höhere. Die Manchfaltigkeit der Lösung illustrirt Stifel sofort durch sechsfach verschiedene Behandlung einer Aufgabe, bei welcher nach dem Preis von 48 Ellen gefragt ist, während 1 Elle 15 Groschen 10½ Denare kostet (12 Denare = 1 Groschen, 21 Groschen = 1 fl. sächsisch). Aus dem Obigen werden die im Nachstehenden gegebenen sechs Lösungsarten sofort verständlich sein.

1)

Elle	fl.	Gr.	₰	Ellen
1	0	15	10½	48
		7	6	
		7	3	
		1	1½	
	16			
	16			
	2	6		
	1	3		
		12		
		6		

Facit 36 fl. 6 Gr.

2)

Elle	fl.	Gr.	₰	Ellen
1	0	15	10½	48
				21
				21
				3
				3
	15			
	15			
	2	3		
	2	3		
	3			

Facit 36 fl. 6 Gr.

3)

Elle	fl.	Gr.	₰	Ellen
1	0	15	10½	48
		10	6	42
		5	3	6
			1½	
	20			
	10			
	1			
	0	10	6	
	0	5	3	
	3	0	0	
	1	10	6	
			9	

Facit 36 fl. 6 Gr.

4)

Elle	fl.	Gr.	₰	Ellen
1	0	15	10½	48
		7	6	42
		7	3	6
		1	1½	
	14			
	14			
	2			
	2			
	2			
	1			
	0	10	6	
		5	3	
		6	0	
		4	0	
		1	6	
			9	

Facit 36 fl. 6 Gr.

5)

Elle	fl.	Gr.	₰	Ellen
1	0	15	$10\frac{1}{2}$	48
		8	6	42
		4	3	6
		2	$1\frac{1}{2}$	
		1		
	16			
	8			
	4			
	2			
	1			
	0	10	6	
	0	5	3	
	2	6	0	
	1	3	0	
		12	0	
		6	0	
		3	0	
		1	6	
			9	
Facit 36 fl. 6 Gr.				

6)

Elle	fl.	Gr.	₰	Ellen
1	0	15	$10\frac{1}{2}$	48
		8	6	
		4	3	
		2	$1\frac{1}{2}$	
		1		
		6		
		12		
	1	3		
	2	6		
	4	12		
	9	3		
	18	6		
Facit 36 fl. 6 Gr.				

Die von Stifel ihrem Wesen* nach gekennzeichnete wälsche Praxis war vielleicht schon vor Anfang des 16. Jahrhunderts in Deutschland gebräuchlich, da sie, wie auch Drobisch meint, „mehr durch Ueberlieferung der Kaufleute und durch Privatunterricht der Rechenlehrer als durch Bücher in Deutschland Eingang gefunden zu haben scheint". Aber allmählig kam sie mehr und mehr in Anwendung und zur schriftlichen Darstellung, und dass sie um die Mitte des 16. Jahrhunderts eine erhöhte Bedeutung gewonnen hatte, geht aus Stifels Worten hervor, mit denen er ihrer in seiner Ausgabe von Rudolffs Coss Erwähnung thut: „... denn sihe ahn die Welsche Practick die doch niendart mit vmbgeht denn nur allein mit der Regel

* Genauere Betrachtung der vorangehenden Beispiele zeigt, dass man wohl mit Cantor übereinstimmen kann, wenn er sagt, dass die wälsche Praktik dem Gedanken nach in einer Zerlegung eines gebrochenen Multiplikators in eine Summe von sog. Stammbrüchen besteht, d. h. von Brüchen mit Einheitszählern, wodurch die Multiplikation in leichte Divisionen und eine nachfolgende Addition umgesetzt werde"; wenn aber Lemkes (und Günther) sagen, der „reine Begriff" der wälschen Praktik sei der Kunstgriff, einen beliebigen Bruch in einen aufsteigenden Kettenbruch von zwei oder mehr Theilbrüchen zu verwandeln", so ist dieser Begriff denn doch zu „rein" gestaltet. Vgl. Cantor's Recension von Kuckuck's Abhandlung in der Schlömilch'schen Zeitschrift für Math. und Phys. 1875, histor.-literarische Abtheilung S. 68. Ferner vgl. Günther, Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der math. Wissenschaften. Leipzig 1876, S. 118.

Detri | dennoch findet man da von gantze bücher"; aber merkwürdigerweise reden viele Schriftsteller, welche sonst ausführlich genug ihren Stoff behandeln (z. B. Micyllus, Clavius), gar nicht von ihr.

Es erhielt sich die Verwerthung der wälschen Praxis auch während des 17. und 18. Jahrhunderts und erst in unserem Jahrhunderte ist sie, weniger im kaufmännischen Leben, aber jedenfalls bei uns fast vollständig beim Unterrichte im schriftlichen Rechnen zurückgetreten, obwohl sie gewiss auch heute noch als Anregung und zur vielseitigen Uebung Beachtung verdient. In England scheint sie sich dagegen mehr erhalten zu haben, wie denn z. B. unter den Aufgaben, welche den in die Kriegsschule zu Woolwich eintretenden Candidaten gestellt werden, sich auch solche finden, welche „by Practice" zu lösen sind.

51. **Tollet-Rechnung**. — Dass die wälsche Praxis, gewöhnlich freilich beim Rechnen mit der Feder verwendet, wohl auch beim Rechnen auf Linien, also unter Benützung von Rechenpfennigen Eingang fand, wird sich bei dem weit verbreiteten Gebrauche des letzteren Rechnens wohl mit Recht vermuthen lassen. Aber directe Beweise hierfür anzugeben ist mir nicht möglich; es sei denn, dass man die allein bei Apian und bei Widman von mir gefundene Art des Rechnens, welche unserm Artikel als Ueberschrift dient, dafür gelten lassen wollte, eine Rechenweise, deren Namen mir unverständlich ist, deren Bedeutung aber Apian selbst erläutert mit den Worten: „Lernt durch die Rechenpfenning ein Metall auss dem andern ziehen", d. h. also ein Verfahren, um bei Metall-, zunächst bei Gold- und Silber-Legirungen den Feingehalt und damit den wahren Werth zu bestimmen.

M	M	M
C	C	C
X	X	X
M	M	M
X	X	X
lot	lot	lot
halblot	halblot	halblot
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$
$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$
$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{128}$
$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{256}$

Zu dem Zwecke „soll vff einen Tisch die form vnnd gestalt der Tolleten auffgezeychnet werden wie hernach volgt", d. h. es sollen drei gegen den Rechnenden gerichtete parallele Räume, sog. „Cambi" abgetheilt werden, welche durch Querlinien durchzogen sind; in die Felder und zwar je in die Mitte des einzelnen sind von oben nach unten M = 1000, C = 100, X = 10, M = Mark (= 16 lot), X = 10 lot, lot und dessen Unterabtheilungen einzuschreiben, um dann beiderseits davon noch Rechenpfennige niederlegen zu können, links in der Bedeutung von Fünfern, rechts in der von Einheiten der betreffenden Gewichtsmenge.

Es sei nun der Gehalt an Feingold zu berechnen, wenn „einer kaufft ein stuck Sylber | wigt marck 82 lott $14\frac{3}{4}\ \frac{3}{16}$ Vnd halt die Marck an der Prob 2 lot $\frac{1}{4}\ \frac{3}{16}$ Goldt". Bei der Berechnung diente das erste Cambium für das „ganz zerfelt Stuck", das zweite für die „Erger", d. h. den Zusatz, das dritte für den Feingehalt selbst. „Greiff zum Erstenn mit dem Finger auff die Lott. Sprich zwei Lot geben zwir (= zweimal) 82 Lot | das sein 164 Lott thun 10 Marck 4 Lott. Greiff vff ein Virtel sprich einn mal 82 Virtel · greiff in das nehst Spacium darüber sprich halb 82 ist 41 greiff noch weiter vmb ein Spacium auf die Lott | sprich halb 41 ist $20\frac{1}{2}$ | lege nider 20 Lot vnnd $\frac{1}{2}$ Lot | oder 2 Virtel · Darnach greiff auff $\frac{2}{16}$ [— Apian zerlegt nämlich $\frac{3}{16}$ in $\frac{2}{16} + \frac{1}{16}$ —) das ist auff $\frac{1}{2}$ Virtel Vnnd ruk hinauff sprich halb 82 ist 41 · halb 41 ist $20\frac{1}{2}$ so stehet der Finger auff einem $\frac{1}{2}$ lott | lege nider $20\frac{1}{2}$... greiff nun auff $\frac{1}{16}$ u. s. w." Um wie aus 82 Mark, so nun auch aus 14 Lot den Feingehalt zu finden, fährt Apian fort: „Greiff auff das Lott sprich | Eine Marck leget nit nider | dann 14 Lot thun kein gantz Marck | Ruck den Finger in das nechst Spacium abher vnn sprich | 8 lot ist wie halb marck | die leget nider 2 Pfennig u. s. w."

In dieser Weise konnten unter Benützung von Rechenpfennigen Aufgaben gelöst werden, welche unserem Rechnen mit Brüchen ziemlich schwerfällig werden. Jedoch „Tollet wirt auch gerechnet auff eine andere art | mit der federn od' kreiden | vnd ist mer nutzlich zu teglichem brauch | dann die forige Tolletenn | welche mit den rechenpfennigen grossen raum bedarff." Diese zweite Art verfährt wie die sog. wälsche Praktik und schreibt sich die einzelnen nöthigen Vielfachen auf; sie wird ersichtlich aus der Lösung der Aufgabe: „Item einer Kaufft 34 Centener Wax | kost 1 Centner 10 fl. 4 Sch. 10 ₰. Ist die frag was ist das Wax werdt?

Stett in der Tolleten.

	fl.	Sch.	₰.
X	115	3	10
Ctr.	10	4	10
3 X	346	2	0
4 Ctr.	41	1	10
Facit	fl. 387	Sch. 3	₰. 10.

Apian berechnet also zunächst das 10fache, dann sowohl das $3 \cdot 10$, als auch das $4 \cdot 1$fache des Werthes eines Centners und addirt. — Dass diese zweite Art schon lange vor Apian einheimisch war, geht daraus hervor, dass sie, wie ich aus dem nachträglich mir zugekommenen Werkchen Widmans ersehe, schon in diesem sich findet. „Ich wil dich lernen Rechnung von Tollet wye wol man Rechnung vil geringer vnd behender durch die gulden Regel vinden mag Dz aber die gebrochne zal da durch geubet werdt. Soltu vlyssigklichen merken · das diesse art der rechnung

stet in dreyerley anweysung. Alss zum erstn in cōpetentium litterarum positione . in saczung ader schreybung bequemer puchstabē . zum Andern in Valoris ad litteras applicatione in dess werdes tzu saczung tzu dē puchstaben . zum Drittn in rei empte numerali appositione In der an zcal dess gekaufftē gutes vn hinder saczung zcu dē puchstabē." Man schreibt demnach zuerst „auff die taffel oder tisch" unter einander die Zeichen *MCX lb X lott qnt*, schreibt dann rechts von *lb* den Werth eines Pfundes (einer Elle u. dgl.), bildet dessen 10, 100, 1000 faches, dann auch den 32. Theil und dessen Zehnfaches, man schreibt dann den Betrag an Gewicht oder Maass links von jenen Zeichen und „darnach multiplicir die zal die hinder den puchstaben sten . mit den zalen die fur den Buchstaben steen." Demnach erledigt sich die Aufgabe: „Es hat einer kauft 4367 *lb* Ingwer 29 lot 3 quintn ye 1 *lb* pro 13 *sh* in golde" in folgender Weise:

4 *M*	13000 *sh*	52000			2600		
3 *C*	1300 *sh*	3900			195		
6 *X*	130 *sh*	780			39	*floren*	
7 *lb*	13 *sh*	91	*sh*	*facit*	4	11	
2 *X*	$\frac{130}{32}$ *sh*	$\frac{260}{32}$				$8\frac{4}{32}$	
9 lott	$\frac{13}{32}$ *sh*	$\frac{117}{32}$		*sh*		$3\frac{21}{32}$	
3 quint	$\frac{13}{128}$ *sh*	$\frac{39}{128}$				$\frac{29}{128}$	

„Nu summir die summen alle zusammen vnd kumpt 2839 floren 3 *sh* 1 heller $\frac{1}{32}$."

52. Ich bin am Schlusse meiner Darstellung angelangt. Ein Rückblick zeigt, dass wie im Allgemeinen das 16. Jahrhundert zu den für die Entwickelungsgeschichte des menschlichen Geistes merkwürdigsten gehört, so dasselbe auch auf dem Gebiete des Rechnens sich in eigenartiger Weise hervorthut. Am meisten charakteristisch zumal für den Anfang ist der Kampf zwischen der vorhandenen Rechenweise und der neu eindringenden Erfindung der Inder und Uebung der Araber, das allmählige Unterliegen der ersteren und das Erstarken und Ueberhandnehmen der letzteren, bis schliesslich letztere allein das Feld behauptet; weiter in die Augen springend ist das rege Interesse, welches um die Mitte des Jahrhunderts die bedeutendsten mathematischen Köpfe für das der Masse des Volkes neue Rechnen zeigen und welches sie in ausführlichen Darstellungen desselben bethätigen. Dass dem Interesse der Erfolg entsprach, ist bekannt: die neue Weise ist überall zur herrschenden geworden. Die Hauptarbeit hierin hat das 16. Jahrhundert geleistet; als dieses hinabgesunken war, hatte sich die Aufgabe der Arithmetik in eine der Pädagogik umgewandelt, es handelte sich nur noch um die Verbesserung in der Methode des Unterrichtens. Diese zu schildern fällt aber nicht mehr in das Gebiet meiner Aufgabe.

Die

homocentrischen Sphären des Eudoxus, des Kallippus und des Aristoteles.

Mémoire

gelesen im lombardischen Institut zu Mailand am 26. November 1874

von

G. V. Schiaparelli

in's Deutsche übersetzt

von

W. Horn,
königl. Lehrer der Mathematik in München.

Par quelle bizzarrerie les progrès que nous avons fait dans les mathématiques et dans certaines parties de la physique a-t-il inspiré à nos philosophes un mépris pour l'histoire des anciennes opinions, qui leur fait croire, que ces hommes et ces nations, qui se sont rendus si célèbres dans l'antiquité, ont été plongés dans les ténèbres philosophiques plus épaisses?

Fréret,

Observations générales sur la géographie ancienne.

I. Allgemeine Betrachtungen.

Die Astronomie der Griechen entstand aus schwachen Anfängen in den jonischen und italischen Schulen; sie wurde ausgebildet und erweitert in den mathematischen Schulen, die bei Plato ihren Ursprung hatten, und erreichte, nachdem sie von Hipparch durch Einführung des auf Geometrie angewandten Calculs bedeutend vervollkommnet worden war, ihre höchste Ausbildung mit Ptolemäus gegen die Mitte des zweiten Jahrhunderts n. Chr. Die langsamen, aber ununterbrochenen Fortschritte, welche von Hypothese zu Hypothese und von Beobachtung zu Beobachtung, von der ebenen Erdscheibe Homers bis zu der künstlichen und verwickelten Zusammenstellung der excentrischen Kreise und der Epicykeln führte, bieten dem Philosophen eine grossartige und lehrreiche Betrachtung, die, richtig erwogen, nicht weniger interessant ist, als diejenige, welche die Entwicklung der modernen Astronomie von Copernicus bis auf unsere Tage darbietet. Leider ist es der Forschung jedoch nicht vergönnt, mit gleicher Genauigkeit alle Stufen der Entwicklung zu erkennen, welche das Genie der Griechen von den Ideen des Thales bis zu den Hypothesen und den astronomischen Tafeln der Alexandriner führte, weil, während von den letzten Stadien dieser Geistesarbeit dauernde Ueberlieferungen im Almagest sich befinden, von demjenigen, was vor Hipparch und von dem, was nach Hipparch ausserhalb der Alexandrinischen Schule geschah, nichts geblieben ist als schwache Spuren und unvollständige Andeutungen, überliefert von Schriftstellern, die keine Astronomen waren. Alle astronomischen Kenntnisse der Griechen, besagte Schule ausgenommen, sind grossentheils den Geschichtsschreibern dieser Wissenschaft unbekannt geblieben, oder wenn sie auch bekannt waren, wurden sie von denselben nicht mit hinreichendem Fleiss betrachtet, und das ist die Ursache, dass wir über die ersten Fortschritte derselben sichere Anhaltspunkte bei den Philologen und Alterthumsforschern suchen müssen, anstatt in den Büchern Bailly's, Montucla's, Delambre's und der Vielen, welche diese nachahmten oder ihnen folgten. Die Studie über die Vorläufer des Copernicus, welche vorzulegen ich im vorigen Jahre die Ehre hatte,* kann hierüber hinreichendes Zeugniss geben. Aber die allge-

---

* *I precursori di Copernico nell' antichità. Ricerche storiche di G. V. Schiaparelli, lette al R. Istituto Lombardo nell' adunanza 20 Febbrajo 1873, in occasione del 400° anniversario della nascita di Copernico.* Diese Schrift ist auch in deutscher Sprache, übersetzt von Herrn Dr. Curtze in Thorn, erschienen.



meine Vernichtung, wovon, mit Ausnahme des Almagest, gerade die wichtigsten Schriften der griechischen Astronomie betroffen wurden, brachte einen andern schweren Nachtheil. Die Schwierigkeit, welche mit der genauen Erkenntniss und der richtigen Deutung der wenigen Ueberbleibsel der griechischen, nicht zur Alexandrinischen Schule gehörigen Astronomie verbunden ist, führte die Meisten zu deren Vernachlässigung oder Geringschätzung, weil sie von derselben keine genauen Kenntnisse hatten; darin wurzelt die falsche, aber heut zu Tag allgemein angenommene Meinung, dass die ganze wissenschaftliche Astronomie der Griechen im Almagest enthalten sei. Der gelehrteste und gewichtigste Vertreter dieser Ansicht war Delambre, und seine voluminöse *Histoire de l'Astronomie ancienne* liefert einen beständigen Commentar dafür. Hier einige Proben: *„Il est demontré, que du temps d'Archimède les Grecs n'étaient guère plus avancés (en Astronomie) que les autres peuples. Toutes leurs connaissances se trouvent à fort peu près rassemblées dans le poëme d'Aratus.“** An einer andern Stelle: *„L'Astronomie n'a été cultivée véritablement qu'en Grèce, et presque uniquement par deux hommes, Hipparque et Ptolemée,“*** wobei natürlich nur an die Astronomie der Alten zu denken ist; und wieder an einer andern Stelle: *„L'Astronomie des Grecs est toute entière dans la syntaxe mathématique de Ptolemée.“**** Diese Behauptungen findet man bei Allen mit den verschiedensten Variationen angenommen. *„Nous ne voyons naître l'Astronomie en Grèce qu'avec Hipparque“* sagt Biot.† „Vor der Alexandrinischen Schule ist an eine wissenschaftliche Bearbeitung der Astronomie nie und nirgends zu denken,“ wiederholt seinerseits Mädler;†† und so hundert andere von geringerem Ansehen.

Idem die Astronomen, welche die Geschichte ihrer Wissenschaft schrieben, dieser Anschauungsweise zu ausschliesslich huldigten, beschäftigten sie sich nicht nur sehr oberflächlich mit den Speculationen der Jonier, der Pythagoräer und des Plato, sondern sie sprachen auch ungenau und flüchtig über die Schule derjenigen Geometer, welche zwischen 400 und 300 v. Chr. in Griechenland blühte, oder sie übergingen sie ganz mit Stillschweigen. Und doch bearbeitete man in diesem Zeitraum, also vor Beginn der Alexandrinischen Schule, in Griechenland den Stoff zu den Elementen des Euklid, erfand und studirte die Kegelschnitte, und gelangte zur Lösung von Problemen durch die mechanische Beschreibung von Curven. Damals wurde der

* *Delambre, Histoire de l'Astronomie ancienne, tome I. Discours préliminaire, p. X.*

** Ebendaselbst tome I, p. 325.

*** Ebendaselbst tome II, p. 67.

† *Journal des Savants, 1857, p. 10.*

†† Mädler, Populäre Astronomie § 301.

grosse und denkwürdige Versuch zur Erklärung der Himmelserscheinungen durch geometrische Hypothesen gemacht, und diese Hypothesen wurden in Einklang mit den Beobachtungen gebracht oder berichtigt, wo es nothwendig war. Aus diesen Forschungen, denen nichts vom Charakter einer wissenschaftlichen Untersuchung, im strengsten Sinn, welchen unsere Zeit mit diesem Wort verbindet, mangelt, war das System der homocentrischen Sphären entstanden, um deretwillen man den Namen des Eudoxus von Knidus so hoch erhob. Wenn auch von diesem System keine vollständige und geordnete Auseinandersetzung auf uns gekommen ist, so ist es doch möglich, aus den Andeutungen, welche Aristoteles, Eudemus von Rhodus, Sosigenes und Simplicius davon geben, mit Sicherheit die hauptsächlichsten Umrisse zu gewinnen. Aber hier sieht man die Macht des Vorurtheils! Eudoxus gehörte nicht zur Alexandrinischen Schule und lebte vor Hipparch, deshalb wurde ihm die Eigenschaft eines Astronomen, ja sogar die eines Geometers abgesprochen.* Alle Originalität der Auffassung, alle Gewandtheit in geometrischen Constructionen, alle geistreichen Versuche, sich dem Resultat der Beobachtungen zu nähern, alle Bewunderung der Zeitgenossen, fanden keine Gnade bei denen, welche uns die Geschichte der Astronomie erzählen, und die homocentrischen Sphären trugen ihren Urhebern mehr Tadel als Lob ein.

Bailly nennt das System der homocentrischen Sphären des Eudoxus geradezu absurd.** Wenn man jede Hypothese, welche nicht vollständig mit der Wirklichkeit übereinstimmt, absurd nennen darf, so kann man behaupten, dass die ganze Astronomie bis auf Keppler eine absurde Wissenschaft war. Bailly jedoch entschuldigt den Eudoxus, indem er den primitiven Zustand der Astronomie jener Zeiten betrachtet, und legt ihm sogar ein Verdienst bei, nämlich das, mit seinen Absurditäten die Nothwendigkeit gezeigt zu haben, dass man seine Zuflucht zu anderen Hypothesen nehmen müsse. Aber vergeblich würde man bei Bailly eine auch nur einigermassen klare und präcise Idee über das System des Eudoxus suchen.

Montucla*** hat dieses System nicht besser verstanden, als Bailly, und die Erklärung, welche er darüber zu geben versucht, ist gänzlich illusorisch. Das hindert ihn jedoch nicht, sich noch viel strenger als Bailly zu zeigen und folgende Worte zu äussern: *„On attribue à Eudoxe une sorte d'hypothèse physico-astronomique, qui répond mal à cette grande réputation qu'il eut chez les anciens . . . . . Une hypothèse aussi absurde et aussi peu*

---

* *Rien ne prouve qu'Eudoxe fut géomètre.* Dieses grosse Wort findet sich bei Delambre, *Hist. de l'Astr. ancienne, tome I, p. 131.* Ich werde später zeigen, was hiervon zu halten ist.

** *Bailly, Histoire de l'Astronomie ancienne, p. 242.*

*** *Montucla, Hist. des Math. 2. ed. I vol. p. 182—183.*

conforme aux phénomènes célestes ne méritoit, ce me semble, que d'être rejetée avec mépris par les mathématiciens judicieux: mais telle étoit alors la foiblesse de l'astronomie physique, qu'elle ne laissa pas de trouver des approbateurs et même de mérite. Aristote se prit d'une belle passion pour elle, de même que Calippe et un certain Polémarque. Ils y convinrent de quelques corrections, qui la rendaient encore plus ridicule" etc. In demselben Ton berichten über die Hypothesen des Eudoxus Andere, welche Auszüge aus Montucla und Bailly herausgaben, und der letzte Geschichtsschreiber der Astronomie, Ferdinand Höfer*: *„Le système (des sphères) d'Eudoxe fut aussitôt accueilli avec enthousiasme dans toute la Grèce, peut-être parce qu'il était plus absurde que les autres . . . . . . On en porta successivement le nombre jusqu'à cinquante-six, pour arriver à les abandonner toutes, comme indignes de la science . . . . ."*

In dem grossen Werk Delambre's, worin die alte Astronomie für sich allein nicht weniger als 1270 Seiten einnimmt, ist es mir nicht gelungen, auch nur ein Wort zu finden, womit der Autor die homocentrischen Sphären des Eudoxus erwähnt. Delambre las den Commentar des Simplicius über die Bücher *de coelo* und verfertigte Auszüge daraus; er berichtet über diese Beschäftigung im ersten Buch Seite 301—310, aber über die so bemerkenswerthe Stelle dieses Commentars, welche die hauptsächlichste Quelle unserer Kenntniss des eudoxischen Systems ist, finde ich nicht die geringste Andeutung. Vielleicht entging sie ihm, oder vielleicht wollte er den Leser nicht langweilen mit der Darlegung von Dingen, welche der Alexandrinischen Schule fremd waren, ausserhalb welcher es für ihn keine Geschichte der Astronomie gab. Eine scheinbare Anspielung auf das System des Eudoxus könnte man jedoch in der folgenden Stelle des *Discours préliminaire*** finden:

„Platon conseilla aux astronomes de chercher l'explication des mouvements célestes dans la combinaison de différents cercles: ils suivent ce conseil, et faute d'idées assez précises et de bonnes observations, ils multiplient les cercles outre mesure et sans aucun succès." Wenn Delambre an dieser Stelle die Sphären des Eudoxus meint (zu welchen, wie man sehen wird, Plato die Veranlassung gab), so können wir vermuthen, dass er dieses System als einen groben Abriss der Theorie der Epicykeln betrachtete. Aber sicherlich, zwischen den Epicykeln und den homocentrischen Sphären besteht selbst nicht eine scheinbare Analogie. Die Vermischung dieser so verschiedenartigen Dinge findet sich auch bei anderen Schriftstellern, z. B. bei Whewell, welcher in seiner Geschichte der inductiven Wissenschaf-

* *Höfer, Hist. de l'Astronomie. Paris, 1873, p. 136.*
** *Delambre, Astr. anc. vol. I, p. X.*

ten eine Andeutung über die Sphären des Eudoxus gab, und sie nicht von den Epicykeln zu trennen scheint, deren Erfindung er in die Zeiten des Plato, ja sogar noch weiter zurück verlegt.* Auch Mädler in seiner Geschichte der Astronomie** glaubt zu beweisen, dass die Sphären des Eudoxus wesentlich dasselbe sind, als die Epicykeln des Ptolemäus, und sich von diesen nur durch grössere Verwicklung unterscheiden.

Der erste, welcher mit einigem Fleiss in das Geheimniss des besagten Systems eindrang, scheint Conrad Schaubach gewesen zu sein, welcher unter seinen vielen Studien über die Anfänge der griechischen Astronomie der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften auch folgende: Von den Ansichten des Eudoxus über das Planetensystem*** vorlegte. Die Resultate dieser Untersuchung wurden von ihm in seiner 1802 erschienenen schönen Geschichte der griechischen Astronomie vor Eratosthenes niedergelegt.† Trotz des Fleisses, womit dieser Gelehrte die Quellen über diesen Gegenstand studirte, gelang es ihm doch nicht, in den Kern dieser Frage einzudringen, ja er verfiel sogar auf Irrthümer bezüglich der Zahlen, welche Eudoxus den synodischen Umlaufszeiten der fünf Planeten beilegt.

Der Einzige, welcher meines Wissens mit theilweisem Erfolg den Versuch machte, einigermassen auf den Grund des Mechanismus der homocentrischen Sphären zu kommen, und welcher ihrem Urheber die gebührende Gerechtigkeit widerfahren liess, war Ludwig Ideler in seiner ausgezeichneten Monographie über Eudoxus†† in den Abhandlungen der kgl. Akademie zu Berlin für die Jahre 1828 und 1830. Ideler erkannte das Grundprincip dieser Theorie und wusste sich mit Hilfe eines gewöhnlichen Globus annäherungsweise Rechenschaft darüber zu geben, auf welche Art und Weise Eudoxus die Stillstände und Rückläufe der Planeten und ihre Bewegung in Bezug auf Breite erklärte. Da sich seine Arbeit jedoch über ein umfassenderes Thema verbreitete, so drang er nicht hinreichend in das Studium dieser zusammengesetzten Bewegungen ein und verschiedene Punkte blieben ihm unklar; von anderen gab er keine genügende Erklärung. Aber immerhin bleibt ihm das Verdienst, in dieser Frage den entscheidendsten Schritt gethan zu haben.

---

* Whewell, Geschichte der inductiven Wissenschaften; Ausgabe von Littrow, Band 1, 137—139.

** Mädler, Geschichte der Himmelskunde, p. 47. Braunschweig 1873.

*** Schaubach, Ueber Eudoxus Vorstellung vom Planetensystem; in den Göttinger gelehrten Anzeigen für d. J. 1800. No. 54.

† Schaubach, Geschichte der griechischen Astronomie bis auf Eratosthenes (Göttingen 1802) p. 433—442.

†† Ideler, Ueber Eudoxus. Abhandlungen der Berliner Akademie, hist.-philol. Classe, für d. J. 1828 p. 189—212; f. 1830, p. 49—88.

Von Denjenigen, welche nach Ideler kamen, scheint keiner (ausser H. Martin) von seiner Arbeit Notiz genommen zu haben, weshalb man noch heutzutage über die Geschichte der Hypothesen des Eudoxus ebenso schreibt, wie es ein Jahrhundert früher Montucla und Bailly thaten. Ausnehmen müssen wir jedoch Sir George Cornewall Lewis, welcher in seinem Werk über die Astronomie der Alten* zeigt, dass er die Abhandlung Ideler's kennt, aber ihr nicht die hinreichende Wichtigkeit beilegt; er hat ebenfalls den Sinn von den Umlaufszeiten, welche Eudoxus den Planeten beilegt, nicht richtig verstanden; jedoch erkannte er mit Recht, dass in diesem Problem und der von Eudoxus gegebenen Lösung desselben viele scharfsinnige geometrische Untersuchungen enthalten waren, wenn er auch anzunehmen scheint, dass es unmöglich wäre, dieselben ans Licht zu bringen.**

In dieser Schrift habe ich mir vorgenommen, die Arbeit Idelers zu vervollständigen und zu berichtigen, sowie den Astronomen und Geometern endlich zu zeigen, welche Summe von geistreichen Combinationen in Dem verborgen liegt, was Anderen lächerlich oder einer Beachtung unwerth schien. Wir werden zuerst eine klare Darlegung der Natur jener eleganten sphärischen Epicykloide sehen, welche Eudoxus Hippopede nennt und die den Grundstein seines ganzen Systems bildet. Wir werden die Grenzen der Genauigkeit untersuchen, mit welcher die Hypothesen des Eudoxus sich den Beobachtungen anpassen konnten; und aus dieser Untersuchung werden wir einiges Licht gewinnen (wenn auch nicht in dem Mass, als man es wünschen möchte), um die Natur der Reform zu erkennen, welche Callippus und Polemarchus später einführten. Wir werden auch die Nothwendigkeit und die Ursache jener grossen Anzahl von Sphären begreifen, welche mit Unrecht von Denjenigen getadelt wurde, die ihren Zweck nicht verstanden, und welche unsern Zeitgenossen eine lächerliche und bemitleidenswerthe Sache erscheint, obgleich dieselben unbewusst in der Planetentheorie zehnfachen und hundertfachen Gebrauch von Epicykeln machen, welche sie unter dem Namen periodische Glieder unendlicher Reihen verbergen.

Indem wir an die Betrachtung dieser Monumente antiken Wissens gehen, lasst uns von der Achtung und Verehrung erfüllt sein, welche Denen gebührt, die vor uns eine steile Strasse wandernd, den Weg geöffnet und

---

* *Cornewall Lewis, An historical survey of the astronomy of the ancients.* London, 1862, p. 153—156.

** *It is difficult to understand how these co-revolving orbs were conceived to harmonize in producing a single resulting motion: but the Greeks, even in the time of Eudoxus, were subtle geometers, and they doubtless had formed a clear idea as to the solution of a problem wich was substantially geometrical.* Ebendaselbst, p. 210.

geebnet haben. Von diesen Gefühlen beseelt, können wir zwar auf mangelhafte Beobachtungen und die Wahrheit weit verfehlende Speculationen stossen, aber wir werden nie etwas Absurdes, Lächerliches oder den Regeln der gesunden Vernunft Widersprechendes finden. Wenn heutzutage wir, die späten Enkel jener berühmten Meister, aus ihren Irrthümern und ihren Entdeckungen Gewinn ziehen und zum Giebel des von ihnen gegründeten Gebäudes emporsteigend mit unserem Blick einen weiteren Horizont umfassen können, so wäre es thörichter Hochmuth, deshalb zu glauben, dass wir eine weittragendere und schärfere Sehkraft als sie hätten. Unser ganzes Verdienst beruht darin, dass wir später zur Welt gekommen sind.

II. Die Entstehung der homocentrischen Sphären.

Schon lange vor Eudoxus hatten die griechischen Philosophen (welche damals Physiker, Geometer und Astronomen zugleich waren) verschiedene Constructionen erdacht, um auf plausible Art die hauptsächlichsten Erscheinungen, welche sich ihnen in der Stellung und der Bewegung der Gestirne darboten, zu erklären. Unter anderen cosmologischen Ansichten der jonischen Schule sind einige Andeutungen über gewisse sonderbare Mechanismen auf uns gekommen, durch welche sich Anaximander Rechenschaft zu geben suchte über die Bewegung der Sonne und des Mondes in Bezug auf Declination, und wodurch er die Phänomene der Finsternisse erklären wollte. Aber aus diesen Andeutungen kann man keinen präcisen und befriedigenden Begriff gewinnen. Zahlreicher sind unsere Kenntnisse über die Schule des Pythagoras und des Plato. In einer anderen Schrift* habe ich die astronomischen Hypothesen auseinandergesetzt, durch welche es Philolaus gelang, die tägliche Bewegung der Planeten, der Sonne und des Mondes mit ihren periodischen Bewegungen längs des Thierkreises zu combiniren, und habe gezeigt, welche sichere Vorstellung man von den astronomischen Ideen des Plato durch das Studium seiner Werke gewinnen kann. Aus diesem Studium ergiebt sich die Thatsache, dass man zur Zeit des Philolaus noch keinen Versuch machte, die Stillstände und Rückläufe der Planeten zu erklären; und aus der unklaren Art und Weise, womit Plato über diese Phänomene im 10. Buch der Republik und im Timäus spricht, geht hervor, dass er selbst keinen genauen Begriff von dem Gesetz und den Perioden hat, in welchen diese vor sich gehen. Er konnte sich jedoch von der Unzulänglichkeit der damals aufgestellten Hypothesen überzeugen,

* *I precursori di Copernico nell' antichità. Mem. del R. Istituto Lombardo. Vol. XII, pag. 342—381.*

welche wohl annäherungsweise die auffälligsten Himmelserscheinungen erklärten, die aber nicht hinreichend waren, um Rechenschaft zu geben über alles das, was schon in jener Zeit aus den Beobachtungen gefolgert werden konnte. Eine fortgesetzte Aufmerksamkeit hatte die sonderbare und mannigfach gekrümmte Bewegung der Planeten am Himmel klar gezeigt, und Plato selbst fühlte, dass zur Erklärung derselben etwas anderes nothwendig sei, als die Annahme von einer nur kreisförmigen Bewegung eines jeden Planeten auf einer ihm zugehörigen Sphäre. Deshalb legte er, wie Eudemus in seiner Geschichte der Astronomie erzählt,* den Astronomen die Frage vor: „durch welche Annahmen von regelmässigen und geordneten Bewegungen sich die beobachteten Erscheinungen der Planetenläufe darstellen liessen.“

Diese Aufforderung wurde verstanden und erfasst durch Eudoxus von Cnidus (geb. 408, gest. um 355 v. Chr.), welcher ein Schüler Plato's war und grossen Ruhm sowohl in der Geometrie, als auch in der Astronomie erwarb. Er war übrigens auch, wie viele Gelehrte jener Zeit, des Studiums wegen nach Aegypten gegangen und, mit Empfehlungsbriefen des Spartaners Agesilaus an den ägyptischen König Nektanabis** versehen, war es ihm möglich, sich in die Geheimnisse ägyptischer Wissenschaft einzuweihen, in welcher er einen Priester von Heliopolis, Namens Chonuphis, zum Lehrer hatte. Hier lernte er, wenn wir dem Seneca Glauben schenken, die Planetenbewegungen kennen und brachte über dieselben genauere Kenntnisse, als man vorher hatte, nach Griechenland zurück.*** Das zeigt, wie Ideler in seiner Abhandlung richtig bemerkt, dass Eudoxus in Heliopolis die Dauer der Umlaufszeit und vielleicht auch die Zeitdauer und die verschiedenen Erscheinungen der Stillstände und Rückläufe der Planeten, wie sie sich den ägyptischen Priestern aus der unmittelbaren Beobachtung ergaben, kennen lernte. Nichts giebt uns im alten Aegypten die geringste Andeutung von tiefen geometrischen Untersuchungen, wie sie für eine wirkliche Theorie der Planetenbewegung nothwendig sind.†

* Man sehe Anhang II § 1.

** Es ist nicht sicher, ob es sich hier um den ersten oder den zweiten ägyptischen König dieses Namens handelt. Böckh (über die vierjährigen Sonnenkreise der Alten p. 136—142) ist für den ersten und setzt die Reise des Eudoxus nach Aegypten in das zweite oder dritte Jahr der hundertsten Olympiade (379 oder 378 v. Chr.). Ideler ist für den zweiten (Ueber Eudoxus, p. 194—195), welcher zwischen den Jahren 362 und 354 regirte.

*** *Eudoxus primus ab Aegypto hos motus in Graeciam transtulit. Seneca, Quaest. nat. VII, 3.*

† Die einzige Thatsache, welche dieser Behauptung zu widersprechen scheint, ist eine Anspielung auf die Bewegung der Erde, die von Herrn Chabas in einem alten ägyptischen Papyrus aufgefunden wurde, in welchem zu einer

Aber die Eigenschaft eines Geometers, welche wir den Aegyptern nicht zugestehen können, besass Eudoxus im hohen Grad, wie aus vielen glaubwürdigen Zeugnissen hervorgeht.* Man erzählt, dass Plato, von jenen Deliern angegangen, ihnen zur Lösung des vom Orakel gestellten Problems — die Grösse des Altars zu verdoppeln unter Beibehaltung der Würfelform — zu verhelfen, zur Antwort gegeben habe, er kenne blos zwei Männer, die fähig wären, diese Schwierigkeit zu besiegen, nämlich Eudoxus von Cnidus und Helicon von Cyzicus.** Bewährter noch ist das Zeugniss des Proclus, eines in der Geschichte der alten Mathematiker sehr bewanderten Autors, welcher den Eudoxus unter Diejenigen zählt, welche jeden Zweig der Geometrie weiter ausgebildet haben.*** In der That, Eudoxus vermehrte die Zahl der allgemeinen Theoreme, von denen jene zwei wichtigen Sätze der körperlichen Geometrie über das Verhältniss der Pyramide und des Kegels zum Prisma und Cylinder von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe ihm zugehören. Euklid entnahm bei der Zusammenstellung seiner Elemente einen beträchtlichen Theil seines Materials den Büchern des Eudoxus,† und man vermuthet, dass das fünfte Buch, welches von der Theorie der Proportionen handelt, gänzlich diesem Astronomen zugehört.†† Eudoxus vervollkommnete überdies die Curvenlehre, deren Anfänge schon von Plato herrühren, und betrachtete hauptsächlich diejenigen Curven, welche durch die Schnitte der Körper entstehen. Wegen dieses Studiums der Curven und der Anwendung desselben auf die Lösung des Problems der Verdoppelung des Würfels hatte Eudoxus unter den alten Geometern eine grosse Berühmtheit, weshalb Eratosthenes, der seine Lösung dieses Problems anführt, ihm den Namen des Göttlichen††† gab. Er betrachtete hauptsächlich die organische Erzeugung der Curven, das ist, ihre Beschreibung mit Hülfe gewisser Mechanismen, und wir werden sehen, dass

---

hochgestellten Person gesagt wird, dass „die Erde sich nach Belieben bewegt“. Der Papyrus hätte, nach Chabas, ohngefähr ein Alter von 4000 Jahren; obige Worte sind einem Zeitgenossen des Königs Neb-ka-ra in den Mund gelegt, welcher vor der Erbauung der grossen Pyramiden gelebt haben soll! Man wird vielleicht klug thun, über diese bedenkliche Frage weitere Aufklärungen abzuwarten. S. *Chabas, sur un texte égyptien relatif au mouvement de la terre,* in der Zeitschrift für ägyptische Sprache und Alterthumskunde. Decbr. 1864.

* Siehe Ideler in seinem Memoir über Eudoxus; Denkschriften der Berliner Akademie, f. d. Jahr 1828, p. 203—212.

** *Plutarch, de genio Socratis,* Cap. 8.

*** *Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii, ed. Friedlein (Lipsiae, Teubner 1873), p. 67.*

† Ebendaselbst, p. 68.

†† Ideler, am angef. Ort p. 200 und 207.

††† Ebenda, p. 211.

seine Hippopede gänzlich unter die Klasse der mechanisch beschriebenen Curven gehört. Endlich bezeugt Proclus, dass Eudoxus einer der Ersten war, welche sich der analytischen Methode bei der Betrachtung der Eigenschaften der Curven bedienten.

Aber die Vortrefflichkeit des Eudoxus als Geometer ist auch durch den Ruf der tüchtigen Mathematiker begründet, die aus der Schule hervorgingen, welche er um das Jahr 375 in der Stadt Cyzicus an den lieblichen Ufern der Propontis gründete. In der That, Menächmus war sein Schüler, welcher zuerst die Eigenschaften der Kegelschnitte systematisch studirte und mittelst derselben das Problem von der Verdoppelung des Würfels löste. Menächmus war aus Alopeconnesus, einer Stadt des thracischen Chersones, oder nach Andern aus Proconnesus, einer Insel der Propontis nahe bei Cyzicus; wie Eudoxus, studirte auch er die Bewegungen der Himmelskörper, und Dinostratus, der Erfinder der Quadratrix, war sein Bruder. Zur Schule des Eudoxus gehören noch Helicon und Athenäus, beide von Cyzicus und beide berühmte Geometer; der Erstere war auch Astronom und bekannt wegen der Vorhersagung einer Finsterniss. Polemarchus, von dem wir sehen werden, dass er die astronomischen Hypothesen des Eudoxus zu verbessern bestrebt war, kannte denselben und lernte von ihm die homocentrischen Sphären kennen; und endlich war Callippus, ebenfalls aus Cyzicus gebürtig, der Schüler des Polemarchus. Callippus behauptete nach dem Tode des Eudoxus in Griechenland den ersten Rang in der Astronomie und auch er bemühte sich mit Polemarchus und Aristoteles, das System der homocentrischen Sphären zu verbessern.*

Diese Nachrichten über die Thätigkeit des Eudoxus als Mathematiker sind ohne Zweifel hinreichend, um uns verstehen zu lassen, wie er zu dem von Plato vorgelegten Problem die elegante Lösung zu geben fähig war, welche wir auseinandersetzen wollen und um den von Delambre ausgesprochenen Zweifel über seine Fähigkeit in geometrischen Dingen zu widerlegen.** Ich füge mit Ideler die Bemerkung hinzu, dass alle Nachrichten, die wir über ihn haben, darauf hinauslaufen, uns in Eudoxus einen Mann von praktischer und positiver Geistesrichtung, fern von aller müssigen Speculation, zu zeigen. Deshalb hatte er keinen Glauben an die Astrologie, welche damals schon ihren Weg von Babylonien nach Griechenland zu nehmen begann, und deshalb finden wir bei ihm nicht, wie bei vielen anderen seiner Zeitgenossen und Vorgänger, dass er Ansichten äusserte über Dinge, die der Beobachtung und der Erfahrung seiner Zeit unzugänglich

* Ueber die mathematische Schule zu Cyzikus befinden sich viele wichtige Bemerkungen bei Böckh, die vierjährigen Sonnenkreise der Alten pag. 150—155.

** *Delambre, Astr. anc. I., p. 131.*

waren. So zum Beispiel beschränkte er sich, anstatt wie andere über das Wesen der Sonne zu speculiren, darauf zu sagen, dass er gern das Schicksal des Phaëthon ertragen wolle, um herauszubringen, was die Sonne eigentlich sei.*

So war der Mann beschaffen, welcher die von Plato an die Astronomen seiner Zeit gerichtete Aufforderung annahm. Um das grosse Problem zu lösen und um zu einer rationellen Erklärung der Bewegungen der Himmelskörper zu kommen, war es vor Allem nothwendig, ein Princip festzustellen, dem sich alle anpassen konnten, und dieses war: dass der Bau der Welt nach einem einzigen allgemeinen Gesetz geordnet sei.** Den griechischen Astronomen mangelte das physikalische Gesetz der allgemeinen Gravitation, sie mussten sich daher an geometrische Gesetze halten, selbst auf die Gefahr hin, etwas Willkürliches anzunehmen. Nun aber bot der tägliche Umschwung des Fixsternhimmels eine gleichförmige Kreisbewegung dar, und ebenso schien den Beobachtungen jener Zeit zufolge die Bewegung der Sonne und des Mondes gleichförmig in Kreisbahnen vor sich zu gehen. Aber weil die Bewegungen der Gestirne alle von denselben Gesetzen abhängen mussten, so wurde mit Recht durch Analogie geschlossen, dass die im Lauf der Planeten beobachteten Unregelmässigkeiten nur scheinbar sein könnten und sich ebenfalls durch das Zusammenwirken von mehreren gleichförmigen Kreisbewegungen erklären lassen müssten. Dieses Axiom, welches nach Geminus*** die Pythagoräer zuerst aussprachen, wurde vom ganzen Alterthum als unerschütterliche Basis der astronomischen Hypothesen angenommen, und mit Recht, denn ohne dasselbe wären die Alten nur in Willkür und Verwirrung gerathen. Dieses Axiom behauptete in der ganzen Astronomie bis auf die Zeiten des Keppler, welcher die elliptische Bewegung statt der kreisförmigen einführte, seine Autorität. Ja Keppler selbst gehorchte noch diesem Princip, als er die gleichmässige Beschreibung der Flächenräume aussprach; sogar nach ihm fügten sich Bouillaud und Seth Ward demselben, als sie die einfache elliptische Hypothese erdachten, in welcher man eine gleichförmige Winkelbewegung der Planeten um denjenigen Brennpunkt der Ellipse annimmt, in dem die Sonne nicht steht. Sein Ansehen wurde nicht eher vollständig vernichtet, als bis durch

* Ideler a. a. O. p. 198, auf die Autorität des Plutarch hin.

** *„Ante omnia, quae ad mathematicarum rerum considerationem spectant, est principiorum sumptio, ut inter omnes convenit. Quorum primum est, mundi compositionem existere ordinatim ope unius principii administratam.“* So der platonische Philosoph Dercyllides bei Theon Smyr. (*Theonis Astr. ed. H. Martin, p. 327.*) Niemand wird zu behaupten wagen, dass in unserer Zeit eine andere Ansicht gilt.

*** *Gemini isagoge ad phaenomena, Cap. I.*

Galilei, Newton und ihre Nachfolger das metaphysische Element gänzlich vom Studium der Natur ausgeschlossen wurde.

Eine andere Bedingung, der sich jene, welche zuerst über den Bau des Universums nachdachten, fügen mussten, war die, für denselben die grösste Einfachheit und Symmetrie anzunehmen. So bildeten im System des Philolaus die Bahnen der Himmelskörper ein System von Kreisen, die um ein gemeinsames Centrum beschrieben waren; und dieselbe Regel, oder wenigstens eine ähnliche, ist in den verschiedenen Systemen des Plato beobachtet. An dieser Grundanschauung hielt auch Eudoxus fest und stellte sich vor, dass alle seine Sphären concentrisch um die Erde und symmetrisch zu ihr beschrieben seien,* weshalb ihnen in den späteren Zeiten mit Recht der Name homocentrische Sphären beigelegt wurde. Durch diese Annahme wurde das Problem viel schwieriger, weil dadurch diesen Sphären jede fortschreitende Bewegung genommen wurde und dem Geometer zur Erklärung der Phänomene nichts anderes übrig blieb als die Combination ihrer Rotationsbewegungen; aber dem Bau der Welt wurde dadurch eine Eleganz bewahrt, von welcher die Constructionen des Hipparch, des Ptolemäus und aller Andern, selbst des Copernicus, weit entfernt blieben und welche bis zu den Zeiten des Keppler ihres gleichen nicht wieder fand. Diese Concentricität der himmlischen Sphären hatte ausserdem noch den Vortheil, dem Zeugniss der Sinne und den damaligen Meinungen der alten Physiker nicht zu widersprechen. Man musste auch alles Mögliche versuchen, bevor man daran ging, am Himmel ein so unsymmetrisches und willkürliches Element, wie die excentrische Bewegung, einzuführen, ganz abgesehen von dem natürlichen Widerstreben, das sich von vornherein der Zulassung von Kreisbewegungen der Himmelskörper um nur ideale Mittelpunkte, ohne alle sinnliche Kennzeichen, entgegenstellen musste.

Eudoxus dachte sich deshalb ungefähr, wie vor ihm Plato, dass jeder Himmelskörper von einer um zwei Pole in gleichförmiger Rotation drehbaren Sphäre in kreisförmige Bewegung versetzt würde. Er nahm ausserdem an, dass derselbe in einem Punkt des Aequators dieser Sphäre befestigt sei, so dass er während der Rotation einen grössten Kreis beschrieb, dessen Ebene senkrecht auf der Rotationsaxe stand. Zur Erklärung der Veränderungen der Geschwindigkeiten der Planeten, ihrer Stillstände und Rückläufe und ihrer Abweichung nach rechts und links in Bezug auf Breite

* Man sehe Anhang II, wo Simplicius diese Concentricität ausdrücklich behauptet. Diese wird übrigens aus der Gesammtheit aller Eigenschaften des Systems klar. Dadurch ist mit einem Strich die Ansicht Derjenigen widerlegt, welche im System des Eudoxus den Keim für die Theorie der Epicykeln sehen wollten, welche später von Hipparch und den alexandrinischen Astronomen aufgestellt wurde.

genügte diese Hypothese nicht, und man musste annehmen, dass auf den Planeten mehrere der vorigen analoge Bewegungen wirken und dadurch zusammen jene einzige scheinbar unregelmässige Bewegung, welche die Beobachtung ergibt, hervorbringen. Eudoxus setzte deshalb fest, dass die Pole der den Planeten tragenden Sphäre nicht unbeweglich bleiben, sondern von einer grösseren der ersten concentrischen getragen würden, welche gleichförmig und mit einer ihr eigenthümlichen Geschwindigkeit um zwei von den vorigen verschiedene Pole rotire. Da man jedoch auch durch diese Annahme die Erscheinungen für keinen der sieben Planeten darstellen konnte, so befestigte Eudoxus die Pole der zweiten Sphäre auf einer dritten, welche zu den beiden ersten concentrisch und grösser als diese war. Dieser theilte er ihre besonderen Pole und ihre besondere Geschwindigkeit zu. Und wo drei Sphären nicht genügten, fügte er eine vierte hinzu, welche die drei ersten einschloss, die zwei Pole der dritten Sphäre enthielt und mit einer ihr eigenen Geschwindigkeit um ihre Pole rotirte. Durch die Untersuchung der Wirkungen dieser Zusammensetzung von Bewegungen fand Eudoxus, dass durch geeignete Wahl der Stellung der Pole und der Rotationsgeschwindigkeiten man wohl die Bewegungen der Sonne und des Mondes darstellen könne, wenn man für jeden dieser beiden Himmelskörper drei Sphären annehme. Für die verwickelteren Bewegungen der Planeten fand er jedoch vier Sphären nothwendig. Die bewegenden Sphären eines jeden Gestirns machte er vollständig unabhängig von denen, welche zur Bewegung der anderen dienten. Für die Fixsterne genügte eine einzige Sphäre, welche die tägliche Umdrehung des Himmels hervorbringt. Die von Eudoxus eingehaltene Reihenfolge der Planeten war mit der des Plato identisch; die Zusammenstellung des Systems war die im folgenden Schema:

Name und Reihenfolge der Gestirne:	Anzahl der bewegenden Sphären:
Saturn	4
Jupiter	4
Mars	4
Merkur	4
Venus	4
Sonne	3
Mond	3.

Die Gesammtzahl der bewegenden Sphären betrug also 26 und noch eine dazu für die Fixsterne. Man findet nirgends, dass Eudoxus nach der Ursache dieser Rotationsbewegungen, oder nach der Art der Uebertragung derselben von einer Sphäre auf die andere, geforscht hätte; ebensowenig fragte er nach ihrem Stoff, ihrer Grösse, ihren Durchmessern und ihren

gegenseitigen Abständen. Nur nach Archimedes* scheint es, dass Eudoxus die Sonne neun mal grösser als den Mond setzte, und daraus können wir schliessen, dass er dieselbe neun mal weiter entfernt hielt als den Mond. Er konnte zu dieser Schätzung durch das aufmerksame Studium der Phasen des Mondes in seinen verschiedenen Elongationen von der Sonne leicht gelangen. Eudoxus enthielt sich also gänzlich der Untersuchung solcher Fragen, welche auf sein Problem, nämlich die geometrische Darstellung der Phänomene, keinen Einfluss hatten, und dieses zeugt ebenfalls von der Besonnenheit und Nüchternheit seines Geistes. Er versuchte auch nicht die bewegenden Sphären eines Planeten mit denen der vorhergehenden und folgenden zu verbinden und nahm an, dass die zur Bewegung eines jeden Planeten gehörigen Sphären ein isolirtes, von den übrigen unabhängiges System bilden. Alles dies lässt uns glauben, dass für ihn die Sphären die Elemente einer mathematischen Hypothese waren, und nicht etwa wirklich bestehende Dinge; deshalb wird ihm mit Unrecht der Vorwurf gemacht, dass er das Weltall in krystallene Schalen eingeschlossen habe, deren Anzahl er ohne Zweck bedeutend gross annahm.

Eudoxus legte seine Hypothesen in einem Werk über die Geschwindigkeiten (περὶ ταχῶν) nieder, welches, wie alle seine andern Schriften, verloren gegangen ist.** Aristoteles, welcher nur um eine Generation jünger als Eudoxus war, und über diesen Gegenstand mit Polemarchus, einem Bekannten desselben, sich besprach, musste sichere Kenntnisse über den Mechanismus dieser Sphären haben, weshalb der kurze, aber genaue, wenn auch unvollständige Bericht, welchen er im 12. Buch der Metaphysik davon gibt, viele Beachtung verdient. Wahrscheinlich sprach auch Theophrastus in seiner verloren gegangenen Geschichte der Astronomie davon, man erzählt sogar, dass er den für die Bewegung der Planeten bestimmten Sphären den Namen „ungestirnte (ἄναστρος)“*** gab. Sicher ist ferner, dass Eudemus im 2. Buch seiner Geschichte der Astronomie ausführlich über das System des Eudoxus handelte, und von Eudemus schöpfte Sosigenes (der Reformator des Kalenders) den Bericht, den er mit vieler Weitläufigkeit in seinem Commentar zu den Büchern *de coelo* gibt. Dieser Commentar ist verloren gegangen, aber ein langer Auszug davon im Commentar des Simplicius zum 2. Buch *de coelo* ist uns noch erhalten. Dieser ist unsere hauptsächlichste Quelle, welche auch sehr glaubwürdig ist, da sie auf Eudemus zurückgeht, einen Zeitgenossen des Aristoteles, welcher nur kurze Zeit nach Eudoxus

* In der Sandrechnung *(arenarius)*.

** S. Anh. II., § 2. Es wird dieses eine der schönen Abhandlungen sein (κάλλιστα ὑπομνήματα), welche nach Diogenes Laërtius Eudoxus schrieb.

*** S. Anh. II.

lebte.* Gestützt auf diese Autoritäten werde ich nun nacheinander die Theorie, welche Eudoxus für jeden der sieben Planeten erdachte, auseinandersetzen und werde mit dem uns am nächsten stehenden, dem Monde, anfangen.

III. Mondstheorie des Eudoxus.

Die Theorie, welche sich Eudoxus bildete, um den Lauf des Mondes zu erklären, ist sehr einfach. Nach dem einstimmigen Bericht des Aristoteles und Simplicius waren die Bewegungen des Mondes durch die gleichförmige Rotation dreier Sphären hervorgebracht; die erste und äusserste derselben bewegte sich in demselben Sinn, wie die Fixsterne, die zweite um die Axe des Thierkreises, die dritte auf einem schief in die Zone des Zodiakus gestellten Kreis. Die erste derselben brachte durch ihre Rotation von Ost nach West die tägliche Umdrehung hervor. Die zweite verursachte durch ihre Bewegung von West nach Ost den monatlichen Umlauf. Die dritte Sphäre bewegt sich nach Simplicius im entgegengesetzten Sinn mit der zweiten und im gleichen Sinn mit der ersten. Sie dreht sich langsam um eine Axe, welche auf der Ebene des vom Mondmittelpunkt beschriebenen Kreises senkrecht steht. Die Neigung dieser Ebene gegen die Ebene der Ekliptik war gleich der grössten vom Mond erreichten Breite. Die Hinzufügung dieser dritten Sphäre war nach Simplicius deshalb nothwendig, weil der Mond seine nördlichste und südlichste Breite nicht immer in denselben Punkten des Thierkreises zu erreichen scheint, sondern diese Wendepunkte stets in einem der Ordnung der Thierkreiszeichen entgegengesetzten Sinn fortbewegt. Deshalb nahm man an, dass die Bewegung dieser Sphäre in einem mit der Umdrehung der Fixsterne gleichen Sinn vor sich gehe.

Die Erklärung des Simplicius lässt an Deutlichkeit nichts zu wünschen übrig, und man erkennt leicht, dass die drei Sphären dazu bestimmt waren, Rechenschaft von den drei Bewegungen des Mondes zu geben, welche Eudoxus kannte: nämlich der täglichen, der siderischen monatlichen und der rückschreitenden der Knoten der Mondsbahn auf der Ekliptik. Es wäre hier weiter nichts zu bemerken, wenn die den Sphären zugehörigen Geschwindigkeiten bei Simplicius nicht unrichtig angegeben wären.

---

* Da Aristoteles und Simplicius die einzigen Quellen sind, aus denen wir für unseren Gegenstand schöpfen können, so sind im Anhang I und II Auszüge hieraus in deutscher Uebersetzung mitgetheilt. Anhang I enthält die betreffende Stelle des Aristoteles, und Anhang II die des Simplicius, welche grossentheils dem Sosigenes entnommen ist. Um bequem darauf verweisen zu können, wurden diese Auszüge in numerirte Paragraphen abgetheilt.

In der That ist offenbar, dass, wenn die Sachen so stünden, wie es Simplicius angibt, wenn also die innerste Sphäre diejenige wäre, welche sich sehr langsam dreht und bestimmt ist, die Zurückweichung der Knoten zu erklären, der Mond dann während der sehr langen Umdrehungszeit, welche dieser Schriftsteller der dritten Sphäre beilegt, die, wie dem Eudoxus wahrscheinlich nicht unbekannt war, 223 Lunationen beträgt, nur ein einziges Mal durch einen gegebenen Knoten gehen könnte. Um den Durchgang des Mondes durch seine Knoten in der Anzahl, wie man sie beobachtet, zu erhalten, ist es nothwendig, die Geschwindigkeiten der beiden inneren Sphären zu vertauschen, das heisst anzunehmen, dass die innerste Sphäre die monatliche Bewegung des Mondes in ohngefähr 27 Tagen beschreibt,* auf einem Kreis, der gegen die Ekliptik unter einem Winkel geneigt ist, welcher der grössten Breite, die der Mond erreichen kann, gleichkommt: alsdann muss man diesen schiefen Kreis von der zweiten Sphäre während einer Zeitdauer von 223 Lunationen in retrograder Bewegung auf der Ekliptik drehen lassen; endlich ist anzunehmen, dass die beiden inneren Sphären in demselben Sinn, wie die Fixsterne von der äussersten gedreht werden. Auf diese Weise geht alles im Einklang mit der Beobachtung vor sich, und so dachte sich ohne Zweifel Eudoxus die Sache. Der Irrthum des Simplicius wurde auch von Ideler erkannt.**

Wir erfahren dadurch genau, bis zu welchem Grad der Vollkommenheit in jener Zeit bei den Griechen das Studium der Bewegungen des Mondes gelangt war. Die Beobachtungen waren bis zu dem Punkt gekommen, die Bewegung des Mondes nach Breite, und die Zurückweichung der Knoten der Mondsbahn erkennen zu lassen. Wenn wir die höchst unvollkommenen Beobachtungsmittel jener Zeiten in Betracht ziehen, und wenn wir bedenken, dass alles darauf hinauslief, die Stellung des Mondes unter den Sternen auf einem roh construirten Globus anzumerken, so wird man jenen Astronomen Eifer und Fleiss nicht absprechen können. Eudoxus erkannte eine Unregelmässigkeit der Bewegung in Bezug auf Länge noch nicht, oder liess sie wenigstens nicht zu; aber wir werden bald sehen, dass Callippus um das Jahr 325, also zwanzig oder dreissig Jahre nach Eudoxus, davon Kenntniss hatte. Von dem Fleiss, womit man damals die Bewegungen des Mondes und alles, was auf denselbeu Bezug hatte, studirte, berichten auch die Schriften des Opuntiers Philippus, eines Freundes und Schülers des Plato

* Der Leser wird leicht sehen, dass die Umlaufszeit des Mondes auf der innersten Sphäre gleich dem Drachenmonat angenommen werden muss, d. i. gleich dem Zeitintervall, das der Mond von einem Knotenpunkt bis zum Wiedereintritt in denselben nothwendig hat, also 27 Tage 5 Std. 5 M. 36 Sec.

** Man sehe die mit den meinigen identischen Ansichten Ideler's in den Abhandlungen der Berl. Ak. 1830 p. 77 hist.-philol. Classe.

und Zeitgenossen des Eudoxus. In diesen Schriften ist ein Buch über die Grösse der Sonne, des Mondes und der Erde citirt, ein anderes über die Entfernung der Sonne und des Mondes, und ein drittes über die Verfinsterungen des Mondes.* Wir haben schon angedeutet, dass nach Archimedes Eudoxus mit dem Verhältniss der Grösse der Sonne und des Mondes sich beschäftigte; auch spricht Archimedes von einem gewissen Phidias, welcher über dasselbe Problem nachdachte und die Sonne für 12 Mal grösser als den Mond hielt.**

Aber der deutlichste Beweis von den Fortschritten, welche man zu den Zeiten des Eudoxus im Studium der Mondsbewegung machte, liegt darin, dass man gerade in jenen Zeiten die Finsternisse voraus zu bestimmen begann, und dass diese Bestimmungen durch die Beobachtung bestätigt wurden. Von Helikon aus Cyzicus, einem Schüler des Eudoxus, erzählt man, dass er während seines Aufenthalts mit Plato und Aristippus am Hof des Dionysius II. von Syrakus eine Sonnenfinsterniss vorhersagte, welche wirklich eintraf, und dass ihn Dionysius deshalb mit einem Talent belohnte. Man glaubt, dass dieses jene Finsterniss war, welche nach unseren astronomischen Tafeln auf den 12. Mai 361 v. Chr. trifft.*** Wir möchten jedoch damit nicht behaupten, dass die griechischen Astronomen schon die Parallaxen in Rechnung zu ziehen verstanden, und dass sich ihre Vorausbestimmungen der Sonnenfinsternisse immer bewahrheiteten. Es ist eher glaublich, dass Helikon in seinem Erfolg eben so sehr vom Glück, als von seinem Wissen unterstützt wurde. Aber es ist kein Zweifel, dass die Kenntniss der Bewegung der Mondsknoten die griechischen Astronomen schon in jenen Zeiten in die Lage setzte, bestimmen zu können, in welchen Monaten des Jahres sowohl Monds- als Sonnenfinsternisse zu erwarten wären, und zu entscheiden, welche Conjunctionen und Oppositionen dazu am geeignetsten sind. Mit diesen Kenntnissen konnte man schon mit Erfolg die Vorhersagung des grössten Theils der Mondfinsternisse versuchen; bezüglich der Sonnenfinsternisse musste sich der Astronom beschränken, die Epochen anzugeben, in welchen dieselben erwartet werden konnten, und es zugleich hinnehmen, wenn er in vielen Fällen seine Erwartung nicht befriedigt sah.†

---

* Böckh, Ueber die vierjährigen Sonnenkreise der Alten pag. 36. Weil der Opuntische Philippus über die Grösse der Erde schrieb, so ist es nicht unwahrscheinlich, dass er zur Zahl derjenigen Mathematiker gehört, von denen Aristoteles *(de coelo II, 14)* berichtet.

** Archimedes, in der Sandrechnung.

*** Als Beleg hierzu s. Böckh, die vierj. Sonnenkr. d. A. p. 153—154.

† Uebrigens haben dieses schon die chaldäischen Astronomen einige Jahrhunderte vor Eudoxus verstanden; denn es war nicht möglich, die Mondsfinster-

IV. Sonnentheorie des Eudoxus.

Ueber diese Theorie lehrt uns Aristoteles, dass sie von drei Sphären abhing, welche fast auf dieselbe Weise, wie die drei Sphären des Mondes, geordnet waren; eine derselben hatte dieselbe Bewegung, wie die tägliche Rotation des Fixsternhimmels, die zweite bewegte sich nach dem Thierkreis und die dritte nach einem Kreis, der schief in die Breite des Thierkreises gestellt war. Aristoteles bemerkt, dass die Neigung dieses Kreises gegen die Ebene der Ekliptik für die Sonne geringer ist, als für den Mond. Simplicius, der dem Sosigenes folgte und sich mit diesem auf das Werk des Eudoxus περὶ ταχῶν bezieht, bestätigt die Angaben des Aristoteles. Er fügt alsdann hinzu, dass die Bewegung der dritten Sphäre nicht (wie beim Mond) im entgegengesetzten Sinn mit der zweiten vor sich gehe,

---

nisse zu beobachten, von deren Beobachtung in Babylonien Ptolemäus im Almagest berichtet, wenn die Beobachter nicht schon einigermassen darauf vorbereitet waren. Unter diesen Finsternissen sind einige von zwei oder drei Zoll, welche ohne Zweifel auch einem modernen Beobachter entgehen würden, wenn er nicht vorher Kenntniss davon hätte. Drei dieser Finsternisse wurden während 18 Monaten in den Jahren 721 und 720 v. Chr. beobachtet. Zudem ist für den grössern Theil derselben die Zeit des Eintritts angegeben, was vermuthen lässt, dass die Aufmerksamkeit schon vorher darauf gelenkt war. Deshalb war ich immer der Ansicht, dass die Chaldäer schon zu den Zeiten Nabonassar's es verstanden, wenigstens näherungsweise die Zeit zu bestimmen, zu welcher man eine Mondsfinsterniss erwarten konnte, und dass sie dieses mittelst des Cyklus von 223 Lunationen, der von ihnen durch lange fortgesetzte Beobachtungen gefunden wurde, bewerkstelligten. Eine neue Entdeckung bestätigt diese meine Ansicht. Herr Smith hat vor Kurzem eine in Keilschrift geschriebene assyrische Tafel entziffert, deren Sinn folgender ist: „seinem königlichen Herrn, dessen treuer Diener Abil-Istar. Der Friede begünstige meinen königlichen Herrn, Nebo und Merodach seien ihm günstig; die Götter schenken ihm langes Leben, Gesundheit und Zufriedenheit. Wegen der Mondsfinsterniss schickte mich mein König nach Akkad; ich habe die Beobachtung in der Stadt Akkad gemacht; die Finsterniss ist eingetroffen. Wegen der Sonnenfinsterniss habe ich die Beobachtung gemacht; die Finsterniss ist nicht eingetroffen, und dieses berichte ich meinem Herrn. Die Mondsfinsterniss, welche wirklich eintraf, bezieht sich auf die Hititer, und bedeutet Untergang für Phönicien und für die Chaldäer. Unser Herr wird Frieden haben und die Beobachtung zeigt für ihn kein Unglück an. Ruhm sei mit meinem königlichen Herrn." Wir lernen hieraus unter anderm folgendes: 1.° Dass die Chaldäer und Assyrer vor dem Untergang des assyrischen Reichs den Eintritt von Monds- und Sonnenfinsternissen vorher zu bestimmen pflegten; wahrscheinlich mit Benützung des Cyklus von 223 Lunationen. 2.° Dass ihre Regeln beim Mond Erfolg hatten, aber bei der Sonne auf Irrthümer führen konnten, was andeutet, dass sie die Parallaxen nicht zu berücksichtigen verstanden; auch Diodorus versichert dasselbe in seinem 2. Buch. 3.° Dass die Chaldäischen Astronomen und Astrologen diesen Phänomenen wichtigen Einfluss auf Staatsangelegenheiten zuschrieben.

sondern in demselben Sinn (§ 2), das ist nach der Ordnung der Thierkreiszeichen, und dass diese Bewegung bei Weitem langsamer ist, als diejenige der zweiten Sphäre. Die Gesammtheit dieser Angaben zeigt hinreichend, wie nach Eudoxus die Natur der Bewegungen der Sonne beschaffen war. Zum besseren Verständniss derselben dienen folgende Bemerkungen:

Vor allem ist zu bemerken, dass bezüglich der Geschwindigkeiten der beiden inneren Sphären Simplicius hier in denselben Irrthum verfallen ist, auf welchen wir schon beim Mond aufmerksam gemacht haben. Wenn wirklich, wie er will, die dritte Sphäre sich sehr langsam auf einem schief zur Ebene der Ekliptik stehenden Kreis bewegte, so ist klar, dass dadurch die Sonne im Allgemeinen entweder in eine nördliche oder in eine südliche Breite versetzt würde; da nun die Veränderungen ihrer Breite sehr langsam angenommen werden, so würde der Mittelpunkt dieses Gestirns nicht sowohl, wie Simplicius andeutet, einen *grössten Kreis*, sondern vielmehr einen kleineren Kreis parallel zur Ekliptik beschreiben. Dieser Widerspruch in der Auseinandersetzung des Simplicius (welche übrigens sehr klar, genau, wenn auch nicht vollständig ist) zeigt, dass man hier, wie schon beim Mond, die langsame Bewegung der zweiten Sphäre und nicht der dritten zutheilen muss, und dass dieselbe längs des Thierkreises vor sich gehend anzunehmen ist; ferner, dass die Bewegung der dritten Sphäre in ohngefähr einem Jahr* *auf jenem schiefen grössten Kreis, welchen der Mittelpunkt der Sonne zu beschreiben scheint*, vor sich gehen muss. Dieser grösste gegen die Ekliptik sehr wenig geneigte Kreis wird von der zweiten Sphäre um die Axe des Thierkreises gedreht und seine Knotenpunkte auf der Ekliptik rücken, wie Eudoxus annahm, langsam vorwärts, anstatt sich rückwärts zu bewegen, wie die des Mondes.

Zweitens sehen wir, dass die jährliche Bewegung der Sonne auf ihrem Kreis hier vollständig gleichförmig vor sich geht. Eudoxus wies also jede Unregelmässigkeit in der Bewegung der Sonne zurück. Ich sage, *er wies sie zurück*, weil ihm nicht unbekannt sein konnte, dass Meton und Euktemon 60 oder 70 Jahre vor ihm durch fleissige Beobachtung der Solstitien und Aequinoctien die damals fast unglaubliche Thatsache zur Evidenz gebracht hatten, dass die Sonne nicht gleich viel Zeit zur Beschreibung der vier zwischen den Aequinoctial- und Solstitialpunkten ge-

* Ich sage „ohngefähr" in einem Jahr, weil, da die Sonne von den beiden letzten Sphären zur Längenbewegung veranlasst wird, die Geschwindigkeit derselben gleich der Summe der Geschwindigkeiten dieser beiden Sphären ist. Deshalb muss die Geschwindigkeit in der dritten Sphäre etwas kleiner sein als diejenige, welche wir mittlere Bewegung nach der Länge nennen, und die Umlaufszeit in der dritten Sphäre muss etwas mehr als ein tropisches Jahr betragen.

legenen Quadranten ihrer Bahn gebraucht.* Eudoxus musste also nothwendigerweise die Dauer der vier Jahreszeiten gleich lang annehmen, wofür wir auch einen anderen, directen Beweis haben. In der That, in einem alten griechischen Papyrus, welcher Auszüge aus dem Eudoxischen Kalender enthält und der deshalb unter dem Namen des Eudoxischen Papyrus** bekannt ist, befindet sich die deutliche Angabe, dass Eudoxus den vier Jahreszeiten eine gleichmässige Dauer von 91 Tagen beilegte, mit Ausnahme des Herbstes, dem er 92 Tage zutheilte, um die Gesammtsumme der 365 Tage des Jahres zu erhalten.

Aber der sonderbarste und beachtenswertheste Umstand, welcher sich in der Sonnentheorie des Eudoxus darbietet, ist die in derselben gemachte Unterscheidung zwischen der festen Ebene der Ekliptik und der als beweglich angenommenen Ebene der jährlichen Sonnenbahn. Es wird angenommen, dass die Ebene dieser Bahn, wie die des Mondes, gegen die Ebene der Ekliptik unter einem kleinen, constanten Winkel geneigt sei, und ihren Knoten, das ist ihren Durchschnittspunkten mit der Ekliptik, muss man nach Eudoxus eine langsame Bewegung in der Ordnung der Thierkreiszeichen mittheilen. Die Geschichtsschreiber der Astronomie haben dieser Annahme nicht die hinreichende Beachtung gewidmet; von Anderen wurde sie nicht richtig gedeutet und mit dem hiervon ganz verschiedenen Phänomen der Präcession der Nachtgleichen verwechselt. Es ist also nothwendig, diesen Punkt mit einiger Genauigkeit zu betrachten, um das Dunkel, in welches er gegenwärtig noch gehüllt ist, zu lichten. Der Bequemlichkeit unserer Auseinandersetzungen wegen wollen wir diesem Phänomen den Namen Nutation der Sonnenbahn beilegen.

* Man sehe hierüber den Abschnitt VII dieser Schrift.

** Dieser Papyrus, dessen Entstehung Böckh mit Gewissheit in die Jahre 193—190 v. Chr. versetzt, und der viele Angaben bezüglich des Kalenderwesens auch von Astronomen nach Eudoxus enthält, befindet sich im Museum des Louvre zu Paris. Weiteres hierüber sehe man: *Brunet de Presle* im vol. XVIII der *Notices et extraits de la bibliothèque du roi,* Theil II; Böckh, über die vierj. Sonnenkr. d. A. p. 197—226; *Letronne, Journal des savants, anno 1839.* Auszüge, welche Bezug auf diesen Gegenstand haben, wurden im griechischen Original publicirt von Wachsmuth, in seiner Ausgabe des Buches *de Ostentis di Giovanni Lido,* Teubner, Leipzig 1863, pp. LIX, und 273—275. Man pflegt ihn den Eudoxischen Papyrus zu nennen, weil auf der Rückseite ein Akrostichon von zwölf Versen steht, deren Anfangsbuchstaben die Worte Εὐδόξου Τέχνη, *ars Eudoxi* bilden. Nach der Meinung des Böckh und Mommsen (s. Böckh und Wachsmuth a. a. O.) wäre dieses sonderbare Ueberbleibsel des Alterthums ohngefähr als ein Collegienheft zu betrachten, in welches die Studenten, richtig oder fehlerhaft, aufzuschreiben pflegen, was sie sich von den Vorträgen der Professoren merken wollen. Der Papyrus ist in der That voll von Irrthümern, und ohne alle Ordnung niedergeschrieben.

Simplicius (§ 2) gibt den Grund an, warum Eudoxus die dritte Sphäre der Sonne, welche diese Nutation hervorbringt, einführte. Dem Eudoxus, sagt er, und seinen Vorgängern* schien die Sonne drei Bewegungen zu haben, nämlich die des Fixsternhimmels, dann eine der vorigen entgegengesetzte durch die zwölf Zeichen und drittens eine zum mittlern Kreis des Zodiacus seitliche; letzteres wurde daraus geschlossen, dass die Sonne in den Sommer- und Wintersolstitien nicht immer in demselben Punkt des Horizontes aufgeht."** Wir lernen hieraus, dass schon Astronomen vor Eudoxus bei der Sonne eine Abweichung im Sinn der Breite und eine Veränderung der Punkte, in denen die Solstitien und Aequinoctien eintreffen, vermutheten. Dieses wird Jemandem, der heut zu Tage die Elemente der Astronomie aus Büchern studirt, sonderbar scheinen, es war aber durchaus nicht sonderbar für jene Männer, welche die ersten Fundamente dieser Wissenschaft mit Hilfe unvollkommener Beobachtungen legen mussten. Den ersten Astronomen, welche sich mit der Bewegung der sieben Wandelsterne beschäftigten, musste sich die Abweichung des Mondes und der fünf kleineren Planeten nach der Breite sehr bald aus dem unmittelbaren Vergleich mit den Fixsternen ergeben. Es war also für sie weder leicht, noch natürlich anzunehmen, dass die Sonne allein unter allen übrigen keine Abweichung vom mittleren Kreise des Zodiacus zulasse. Vielleicht hätte sie der unmittelbare Vergleich der Stellung der Sonne zu den benachbarten Fixsternen von ihrem Irrthum abbringen können, aber dieser Vergleich war damals nicht möglich. Die Beobachtungen mittelst des Gnomon und die Bestimmung des Aufgangs- und Untergangspunktes der Sonne zur Zeit der Solstitien waren weder hinreichend genau, noch leicht auf theoretische Weise mit den Beobachtungen der Sterne zu vergleichen. Aus diesen Gründen verstehen wir vollkommen, warum der astronomische Mythus von der Nutation der Sonnenbahn sich durch alle Jahrhunderte der griechischen Astronomie vor und nach Eudoxus fortpflanzte, wie wir sogleich sehen werden.

Nach der Geschichte der Astronomie des Eudemus (eines Zeitgenossen und Freundes des Aristoteles) war Thales der erste, welcher eine Unregelmässigkeit des Laufes der Sonne bemerkte, und man erzählt von ihm, dass er sagte: „der Lauf der Sonne*** bezüglich der Solstitien geht nicht immer auf die gleiche Weise vor sich". Darunter kann man sowohl eine Abweichung im Lauf der Sonne am Himmel verstehen, als auch eine ungleiche

* *Εὐδόξῳ καὶ τοῖς πρὸ αὐτοῦ.*

** . . . . . . *καὶ γὰρ καὶ τοῦτο κατείληπτο ἐκ τοῦ μὴ κατὰ τὸν αὐτὸν ἀεὶ τόπον ἐν ταῖς τροπαῖς ταῖς θεριναῖς καὶ χειμεριναῖς ἀνατέλλειν.*

*** *Εὔδημος ἱστορεῖ ἐν ταῖς Ἀστρολογίαις, ὅτι . . . . Θαλῆς (εὗρε) ἡλίου ἔκλειψιν καὶ τὴν κατὰ τὰς τροπὰς αὐτοῦ περίοδον, ὡς οὐκ ἴση ἀεὶ συμβαίνει. Theonis Smyrnaei Astr. ed. Martin pag. 324.*

Dauer des Jahres; aber vielleicht eher das erstere, weil eine ungleiche Dauer des Jahres auch Unregelmässigkeiten im Lauf der Sonne bezüglich der Fixsterne hervorgerufen hätte und weil zur Zeit des Thales und auch noch lang nach ihm alle Griechen den Lauf der Sonne zur Bestimmung der Jahreszeiten, der ländlichen Arbeiten, und folglich auch zur Bestimmung der Dauer des Jahres benützten. Nun aber ist an dieser Stelle des Eudemus vom Lauf der Sonne nicht in Bezug auf die Sterne, sondern in Bezug auf die Solstitien die Rede, was den damaligen Griechen ganz klar war, ebenso wie uns, wenn auch aus Gründen, die von den unsrigen ganz verschieden sind.

Ein anderer Beweis zeigt uns, dass die Annahme einer Bewegung der Sonne nach Breite in Griechenland nicht nur vor Eudoxus, sondern auch nach ihm und durch seine Autorität verbreitet war. Hipparchus führt im ersten Buch seiner Einleitung zu den Phänomenen von Aratus die folgende Stelle aus dem Commentar, welchen gegen Anfang des zweiten Jahrhunderts v. Chr. der Rhodier Attalus über das Gedicht des Aratus geschrieben hatte, an: „Die Astronomen pflegen den Wendekreisen, dem Aequator und der Ekliptik eine gewisse Breite beizulegen und behaupten, dass der Wendepunkt der Sonne nicht immer auf demselben Kreis liege, sondern bald nördlicher, bald südlicher. Dieses bestätigt Eudoxus mit folgenden Worten, welche im Enoptron zu finden sind: „Es scheint, dass auch die Wendepunkte der Sonne ihre Lage etwas ändern, aber viel weniger auffällig und nur gering".* Wir wissen schon aus Aristoteles, dass nach der Ansicht des Eudoxus die Abweichungen der Sonne nach der Breite geringer waren, als die des Mondes; der eben angeführte, dem Enoptron entnommene Ausspruch zeigt, dass sie nach ihm nur sehr gering und den Beobachtungen kaum bemerkbar waren. Der Vergleich in diesem Ausspruch bezieht sich ohne Zweifel auf den Mond, von welchem Eudoxus vorher gesprochen hatte. Welchen Neigungswinkel Eudoxus in Wirklichkeit der Sonnenbahn zuschrieb, wissen wir nicht, ebensowenig als wir Kenntniss haben über die Periode des Umlaufs der Knotenpunkte der Sonne auf der Ekliptik,** und der Stellung, welche man diesen Knoten in einer gegebenen Zeit anwies.

---

* .... *λέγεται γ'οὖν ἐν τῷ Ἐνόπτρῳ οὕτως. φαίνεται δὲ διαφορὰν τῶν κατὰ τροπὰς τόπων καὶ ὁ ἥλιος ποιούμενος· ἀδηλοτέραν δὲ πολλῷ καὶ παντελῶς ὀλίγην. Hipparchi in phaenomena Arati* im Uranologion v. Petavius p. 198. Der Enoptron des Eudoxus war, ebenso wie seine „Phänomene", eine Abhandlung über Astrognosie, wo zugleich mit der Beschreibung der Sternbilder und ihrer Auf- und Untergänge auch die hauptsächlichsten Kreise der Kugel behandelt wurden. Beides lieferte den Stoff zu dem bekannten Gedicht des Aratus.

** Aus einer Stelle des Plinius könnte man vielleicht schliessen, dass die Bewegung der Knoten in einer vierjährigen Periode vor sich geht: *Omnium*

Unter die Astronomen, von welchen Attalus berichtet, dass sie die Nutation der Sonnenbahn annahmen, können wir in erster Linie Callippus zählen, der, wie wir sehen werden, dem Lauf der Sonne auch eine Sphäre zur Erklärung ihrer Bewegung nach Breite zutheilte. Eine Meinung, welche Eudoxus und Callippus, die ersten Astronomen ihrer Zeit, zu Vertretern hatte, musste leicht Verbreitung finden, wie uns auch die Stelle des Attalus glauben lässt. Sie fand ihren ersten mächtigen Gegner in Hipparch, welcher dieselbe in dem angeführten Werk einer herben und vielleicht auch übermässig strengen Kritik unterzieht. Hipparch bemerkt, dass die mit dem Gnomon ausgeführten Beobachtungen der Solstitien keine Bewegung der Sonne nach der Breite ergeben, und dass die Mondsfinsternisse, welche von den Astronomen seiner Zeit ohne Berücksichtigung dieser Bewegung berechnet wurden, die Vorherbestimmung vollständig bestätigten, indem die beobachtete Grösse von der berechneten höchstens um zwei Zoll und auch dieses nur selten verschieden war.* Dessenungeachtet finden wir Bemerkungen über die hypothetische Nutation bei Schriftstellern, die viel später als Hipparch lebten. Plinius, der im zweiten Buch seiner Naturgeschichte die verschiedenen Neigungswinkel der Planetenbahnen gegen die Ekliptik beschreibt,** drückt sich bezüglich der Sonne folgender Massen aus: *„Sol deinde medio (signifero) fertur inter duas partes flexuoso draconum meatu inaequalis“;* mit diesen phantastischen Worten will er sagen, dass die Sonne eine Sinuslinie im Thierkreis beschreibt und sich von der Ekliptik um 1^0 nach beiden Seiten entfernt. Dies wird uns noch viel klarer durch die darauffolgenden Worte: *„Martis stella, quatuor mediis: Jovis media et super eam duabus, Saturni duabus, ut Sol“.* Es ist unmöglich unter den zahlreichen Autoren, aus denen Plinius den Stoff zu seinem zweiten Buche entnahm, denjenigen zu bestimmen, von welchem diese Bemerkung herrührt.

Aber eine vollständige Theorie über die Nutation der Sonnenbahn findet sich bei Adrast aus Aphrodisias, einem peripatetischen Philosophen und Mathematiker, welcher nach der Vermuthung H. Martins*** gegen

---

quidem (si libeat observare minimos ambituus) redire easdem vices quadriennio exacto Eudoxus putat, non ventorum modo, verum et reliquarum tempestatum magna ex parte. Et est principium lustri ejus semper intercalario anno caniculae ortu. Plin. hist. II, 47.

* *Hipparchi, in phaen Arati,* p. 198—199 im Uranologion. Dieses Zeugniss ist vielleicht von denen unbeachtet geblieben, welche behaupten, dass es vor Hipparch in Griechenland keine Astronomie gab.

** *Plinii hist. lib. II, c. 16.*

*** H. Martin, *dissertatio de Theonis Smyrnaei astr. p. 74.* Theon scheint etwas später als Adrast gelebt zu haben.

Ende des ersten Jahrhunderts oder am Anfang des zweiten n. Chr. lebte. Zahlreiche Auszüge über ein astronomisches Werk desselben bilden einen grossen Theil der von Martin im Jahr 1849 unter dem Titel: *Theonis Smyrnaei Platonici liber de Astronomia, Parisiis,* 1849 veröffentlichten Schrift. Im Capitel XII derselben spricht Theon, nach Adrast, von den Bewegungen der Wandelsterne (die Sonne eingerechnet) nach der Breite; bei der Aufzählung der grössten Entfernung eines jeden von der Ekliptik sagt er:* „Die Bewegung der Sonne nach der Breite im Thierkreis ist nur klein, sie beträgt im Ganzen 1^0 auf 360^0". Daraus ist zu ersehen, dass die grösste Abweichung der Sonne auf beiden Seiten der Ekliptik $\frac{1}{2}^0$ beträgt. Nach Anführung der Abweichungen der anderen Planeten fährt er so fort: „Aber der Mond und die Sonne entfernen sich seitlich von der Ekliptik nach beiden Richtungen auf gleiche Weise, und zwar in jedem Zeichen". Letztere Worte deuten die Bewegung der Knoten der Monds- und Sonnenbahn auf der Ekliptik an. Alsdann sagt er im Capitel XXVII** bei der Besprechung der Perioden, in welchen die Länge, die Breite und die Entfernung der Sonne von der Erde dieselben werden: „für die Sonne ist die Dauer für die Zurückkunft zu derselben Länge, Breite, Entfernung und sogenannten Anomalie so übereinstimmend, dass sie den meisten Mathematikern vollständig gleich zu sein scheint. Aber Diejenigen, welche die Sache mit grösserer Genauigkeit betrachten, glauben, dass die Umlaufszeit bezüglich der Länge, d. i. der Zurückkunft der Sonne von einem Punkt zu demselben, von dem einen Solstitium zu demselben und von einem Aequinoctium zu demselben ohngefähr so gross sei, wie wir schon anführten ($365\frac{1}{4}$ Tage); woher es komme, dass die Sonne nach vier Jahren zu derselben Breite in der nämlichen Stunde des Tages zurückkehre. Die Zeit bis zum Eintreffen derselben Anomalie, während welcher sie von der grössten bis zur kleinsten Entfernung von der Erde zurückkehrt, bis zur grössten oder kleinsten scheinbaren Geschwindigkeit, bis zur grössten oder kleinsten scheinbaren Grösse, glauben sie betrage ohngefähr $365\frac{1}{2}$ Tage; und nach Verlauf von zwei Jahren habe die Sonne wieder zu derselben Stunde des Tages dieselbe Entfernung von uns. Ferner glauben sie, dass die bis zur Rückkehr der Sonne zu derselben Breite nothwendige Zeit, nämlich während welcher sie vom südlichsten oder nördlichsten Punkt*** ihrer Bahn zu demselben Punkt zurückkehrt und wiederum denselben Schatten an demselben Gnomon gibt, $365\frac{1}{8}$ Tage betrage; und

* *Theonis astr. ed. Martin p. 174.*

** Ebenda p. 260—262.

*** Dieses bezieht sich selbstverständlich auf die Breite und nicht auf die Declination.

die Sonne folglich nach acht Jahren dieselbe Breite zu derselben Stunde des Tages erreiche. Endlich findet sich im Capitel XXXVIII* Folgendes: „Die Bahn der Sonne scheint fast mit der Ekliptik zusammenzufallen; jedoch ist sie gegen dieselbe etwas geneigt in der Weise, dass ihre Abweichung von beiden Seiten der Ekliptik ohngefähr $^1/_2{}^0$ beträgt“.

Hier hat man also über die Nutation der Sonnenbahn mehrere klar ausgesprochene Ansichten und numerische Angaben, welche sicherlich weder von Theon noch von Adrast, sondern von irgend einem Astronomen, der vor beiden lebte, herrühren. Der bewegliche Pol der Sonnenbahn steht hier um $^1/_2{}^0$ vom festen Pol der Ekliptik ab und ersterer beschreibt bei seiner Bewegung um letzteren einen kleinen Kreis von 1^0 Durchmesser. Mit der Geschwindigkeit dieser Bewegung verhält es sich so, dass, während die Sonne $365^1/_4$ Tage braucht, um die ganze Länge von 360^0 bis zu ihrer Rückkehr zu demselben Punkt ihrer beweglichen Bahn zu beschreiben, diesem $365^1/_8$ Tag genügen. Daraus folgt, dass die Bewegung dieser Bahn retrograd ist, und dass diese Differenz in einer Anzahl von Jahren ausgeglichen wird, welche durch den Quotienten $365^1/_4 : {}^1/_8$ d. i. 2922 gegeben ist.

Die mathematischen Folgerungen aus dieser Hypothese sind leicht zu ersehen. Sei (Fig. 1) auf dem Himmelsgewölbe P der Pol des Aequators, E derjenige der Ekliptik, der Bogen PE gleich der Schiefe der Ekliptik; $abcd$ stelle den kleinen Kreis (von 1^0 Durchmesser) vor, welcher vom Pol der Sonnenbahn in 2922 Jahren nach der von dem Pfeil angedeuteten Richtung im entgegengesetzten Sinn mit der Ordnung der Thierkreiszeichen beschrieben wird. Befindet sich in einem Augenblick dieser Pol in m, so wird Pm die Neigung der Sonnenbahn gegen den Himmelsäquator sein, und ist die Richtung des Bogens Pm zugleich jene des Colur der Solstitien, so wird die darauf senkrechte $P\mu$ jene des Colur der Aequinoctien sein. Die grösste Neigung der Sonnenbahn gegen den Aequator wird Pb sein, die kleinste Pa und ihre sehr langsam vor sich gehende Aenderung vom grössten bis zum kleinsten Werth wird 1^0 betragen.** Die Richtung der Coluren gegen den Punkt P wird eine schwankende Bewegung haben, deren Grenzen (für den Colur der Solstitien) die Richtungen Pc und Pd sind; die gesammte Abweichung ist durch den Winkel cPd dargestellt. Setzt man $PE = 24^0$, so ergiebt sich Winkel $cPd = 2^0\ 28'$; und dieses wird der grösste Betrag der oscillatorischen Bewegung der Aequinoctialpunkte

* *Theonis Astr. ed Martin p. 314.*

** Die Angaben des Adrast und Theon, dass nach Verlauf von $365^1/_8$ Tagen „der Schatten desselben Gnomon wieder derselbe wird“, ist nicht mathematisch, sondern nur annäherungsweise richtig; denn während dieser Zeit konnte sich, jener Theorie gemäss, die Schiefe der Sonnenbahn bezüglich des Aequators um eine kleine Grösse ändern.

auf dem Aequator sein.* Die grösste Geschwindigkeit dieser Punkte entspricht der Stellung a des Poles der Sonnenbahn; in diesem Falle rücken die Aequinoctien jedes Jahr um 9″ 71 auf dem Aequator vor. Ein anderes Maximum entspricht einer retrograden Bewegung der Aequinoctien, wenn der Pol der Sonnenbahn sich in b befindet: die jährliche Zurückweichung auf dem Aequator beträgt alsdann 9″ 33. Hieraus ist klar, dass die Annahmen Theon's, welche wir anführten, von demselben nicht erdacht wurden, wie man vielleicht glauben könnte, um damit die von Hipparch entdeckte Bewegung der Aequinoctialpunkte zu erklären. Diese Bewegung ist nämlich in Wirklichkeit gleichförmig und viel schneller, denn sie beträgt nach Hipparch jährlich 36″ auf der Ekliptik gezählt; trägt man dieselbe auf den Aequator über (unter der Annahme, dass sich die Ekliptik längs des Aequators bewegt), so bleiben noch 33″.

Es ist nicht leicht anzugeben, welchem der alten Astronomen die vorliegende Theorie zugeschrieben werden muss. Die Dauer von $365\frac{1}{8}$, $365\frac{1}{4}$, $365\frac{1}{2}$ Tagen, welche angenommen wurde für die Rückkehr der Sonne zu derselben Breite, Länge und Anomalie, scheinen zum Zweck der Zurückführung derselben Stellung der Sonne auf denselben Stundenkreis nach Verlauf von acht Jahren berechnet zu sein, wie Theon ausdrücklich bemerkt. Es scheint also, dass diese Bestimmungen gleichbedeutend sind mit der berühmten Periode der Oktaëteris, welche, bevor die Griechen den goldnen 19jährigen Cyklus des Meton kannten, denselben dazu diente, ihren Kalender so gut als möglich nach der Bewegung der Sonne und des Mondes einzurichten. Verschiedene Astronomen beschäftigten sich mit dieser Periode, auch nach der Erfindung des Meton; unter diesen sind zu nennen Eudoxus, Harpalus, Nauteles, Mnesistratus, Dositheus und Eratosthenes. Dem Eudoxus kann vorliegende Theorie sicherlich nicht zugeschrieben werden; erstens, weil nach ihm die Bewegung der Sonnenknoten direct ist, während sie hier sich retrograd ergiebt; zweitens, weil wir aus Plinius ersehen (siehe pag. 124**), dass dieses Phänomen von ihm mit einem vierjährigen Cyklus, und nicht mit einem achtjährigen in Verbindung gebracht wurde. Es scheint eher, dass die dem Eudoxus zugeschriebene Oktaëteris einen andern Urheber hat, vielleicht den Dositheus, einen Freund und Zeitgenossen des Archimedes.** Ebensowenig wird man daran denken können, den Eratosthenes zum Urheber der von Adrast und Theon erwähnten Nutation der Sonne

---

* Es ist jedoch nicht mathematisch, sondern nur annäherungsweise richtig, wenn Adrast und Theon sagen, dass nach Verlauf von $365\frac{1}{4}$ Tagen die Sonne von einem Aequinoctium zu demselben wieder zurückkehrt; weil unterdessen die Aequinoctialpunkte wegen ihrer Schwankung sich um eine kleine Grösse verschoben haben werden.

** S. Ideler, über Eud. Abh. d. Berl. Ak. 1830, p. 61—62.

zu machen, da wir mit hinreichender Sicherheit wissen, dass Eratosthenes die Schiefe der Ekliptik unveränderlich und constant annahm.

In jedem Fall zeigt die Thatsache, dass sich Astronomen wie Dositheus und Eratosthenes auch nach den Erfindungen des Meton und Callippus mit der Oktaëteris beschäftigten, dass jener Cyclus, welcher alle Brauchbarkeit als Schaltsystem verloren hatte, doch noch einige Wichtigkeit in anderer Beziehung besass, und man kann sich schwerlich eine andere denken, welche nicht zusammenhinge mit gewissen auf die Sonne bezüglichen Perioden. Aber es ist nicht möglich, diese Sache weiter zu verfolgen.

Einige weitere Aufklärung über die Geschichte der Nutation der Sonne gibt uns Martianus Capella, welcher nach dem Buch des Terentius Varro über die Astronomie, von der Bewegung der Planeten nach Breite Folgendes sagt:* *Alia (sidera) per tres (latitudinis) partes deferuntur: alia per quatuor: alia per quinque: alia per octo: quaedam per omnes duodecim deferuntur. Sol in nullam excedens partem in medio libramento fertur absque ipso Librae confinio. Nam ibi se aut in Austrum Aquilonemque deflectit ad dimidium fere momentum.* Die Sonne würde hiernach während ihres jährlichen Laufes die Ekliptik genau einhalten, ausgenommen im Zeichen der Waage, wo sie eine Abweichung von ohngefähr $\frac{1}{2}^0$ gegen Süden oder Norden hat! Offenbar wurde diese Bemerkung des afrikanischen Compilators dadurch, dass sie von einer Feder in die andere überging, verdorben und unverständlich. Der ursprüngliche Sinn war vielleicht der: dass die Sonne sich nie merklich von der Ekliptik entfernt, und dass nur im Zeichen der Waage (und folglich auch des Widders) ihre Breite $\frac{1}{2}^0$ erreicht. Aus dieser Interpretation sehen wir, dass die Urheber dieser Angaben der Meinung waren, die Knotenpunkte der Sonnenbahn fielen mit den Solstitialpunkten zusammen und die grösste Breite der Sonne mit den Aequinoctialpunkten.** Diese Vermuthung erlangt noch grösseres Gewicht aus dem Umstand, dass sich eine dieser Stelle des Martianus Capella vollständig ähnliche, aber aus ganz anderer Quelle stammende in einer lateinischen Abhandlung: *De Mundi coelestis terrestrisque constitutione* befindet, welche in den Werken des ehrwürdigen Beda steht und ihm zugeschrieben

* *Martiani Capellae, de nuptiis Philologiae et Mercurii lib. VIII.*

** Ich habe Grund zu glauben, dass bezüglich der Bewegung der Sonne nach Breite, Theon (oder Adrast) und Martianus Capella (oder Terentius Varro, welcher fast das ganze Material zum 8. Buch des afrikanischen Compilators lieferte) eine und dieselbe Quelle hatten; denn beide stimmen sowohl darin überein, dass sie der Sonne eine Digression von $\frac{1}{2}^0$ beilegen, als auch sind alle Digressionen nach Breite für die einzelnen Planeten bei beiden identisch und zugleich mehr oder wenig verschieden von den bei Plinius und Cleomedes angegebenen; dazu kommen

wird, wenn auch die Zeit ihrer Verfassung unzweifelhaft nach Carl dem Grossen anzunehmen ist.* In dieser Schrift ist zu lesen: *Sol duas medias (zodiaci partes) servat, nec illas, nisi in Libra, excedit.*** Man hat demnach hier eine Breitenabweichung von 2^0, dieselbe, welche auch Plinius annimmt; auch die in diesem Schriftchen angegebenen Abweichungen der andern Planeten stimmen besser mit den Angaben des Plinius, als mit denen der anderen Autoren überein.*** Also auch in dieser Ueberlieferung, welche verschieden von derjenigen ist, die Martianus Capella befolgte, wird die grösste Entfernung der Sonne von der Ekliptik ebenso wie bei Martianus, in das Zeichen der Waage gesetzt. Daraus folgt mit einiger Wahrscheinlichkeit, dass die verschiedenen Astronomen, welche die Nutation der Sonnenbahn annahmen, verschiedene Angaben über die Grösse dieser Nutation

---

noch andere bemerkenswerthe Parallelstellen, z. B. findet sich bei beiden die Angabe der heliocentrischen Bewegung für Venus und Merkur. Wenn es sich wirklich damit so verhält, und wenn die von Martianus und Theon überlieferten Angaben aus derselben Quelle stammen, so können wir sagen, dass die von Martianus gegebene Bemerkung über den Ort der Knoten der Sonne die Auseinandersetzung Theon's (bei dem diese Angabe fehlt) ergänzt.

* *Bedae presbyteri Anglo-Saxonis opera. Coloniae 1612, vol. I, pag. 323–344.* An drei Stellen ist p. 329, 331, 332 die *historia Caroli* oder die *Gesta Caroli* citirt. Auf p. 324 ist Beda selbst citirt. Beda wurde bekanntlich im Jahr 671 geboren und kann folglich unmöglich mit Carl dem Grossen gelebt haben. Ueberdies findet sich in dem von ihm selbst in seinem 59. Lebensjahr verfassten Catalog seiner Werke (s. die Biographie Beda's im Eingang der oben angeführten Cölner Ausgabe) das Buch *de Mundi Coelestis terrestrisque constitutione* nicht angegeben. Beda starb kurz nach Verfassung dieses Catalogs im Jahr 731 oder 733. Die auf die Geschichte Carls des Grossen bezüglichen Bemerkungen finden sich wirklich in den Annalen der Carolinger um die Jahre 798 und 807. Man vergleiche jene Angaben mit den *Annales Bertiniani* bei *Muratori, rerum Italicarum scriptores, vol. II, p. 504* und *506*. Folglich kann besagte Schrift nicht über das IX. Jahrhundert zurückgehen und ist wenigstens um ein Jahrhundert jünger als Beda.

** *Bedae op. vol. I, p. 329.*

*** *Plinii hist. nat. II.* In folgender Zusammenstellung kann man die Breitenabweichungen der sieben Wandelsterne nach Cleomedes *(C)*, Martianus *(M)*, Theon *(T)*, Plinius *(P)* und dem Pseudo-Beda *(B)* vergleichen. Die Zahlen des Cleomedes stimmen mit den Angaben des Posidonius in der *theoria cyclica lib. II cap. 7* überein.

Planeten	*C*	*M*	*T*	*P*	*B*
☽	10	12	12	12	12
☉	0	1	1	2	2
☿	8	8	8	8	8
♀	10	12	12	14	14
♂	5	5	5	4	4
♃	5	5	5	3	5
♄	2	3	3	2	3

machten, aber dass sie dennoch einstimmig zu ihrer Zeit den Ort (oder einen der Oerter) der grössten Abweichung der Sonne von der Ekliptik in die Waage verlegten.

Bei dieser Annahme fallen die Knoten der Sonne auf der Ekliptik mit den Solstitien zusammen oder nahe an dieselben. Eine aufmerksame Betrachtung der Fig. 1 zeigt, dass in diesem Fall die Bewegung des Colur der Aequinoctien Null oder fast Null ist; und dieses bestätigt unsere frühere Behauptung, dass die Hypothese von der Nutation der Sonne nicht zum Zweck der Erklärung einer Bewegung der Aequinoctialpunkte aufgestellt wurde. Eudoxus, Theon, Plinius, Martianus Capella und der angebliche Beda kennen die Präcession ganz und gar nicht. Im Gegentheil, die Coincidenz der Sonnenknoten mit den Solstitialpunkten erzeugt eine verhältnissmässig schnelle Aenderung der Schiefe der Sonnenbahn, welche nach den numerischen Angaben des Theon von Smyrna ohngefähr 4″ in jedem Jahr betragen würde. Von dieser Veränderung der Schiefe würden die alten Erfinder dieser Hypothese geglaubt haben, sich durch Beobachtungen des Gnomon, oder des Aufgangspunktes der Sonne zur Zeit des Solstitiums überzeugen zu können.

Bevor wir diesen Gegenstand verlassen, muss ich bemerken, dass Bailly die Bewegung der dritten Sonnensphäre des Eudoxus als ein Anzeichen dafür betrachtete,* dass man schon zu jenen Zeiten Kenntniss von der Veränderung der Schiefe der Ekliptik gehabt hätte, und nach den Ansichten des vorigen Jahrhunderts vermuthet er, dass Eudoxus diese Kenntniss in Aegypten geschöpft haben könnte. Wenn man aber bedenkt, dass diese Veränderung der Schiefe jährlich nicht einmal $1/2''$ beträgt und folglich 7200 Jahre erfordert, um auf 1^0 anzuwachsen, und dass zu den Zeiten des Eudoxus die Grösse von 1^0 noch unter die Beobachtungsfehler gerechnet werden konnte, so werden wir der Ansicht des Bailly nicht wohl grosse Wahrscheinlichkeit beilegen können. Trotz des Fleisses der Alexandrinischen, arabischen und europäischen Beobachter wurde die Schiefe der Ekliptik selbst noch zu den Zeiten Tycho's für constant gehalten, und es sind noch nicht 200 Jahre, seit ihre Abnahme allgemein von den Astronomen angenommen ist.

Mit viel mehr Schein von Wahrheit betrachtete Prof. Lepsius in seinem classischen Werk über die Chronologie der Aegypter** die Bewegung der dritten Sonnensphäre des Eudoxus als ein Zeichen dafür, dass der Letztere schon Kenntniss von der Präcession der Aequinoctien hatte, und dass er diese von den Aegyptern kennen lernte. Mit Ausschluss der Aegypter werde ich für jetzt das auf Eudoxus Bezügliche behandeln und

* *Bailly, histoire de l'astr ancienne p. 242. Paris 1775.*
** Lepsius, Chronologie der alten Aegypter, Berlin 1849, p. 196—210.

werfe deshalb folgende Fragen auf: 1) Kann die dritte Sonnensphäre des Eudoxus in einem mit der Bewegung der Nachtgleichen übereinstimmenden Sinn angenommen werden? 2) Gibt es im System des Eudoxus einen zwingenden Beweis, der uns ihm die Kenntniss der Präcession zu- oder absprechen lässt?

Bezüglich der ersten dieser beiden Fragen lassen uns die vorhergegangenen Untersuchungen nicht den geringsten Zweifel. In der That, die oben angeführten Zeugnisse des Aristoteles, des Rhodiers Attalus und des Simplicius stimmen vollständig unter einander überein. Zudem kann bezüglich der Genauigkeit und Glaubwürdigkeit des Aristoteles und Simplicius kein Zweifel erhoben werden. Aristoteles beschäftigte sich, wie wir sehen werden, ganz speciell mit den homocentrischen Sphären, und Eudemus, welcher dem Simplicius alles zu seiner Darstellung lieferte, sprach in seiner Geschichte der Astronomie ausführlich über dieselben. Beide pflegten Umgang mit Callippus, dem Reformator dieses Systems, und das Buch des Eudoxus *περὶ ταχῶν* war noch in ihren Händen. Die natürlichste und einfachste Interpretation ihrer Beziehungen weist uns ohne allen Zweifel auf die Hypothese der Nutation der Sonne. Diese erscheint uns dann nicht wie eine isolirte Thatsache in der Geschichte der Astronomie, sondern sie findet sich angenommen und modificirt auch bei anderen Astronomen, deren Lehren uns von Plinius, Theon, Martianus Capella und dem angeblichen Beda mit mehr oder weniger Genauigkeit überliefert wurden.

Lepsius bespricht bei seiner Untersuchung der dritten Sonnensphäre des Eudoxus ebenfalls die Zeugnisse des Attalus, des Aristoteles und des Simplicius und widmet eine Reihe von scharfsinnigen Untersuchungen der Frage, ob ihre Texte, im weiteren Sinn genommen, die Einführung der Präcession anstatt der so klar angedeuteten Nutation erlauben. Nach verschiedenen nutzlosen Versuchen gibt er zu, dass man die Präcession nicht darunter verstehen könne, ohne diesen Texten einen unwahrscheinlichen Sinn beizulegen, oder ohne mit denselben in directen Widerspruch zu gerathen, oder ohne die Annahme zu machen, dass diejenigen, welche das System des Eudoxus erklärten, es nicht richtig verstanden haben (Seite 201—204). Dennoch sträubt sich der gelehrte Aegyptologe gegen die Annahme, dass Eudoxus der Sonne eine vollständig imaginäre Bewegung beigelegt haben könnte (Seite 204) und dass er zur Erklärung derselben eine Sphäre angenommen habe. Ich glaube, dass sein Widerstreben geringer gewesen wäre, wenn er während dieser Untersuchungen die Stellen vor Augen gehabt hätte, welche uns Theon, Plinius und der Pseudo-Beda über diese imaginäre Bewegung hinterlassen haben, und welche zeigen, dass zu einer gewissen Zeit und bei einer gewissen astronomischen Schule die Nutation der Sonne als ein wesentlicher Theil der Theorie dieses Gestirns betrachtet wurde.

Eine andere Schwierigkeit, welche sich der Annahme der Nutation der Sonne bei Eudoxus entgegenstellt, findet er in der Kritik, womit Hipparch den mehrmals genannten Text des Attalus begleitet.* Nun widerlegt Hipparch an dieser Stelle die Meinung des Attalus, dass die Himmelskreise eine bestimmte Breite hätten, mit astronomischen Gründen. Ausserdem zeigt er durch Anführung verschiedener Stellen des Aratus, dass dieser Dichter nicht derselben Meinung war. Aber dass aus diesen Erörterungen des Hipparch eine auf Eudoxus bezügliche Forderung sich ergiebt, wie Lepsius zu beweisen sucht, kann ich nicht finden. Die Theorie der Nutation der Sonne setzt keine bestimmte Breite der Ekliptik voraus, ebensowenig als die Bewegung des Mondes und der andern Planeten nach der Breite. In dieser Theorie ist der von der Sonne beschriebene Kreis ein mathematischer, jedoch von beweglicher Stellung. Also ergiebt sich selbst bei der Annahme, dass Attalus unrichtiger Weise den Eudoxus als Vertreter einer bestimmten Breite der Himmelskreise angeführt habe, weder für noch gegen unsere Frage etwas.

Lepsius kann nicht glauben, dass Eudoxus zur Erklärung einer so wenig bemerkbaren Abweichung, wie die ist, welche die Worte im Enoptron andeuten, eine besondere Sphäre einführte, während andere viel bedeutendere Ungleichheiten von ihm vernachlässigt wurden. Aber von dem Augenblick an, in dem Eudoxus eine Abweichung der Sonne von der Ekliptik annahm, mag diese Abweichung nun gross oder klein, wirklich existirend oder blos eingebildet gewesen sein, war er verpflichtet, von ihr in seinen mathematischen Hypothesen Rechenschaft zu geben. Andere viel grössere Ungleichheiten (z. B. die Excentricität der Mondsbahn) wurden von ihm nicht eingeführt, weil die höchst unvollkommenen Beobachtungen jener Zeit sie nicht bemerkbar gemacht hatten. In der Geschichte der Astronomie kommen viele ähnliche Beispiele vor, dass man imaginäre Kleinigkeiten von keiner Bedeutung berücksichtige, während man wirklich existirende Phänomene von viel grösserer Wichtigkeit vernachlässigte. Ich erwähne nur die Trepidation der Fixsterne, welche von vielen Astronomen des Mittelalters angenommen wurde, und die Nutation der Erdaxe nach Copernikus.** Nach Erwägung aller Umstände scheint es dem Prof. Lepsius, dass die geringere Summe von Schwierigkeiten in der Annahme enthalten sei, Eudoxus habe von Aegypten nicht nur die Präcession, sondern auch die Theorie der homocentrischen Sphären erhalten; dass er sich beim

---

* Petavii Uranologion p. 199.

** Wegen der Trepidation der Fixsterne sehe man: *Bailly, hist. de l'astr. mod.* Vol. I p. 227, 357 und 700; sowie *Delambre, hist. de l'astr. du moyen âge* p. 73, oder auch: Hankel, Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter p. 241.

Studium derselben keine genaue Rechenschaft über die Function der dritten Sonnensphäre, welcher von den Aegyptern die Ursache der Präcession zugeschrieben wurde, gegeben habe; und dass Eudoxus selbst oder die Ausleger seiner Lehren dieser schliesslich eine der dritten Sphäre des Mondes analoge Bewegung und Stellung zugetheilt hätten. Dadurch sei der Gedanke an eine Nutation der Sonnenbahn entstanden. Hier sind ohngefähr die Gründe, worauf sich diese Vermuthung stützt:

Eudoxus war, wie uns Seneca versichert, der erste, welcher die Kenntniss der Planetenbewegung von Aegypten nach Griechenland brachte.* Diodorus bestätigt, dass die Aegypter seit undenklichen Zeiten diese Bewegungen beobachteten und dass sie mit besonderer Genauigkeit die Perioden, Stillstände und Rückläufe derselben notirten.** Aristoteles versichert bei Gelegenheit einer von ihm beobachteten Bedeckung des Mars, dass man Aufzeichnungen über ähnliche bei allen Planeten vorgekommene Erscheinungen in den alten Beobachtungen der Aegypter und Babylonier*** finden könne. Man kann es also als wahrscheinlich betrachten, dass Eudoxus die positiven astronomischen Kenntnisse, welche die Grundlage für das System der Sphären bildeten, bei den Aegyptern erlangt habe. Lepsius glaubt sogar in dem Umstand, dass auf gewissen† ägyptischen Monumenten sich die Gestalten der Göttin des Himmels eine in die andere concentrisch und ähnlich gestellt befinden, eine symbolische Darstellung der homocentrischen Sphären des Himmels zu erblicken (Seite 199), und zieht daraus den Schluss, dass die Vorläufer des Eudoxus in der Erfindung dieses Systems die Aegypter gewesen seien. Hierauf scheint auch Simplicius anzuspielen, wenn er (§ 2) sagt, „dem Eudoxus und seinen Vorgängern schien die Sonne drei Bewegungen zu haben". Indem Lepsius für diese Vorgänger die ägyptischen Priester annimmt, hält er es für wahrscheinlich, dass in der dritten dieser Bewegungen die Präcession zu erkennen sei, und dass Eudoxus, weil er diese Bewegung durch die ihm bekannten Beobachtungen nicht bestätigt sah, seine Lehrmeister unrichtig verstanden habe, und anstatt derselben eine nicht existirende Bewegung, nämlich die Nutation der Sonnenbahn, annahm. Nicht zufrieden damit, diesen vermeintlichen Irrthum des Astronomen von Cnidus allgemein angedeutet zu haben, sucht Lepsius sogar zu zeigen, welche Stellung und Bewegung die Aegypter der vermeintlichen Sphäre der Präcession gegeben haben konnten.

---

* S. pag. 110 Anmerk. ***.

** Diodorus I, 81.

*** *Aristot. de coelo II, 12.*

† z. B. im Tempel zu Denderah, bei dem berühmten Thierkreis, im Tempel zu Philä und in dem zu Hermonthis. S. Denon, Reise in Ober- und Unterägypten tav. 130.

Er stellt die Behauptung auf, dass, wenn Eudoxus und die Aegypter eine Präcession kannten, diese in einer Bewegung der Ekliptik längs des Aequators bestanden haben musste und nicht, wie wir wissen, in einer Verschiebung des Aequators längs der Ekliptik.* Die von uns angenommene Verschiebung des Aequators und der Pole der Weltaxe lag den Ideen des Alterthums, für welches die Pole des Aequators die unbeweglichen Angelpunkte des ganzen Universums waren, zu fern. Die Präcession der Aegypter war also eine Art Aequatorialpräcession, bei welcher eine Bewegung der Pole der Ekliptik um die Pole des Aequators in einer Zeitdauer, welche Lepsius nach verschiedenen Autoren auf 36000 Jahre angibt,** anzunehmen ist. Deshalb gibt er den vermeintlichen Sphären der Aegypter folgende Anordnung. Die erste und äusserste ist die Sphäre der täglichen Umdrehung um die festen Pole der Welt. Der zweiten Sphäre legt er die jährliche Bewegung der Sonne längs der Ekliptik um die Pole derselben bei. Der dritten Sphäre gibt er dieselben Pole als der ersten und eine sehr langsame retrograde Umdrehung, deren Dauer 36000 Jahre beträgt, und glaubt, dass diese zur Hervorbringung der obigen Aequatorialpräcession bestimmt sei. Diese hält er für analog der dritten Sphäre des Eudoxus. Aber man kann sich leicht überzeugen, dass man auf diese Weise den beabsichtigten Zweck nicht erreicht. Denn da die Pole der dritten Sphäre auf der zweiten befestigt sind, so nehmen sie an der Bewegung der letzteren Antheil und drehen sich jährlich um die Pole des Thierkreises. Wenn also in einem gegebenen Augenblick die Pole der dritten Sphäre mit den Weltpolen zusammenfallen, so werden sie nach sechs Monaten um fast 48^0, nämlich um das Doppelte der Schiefe der Ekliptik davon entfernt sein. Die Wirkung der dritten Sphäre wird folglich keine Aequatorialpräcession hervorbringen, sondern wird allmälig die Sonne in immer grössere Breite versetzen und wird sie von der Ekliptik bis fast 24^0 entfernen.

Man kann auch zeigen, dass durch Anordnung von drei verschieden zu einander geneigten Sphären keine Aequatorialpräcession hervorgebracht werden kann, wenn man nicht die zweite und dritte Sphäre des Lepsius mit einander vertauscht, also der ersten und äussersten die tägliche Bewegung um die Weltaxe überträgt, der zweiten die in demselben Sinn und um dieselbe Axe vor sich gehende Präcessionsbewegung, und der dritten

* Die Erklärung der Präcession nach der Art des Hipparch kann hier nicht in Betracht kommen, weil Eudoxus der Fixsternsphäre eine einzige Bewegung beilegte, wie alle Alten vor Hipparch.

** Wegen der Präcession ändern die Sterne des Aequators ihre Rektascension nach den Formeln der heutigen Astronomie jährlich um 46″. Um diesen Betrag verschiebt sich also jährlich der Aequator. Ein Punkt desselben würde also in 28170 Jahren den ganzen Kreisumfang zurücklegen.

die jährliche Bewegung um die Axe der Ekliptik. Aber es ist offenbar, dass die Wirkung der beiden ersten Sphären, welche sich um die Erdaxe drehen, durch eine einzige Sphäre hervorgebracht werden kann, wenn man dieser dieselbe Axe und eine der Summe der Geschwindigkeiten dieser beiden Sphären gleiche Geschwindigkeit beilegt. Wenn also Eudoxus, der ein tüchtiger Geometer war, oder die Aegypter wirklich die Präcession in ihrer Sonnentheorie einführen wollten, so hatten sie für die Sonne nur zwei Sphären nothwendig. Der ersten hätten sie die Umdrehung um die Axe des Fixsternhimmels mit einer Geschwindigkeit gleich der Summe der Umdrehungsgeschwindigkeiten der Fixsterne und der Präcessionsbewegung zuweisen müssen; der zweiten eine Bewegung um die Axe des Thierkreises in der Ordnung der Zeichen und von der Dauer eines tropischen Jahres.

Weil nun Eudoxus diese Combination von zwei Sphären, welche allein die Aequatorialpräcession hervorbringen konnte, nicht annahm, so dürfen wir es als ausgemacht betrachten, dass die dritte seiner Sonnensphären etwas anderes als die Präcession andeutet, nämlich die Nutation der Sonnenbahn. Weil er ferner der ersten der Sonnensphären eine der Umdrehungsgeschwindigkeit der Fixsterne vollkommen gleiche Geschwindigkeit beilegte, so müssen wir schliessen, dass er keinen Gedanken an eine um die Pole des Aequators vor sich gehende Präcession hatte, denn es wäre ihm sehr leicht gewesen, von dieser durch Anbringung einer kleinen Modification an der Geschwindigkeit seiner ersten Sphäre Rechenschaft zu geben. Damit sind die beiden oben aufgeworfenen Fragen beantwortet.

Was den ägyptischen Ursprung der homocentrischen Sphären betrifft, so scheint man ebensowenig Gründe für die Bejahung wie für die Verneinung dieser Frage angeben zu können. Im zweiten Abschnitt dieser Abhandlung habe ich klar zu machen gesucht, wie das System des Eudoxus mit dem Fortschritt der Griechen in ihren Ansichten über den Bau der Welt zusammenhängt. Eine Einmischung fremder Ideen scheint hier nicht nothwendig; wir wollen überdies die Möglichkeit davon nicht in Abrede stellen. Ebenso werde ich mich davon enthalten, die schöne Interpretation des Lepsius über die ineinandergeschachtelten Figuren der Himmelsgöttin auf gewissen ägyptischen Denkmälern, worin er eine Andeutung der Sphären erblickt, zu bestreiten; es darf indess nicht verschwiegen werden, dass die Tempel zu Denderah, Philä und Hermonthis, wo diese Figuren zu finden sind, alle der griechischen und römischen Epoche angehören, also einer um einige Jahrhunderte späteren Zeit als die, in welcher Eudoxus lebte.

Es fällt also mit der Präcession des Eudoxus einer der hauptsächlichsten Beweisgründe, auf welche man die Ansicht, dass die Aegypter von der Präcession Kenntniss hatten, stützen konnte. Für den anderen Beweis,

der aus ihrem Kalender abgeleitet ist und der mit den Sphären des Eudoxus in keiner Verbindung steht, ist hier nicht der geeignete Ort zur Besprechung.*

V. Die Hippopede des Eudoxus. Mechanismus der Stillstände und Rückläufe.

Bevor wir an die Discussion der speciellen Theorien, wodurch Eudoxus die Bewegungen jedes einzelnen Planeten erklärte, gehen, ist es nothwendig, einige Auseinandersetzungen über die allen diesen Theorien gemeinsamen Eigenschaften zu machen und mit einiger Aufmerksamkeit den sonderbaren und bis jetzt wenig gekannten Mechanismus zu studiren, der zur Darstellung der solaren Anomalie der Planeten, d. i. jener ausserordentlichen Unregelmässigkeit ihres Laufes, deren auffallendste Wirkungen die bekannten Erscheinungen der Stillstände und Rückläufe sind, diente.

Aus den hierauf bezüglichen Darlegungen des Aristoteles und Simplicius (siehe Anhang I, und II § 4, 5 u. 6) ersehen wir, dass von den vier einem jeden Planeten zugetheilten Sphären die erste und äusserste die Bestimmung hatte, die tägliche dem Fixsternhimmel gleiche Umdrehung hervorzubringen; die zweite diente für den Umlauf der Planeten längs der Ekliptik in einer ihrer zodiacalen Umlaufszeit gleichen Periode, die für die oberen Planeten mit unserer siderischen Umlaufszeit zusammenfällt, für Merkur und Venus in allen geocentrischen Systemen der Astronomie gleich einem Jahre ist. Da die Umdrehung dieser zweiten Sphären gleichförmig angenommen wurde, so ist klar, dass Eudoxus keine Idee von der zodiacalen Anomalie der Planeten hatte, d. i. von derjenigen, welche abhängt von der Excentricität ihrer Bahnen, um deretwillen später die feststehenden excentrischen Kreise eingeführt wurden. Für Eudoxus waren also die Punkte der auf einander folgenden Conjunctionen und Oppositionen gleich weit auf der Ekliptik entfernt, und die Bögen des Rücklaufs wurden von ihm für jeden Planeten als constant und gleich in allen Theilen des Thierkreises angenommen. Auch findet sich nicht die geringste Andeutung weder über die Excentricität der Planetenbahnen noch über ihre Neigungen gegen die Ekliptik. Die Bewegung der zweiten Sphären ging (wenn wir recht unterrichtet sind) bei allen Planeten längs des Thierkreises vor sich.

---

* Das grosse Werk des Lepsius, Chronologie der alten Aegypter, ist das einzige Buch, worin man genaue und zahlreiche Angaben über die Astronomie der Aegypter, auf Grund von Monumenten, findet. Wegen meiner tiefen Achtung für dieses Werk, führe ich meine davon abweichenden Ansichten nur mit genauer Angabe der Gründe an, welche mich zu diesen Ansichten veranlassen.

Die Digressionen der Planeten nach Breite waren den Beobachtern nicht unbekannt geblieben; aber Eudoxus glaubte, wie wir später sehen werden, dass diese ausschliesslich von der Elongation der Planeten von der Sonne abhängig wären, und nicht von ihrer Länge.

Zur Darstellung der solaren Anomalie und gleichzeitig der Breitenbewegung war für jeden Planeten eine dritte und vierte Sphäre innerhalb der beiden vorigen bestimmt. Die dritte Sphäre hatte feste Pole auf zwei entgegengesetzten Punkten des auf der Oberfläche der zweiten Sphäre bewegten Thierkreises und drehte sich um diese Pole in einer der synodischen Umlaufszeit gleichen Periode, oder der Dauer, welche zwischen zwei auf einanderfolgenden Oppositionen oder Conjunctionen desselben Planeten verläuft. Die Pole der dritten Sphäre, sagt Aristoteles, waren verschieden für die verschiedenen Planeten, aber identisch für Venus und Merkur. Bezüglich des Sinnes der Rotation dieser dritten Sphäre, fügt Simplicius hinzu, dass sie sich von Norden gegen Süden und von Süden gegen Norden bewegte, was eine Folge der Lage ihrer Axe im Thierkreis ist. Er bestimmt jedoch nicht, auf welche der zwei möglichen Arten die Rotation vor sich geht; aus dem Folgenden wird sich ergeben, dass dieses gleichgültig ist und dass sich die Phänomene gleich gut durch jede dieser beiden Annahmen erklären lassen.

Auf der Oberfläche der so gestellten dritten Sphäre waren die Pole der vierten befestigt, und die Axe derselben hatte gegen die Axe der vorhergehenden eine constante, aber für die verschiedenen Planeten verschiedene Neigung. Und um diese Axe drehte sich die vierte Sphäre in derselben Zeit, wie die dritte, aber im entgegengesetzten Sinn. Auf dem Aequator der vierten Sphäre war der Planet befestigt, welchem auf diese Weise eine tägliche Bewegung, ein Umlauf im Thierkreis, und noch zwei andere, nach der synodischen Umlaufszeit geregelte Bewegungen möglich waren. Die Combination dieser beiden letzten Bewegungen, welche in entgegengesetztem Sinn um zwei gegen einander schief stehende und um einander drehbare Axen vor sich ging, bildete die Grundlage des Mechanismus, durch welchen Eudoxus gleichzeitig die solare Anomalie, die Stillstände, die Rückläufe und die Abweichungen nach Breite hervorbrachte.

Vor der Hand wollen wir nun die Wirkung der beiden ersten Sphären, welche leicht zu begreifen ist, ausser Acht lassen und unsere ganze Aufmerksamkeit der durch die beiden letzten Sphären allein erzeugten Bewegung der Planeten zuwenden. Die Frage ist mit den einfachsten Worten folgende: „Um den festen Durchmesser AB (Fig. 2) dreht sich in gleichförmiger Bewegung eine Sphäre, deren entgegengesetzte Pole P sind; um diese Pole dreht sich gleichförmig eine zweite der vorigen concentrische Sphäre in derselben Zeit, aber in entgegengesetzter Richtung mit dieser.

Man bestimme den Weg eines Punktes M der zweiten Sphäre, welcher gleichweit von ihren beiden Polen entfernt ist".

Diese Aufgabe hat sicherlich heutzutage keine Schwierigkeit für denjenigen, welcher in die Anfangsgründe der sphärischen Trigonometrie oder der analytischen Geometrie eingeweiht ist. Aber im gegenwärtigen Fall kommt es uns nicht sowohl auf die Kenntniss des Resultates an, als darauf, die Einsicht zu gewinnen, dass die Lösung dieses Problems der Geometrie jener Zeiten nicht unmöglich war. Und dazu können wir nur gelangen, wenn wir eine Lösung finden, welche einfach und unmittelbar sich nur auf die Principien der elementarsten Geometrie stützt. Haben wir diese gefunden und so die Gewissheit erlangt, dass Eudoxus sich genaue Rechenschaft von der Natur seines Problems geben, und wenn auch nicht die Berechnung, so doch wenigstens eine genaue Construction desselben erhalten konnte, so bleibt uns dann noch der historische Theil unserer Aufgabe übrig, nämlich die Angabe des Nachweises, dass Eudoxus in Wirklichkeit eine für seinen Zweck geeignete Lösung fand und dass er genau die Form der Curve erkannte, welche vom Punkt M durch die Combination der Bewegungen beider Sphären beschrieben wird. Ich werde mich nun mit aller möglichen Sorgfalt der Erörterung beider Fragen, sowohl der geometrischen als der geschichtlichen, widmen und darauf bedacht sein, dass über diesen wichtigen Punkt dem Leser kein Zweifel bleibt.

Proposition I. Aufgabe. — Es sind die beiden Sphären in irgend einer Phase ihrer oben erörterten Bewegung gegeben; man soll auf einer unbeweglichen, diesen beiden concentrischen Sphäre die Lage desjenigen grössten Kreises AOB angeben, auf welchem zu gleicher Zeit der Pol P der zweiten Sphäre und der auf ihr befestigte Planet M ankommen*.

Ziehe (Fig. 2) durch die festen Pole der ersten Sphäre den grössten Kreis APB, der durch die Lage geht, welche der Pol P im gegebenen Augenblick einnimmt. Ziehe durch A und B den grössten Kreis AOB so, dass die sphärischen Winkel PAB und MPB einander gleich werden, so behaupte ich, dass AOB der verlangte Kreis ist. Denn nach den Annahmen ist die Bewegung von M um P gleich und entgegengesetzt der Bewegung von P um A; wenn also der Bogen MP sich gegen PB soweit gedreht hat, dass er mit PB zusammenfällt, so wird sich der Bogen AP um denselben Winkel gegen AO gedreht haben und mit AO zusammenfallen. Die beiden Pole und der Planet M befinden sich also dann alle drei auf

* Wir nennen hier die dritte und vierte Sphäre des Eudoxus erste und zweite Sphäre. Die erste dreht sich um die Pole AB und die zweite um den Pol P und den diesem gegenüberliegenden.

dem grössten Kreis *AOB* und *M* wird auf die Verlängerung des die beiden Pole verbindenden Bogens *AP* zu liegen kommen.

Anmerkung I. Wenn, von *AB* aus gerechnet, der Pol *P* einen halben Umfang seines Parallelkreises *QR* beschrieben hat, so ist der Winkel *MPB* auch zu einem halben Kreisumfang gewachsen; deshalb liegen auch in dieser zweiten Stellung die drei Punkte *APM* auf dem grössten Kreis *AOB*, aber in anderer Reihenfolge als vorhin. Nach einem ganzen Umlauf von *P* um *A* und von *M* um *P* ist die ursprüngliche Lage vollständig wieder hergestellt; deshalb ist die Bewegung von *M* genau periodisch und die Periode ist gleich der Dauer eines Umlaufs der beiden Sphären.

Anmerkung II. Wenn wir auf der andern Seite des Kreises *AOB* die Stellung *P'* des beweglichen Pols symmetrisch zu *P* annehmen (d. h. Winkel $P'AO = PAO$ machen), so wird auch der Winkel $M'P'B = MPB$, und die Stellung des Planeten in *M'* wird symmetrisch zu *M* bezüglich des Kreises *AOB*. Hieraus folgt, dass die vom Planeten *M* beschriebene Bahn symmetrisch zu diesem Kreis ist, und deshalb nennen wir denselben Fundamentalkreis und seine Ebene Fundamentalebene. Der Kürze wegen heissen wir die zur festen Axe *AB* der ersten Sphäre senkrechte Ebene *CD* Diametralebene, und die Ebene des Kreises *ACBD* (dessen vorderer Pol *O* ist), welche senkrecht zu den beiden vorigen steht, soll Orthogonalebene heissen. Der constante Bogen *AP* zwischen den homologen Polen beider Sphären heisse die Inclination. Der gleichförmig veränderliche Winkel $OAP = MPB$, welcher in jedem Augenblick die Position des Planeten bestimmt, sei das Argument.

Proposition II. Lehrsatz. — Betrachtet man (Fig. 3) den Kreis *APB* in einer bestimmten Stellung während seiner Bewegung, der Pol dieses Kreises in dieser Stellung sei *E*, von *E* ziehe man zum Planeten den Bogen *EM* eines grössten Kreises, so behaupte ich, dass Bogen $EM = EO$ ist, und *EM* senkrecht auf *MP*. — Weil *E* der Pol des Kreises *APGB* ist, so ist die Entfernung des Punktes *P* von *E* ein Quadrant, und da nach der Annahme die Entfernung des Punktes *P* vom Planeten *M* ebenfalls ein Quadrant ist, so muss *P* der Pol des Bogens *EM* sein; folglich steht *PM* senkrecht auf *EM*. Verlängern wir alsdann den Bogen *EM* bis nach *F*, so ist der Bogen *MF* das Maass des Winkels *FPM* (unseres Arguments), und *EM* wird *MF* zu 90^0 ergänzen. Aber es ist auch klar, dass der Bogen *GO* das Maass des Arguments *GAO* ist, und dass *EO* den Bogen *GO* zu 90^0 ergänzt, folglich ist $EM = EO$, was gezeigt werden sollte.

Zusatz. Wenn man also aus dem Punkt *E* als Pol einen kleineren durch *O* gehenden Kreis auf der Kugel beschreibt, so muss dieser auch durch *M* gehen, und umgekehrt; und der Bogen *OM* dieses Kreises verhält sich zum ganzen Umfang desselben, wie die Inclination *AP* zum Um-

fang des grössten Kreises. Denn, wenn wir das Dreieck AOG um den Pol E drehen, bis es mit dem ihm gleichen Dreieck PFM zusammenfällt, so geht A in die Lage von P über, G nach F und O nach M, und alle Punkte beschreiben gleich grosse Bögen; das Maass der Grösse dieser Bögen ist die Inclination AP.

Proposition III. Lehrsatz. — Wenn alles wie vorhin bleibt, und man zieht vom Planeten M (Fig. 4) den Bogen MH senkrecht auf den Diametralkreis COD, so behaupte ich, dass dieser Bogen gleich ist dem von O senkrecht auf EM gezogenen Bogen OK.

Denn wenn man den Schnittpunkt I der Kreise PM und OB durch den Bogen EI mit dem Pol E des Kreises APB verbindet, so werden die Dreiecke OIE und EIM congruent, da sie die Seite EI gemeinsam haben, die Winkel bei O und M rechte sind, und $EO = EM$ (Prop. II). Sie liegen symmetrisch zum Bogen EI. Wenn man also aus M das Perpendikel MH und aus O das Perpendikel OK fällt, so werden auch diese beiden Bögen symmetrisch zu EI liegen und einander gleich sein.

Zusatz. Da B der Pol von OE ist, so muss der Bogen MH durch B gehen, und da P der Pol von EM, so geht der Bogen OK durch P. Da $PK = BH$ als Quadranten sind, so folgt $PO = BM$. Die Entfernung des Planeten vom festen Pol B ist also während der ganzen Bewegung desselben gleich der Entfernung des beweglichen Pols P von dem festen Pol O des Kreises $ABCD$.

Proposition IV. Lehrsatz. — Die Länge des vom Planeten M auf die Diametralebene CD gefällten gradlinigen Perpendikels ist jederzeit gleich der Länge des von Pol P auf die Orthogonalebene $ABCD$ gefällten Perpendikels.

Verlängere den grössten Kreis KOP (Fig. 4) bis L, so ist LO ein Quadrant; ebenso ist der Bogen KP ein Quadrant, weil P der Pol von EM ist (Prop. II). Folglich wird Bogen $LP =$ dem Bogen OK. Aber in der vorhergehenden Proposition wurde bewiesen, dass Bogen $OK =$ dem Bogen MH ist. Folglich ist auch $LP = MH$. Da diese beiden senkrechten Bögen einander gleich sind, so müssen auch die entsprechenden geradlinigen Perpendikel, von denen das eine aus P auf die Ebene des Kreises $ABCD$, das andere aus M auf die Ebene des Kreises COD gefällt ist, einander gleich sein.*

Zusatz. Hieraus ergiebt sich eine leichte Construction für den Abstand des Planeten von der Diametralebene. Beschreibe (Fig. 5) in der Ebene einen, dem vom Pol P durchlaufenen Kreis QR gleichen Kreis, und

* In unserer Sprache: da die Bögen LP und HM gleich sind, so sind auch ihre Sehnen gleich.

ziehe darin die beiden Durchmesser ab und cd senkrecht auf einander, mache den Winkel aop gleich dem Argument, so wird das Perpendikel pr der gesuchte Abstand des Planeten von der Diametralebene.

Anmerkung. Aus dieser Construction ergibt sich sofort das Gesetz, nach welchem sich der Abstand des Planeten M von der Diametralebene ändert. Bei jedem Umlauf der zwei Sphären durchläuft der Pol P seinen Parallelkreis einmal, und ebenso sein Repräsentant p in Fig. 5. Wenn P sich in der Fundamentalebene befindet, kommt p nach a oder b zu liegen und der Abstand des Planeten von der Diametralebene ist dem Radius dieses Parallelkreises gleich. Wenn P in der Ebene des Orthogonalkreises also in Q oder R liegt, rückt p nach c oder d, und der Planet befindet sich in der Diametralebene. Der Abstand des Planeten von dieser Ebene wird von den Phasen der oscillatorischen Bewegung abhängen, welche der Fusspunkt q des Perpendikels pq auf dem Durchmesser ab während des gleichmässigen Umlaufs von p auf dem Umfang $abcd$ beschreibt.*

Proposition V. Lehrsatz. — Wenn man durch die Punkte M und O (Fig. 3) denjenigen Kreis legt, der zum Pol den Pol E des Kreises $APGB$ hat, und von dem Ort M des Planeten die Gerade MR senkrecht auf die Diametralebene zieht, so wird dieser Abstand des Punktes M von der Diametralebene mit dem Durchmesser des Parallelkreises OM in constantem Verhältniss stehen, welches auch die Position des Planeten M sein möge.

Wir sahen im Zusatz der Proposition II, dass sich der Bogen MO zum Umfang seines ganzen Kreises verhält, wie die Inclination AQ zum ganzen Kreisumfang $ABCD$. Das von M auf den durch O gehenden Durchmesser des Parallelkreises gefällte Perpendikel ist offenbar dasselbe, wie das von M auf die Diametralebene gefällte. Das constante Verhältniss dieses Perpendikels zum Durchmesser des Parallelkreises muss also dem Verhältniss des Perpendikels QS zum Durchmesser AB gleich sein, da OM und AQ ähnliche Bögen verschiedener Kreise sind.

Zusatz. Ebenso steht der Pfeil der Halbsehne RM, nämlich die geradlinige Entfernung des Punktes O vom Fusspunkt R des Perpendikels RM in demselben Verhältniss zum Durchmesser dieses Kreises, in welchem der Pfeil AS zum Durchmesser AB steht.

Proposition VI. Lehrsatz. — Während der nach unserer Annahme gleichförmigen und in entgegengesetzter Richtung vor sich gehenden Bewegung der beiden Sphären fälle man aus jeder Lage des Punktes M die Senkrechte MR (Fig. 3) auf die Diametralebene, so beschreibt ihr Fuss-

* Ist i die Inclination, x die Entfernung des Planeten von der Diametralebene, Θ das Argument, der Radius der Kugel $= 1$, so ergibt sich $x = \sin i \, . \cos \Theta$.

punkt R mit gleichförmiger Bewegung auf dieser Ebene den Umfang eines Kreises, welcher die Sphäre in O berührt und dessen Durchmesser dieselbe Länge wie der Pfeil AS hat; und die von R auf diesem Kreis durchlaufenen Bögen werden doppelt so gross sein als ihre correspondirenden von P auf seinem Parallelkreis beschriebenen Bögen.

Sei (Fig. 6) CD die Orthogonalebene, $OCO'D$ die Diametralebene, und OO' die Fundamentalebene, so stellt A die Pole der ersten Sphäre, P den Pol der zweiten Sphäre, VV den in den vorigen Figuren mit APB bezeichneten grössten Kreis vor, und der Winkel OAP ist das Argument. Ist M die entsprechende Position des Planeten, E der Pol von VV, ON der durch O zu VV gezogene Parallelkreis, so haben wir gesehen, dass M auf diesem Parallelkreis liegen muss. Der Fusspunkt des vom Planeten M auf die Diametralebene $OCO'D$ gefällten Perpendikels ist in dieser Figur ebenfalls mit M bezeichnet; OM ist alsdann die Entfernung dieses Fusspunkts vom Pol O des Orthogonalkreises. Nun ergibt sich aber aus dem Zusatz der Prop. V, dass diese Entfernung OM zum Durchmesser ON des Parallelkreises in einem constanten Verhältniss steht. Der Ort der Punkte M wird also ähnlich und ähnlich gelegen sein im Bezug auf O mit dem Ort der Punkte N, er ist folglich ein Kreis, welcher den Kreis $OCO'D$ im Punkte O berührt. Auch ist offenbar, dass der Bogen TM zum Maass den doppelten Winkel NOO' oder das doppelte Argument PAO hat. Während also der Pol P der zweiten Sphäre auf seinem Parallelkreis von OA aus einen ganzen Kreisumfang beschreibt, wird der Punkt M in demselben Sinn von T aus auf seinem Kreis zwei Umfänge beschreiben. Da nun das constante Verhältniss von OM zu ON dasselbe ist als das Verhältniss des Pfeils AS zum Durchmesser AB, so folgt, dass OT gleich AS ist, was zu beweisen war.

Zusatz I. Wenn man im Mittelpunkt X des Kreises OT auf der Diametralebene eine Senkrechte errichtet, so kann man sagen, dass der Planet in gleichen Zeiten gleiche Winkel um diese Senkrechte beschreibt.

Zusatz II. Denken wir uns aus allen Positionen des Planeten die entsprechenden Senkrechten auf die Diametralebene gefällt, so bilden diese Senkrechten einen geraden Cylinder, welcher den Kreis OT zur Basis hat. Die vom Planeten auf einer festen, zu den beiden beweglichen Sphären concentrischen Sphäre beschriebene Curve ist nichts anderes, als die Durchdringungscurve dieser Sphäre mit diesem geraden Cylinder.

Zusatz III. Nun kann man leicht den jedem Augenblick entsprechenden Abstand des Planeten von der Fundamentalebene OO' construiren. Man braucht zu diesem Zweck nur auf dem Kreis OT von T aus den Bogen TM doppelt so gross als das Argument zu nehmen. Die Entfern-

ung des Punktes M vom Durchmesser OT ist nach Grösse und Richtung der verlangte Abstand.*

Daher befolgt auch dieser Abstand, wie der früher in Prop. IV bebetrachtete, bei seinen Aenderungen die Gesetze einer oscillatorischen Bewegung, aber hier ist die Periode halb so gross als diejenige, in welcher die Veränderungen des Abstands von der Diametralebene vor sich gehen.

Zusatz IV. Die Gerade OM steht in constantem Verhältniss zum Durchmesser des Parallelkreises ON; oben haben wir gesehen, dass die Länge des vom Planeten auf die Diametralebene gefällten Perpendikels zu diesem Durchmesser ebenfalls in constantem Verhältniss steht (Prop. V); wenn wir also ein rechtwinkeliges Dreieck bilden, dessen eine Kathete dieses Perpendikel und dessen andere die Gerade MO ist, so werden auch diese beiden Katheten zu einander im constanten Verhältniss stehen; folglich wird auch die Hypotenuse dieses Dreiecks (die Verbindungslinie des Planeten mit dem Punkt O) mit diesen Katheten ein constantes Verhältniss bilden, und der von dieser Hypotenuse mit der Diametralebene $OCO'D$ gebildete Winkel wird ebenfalls constant sein. Also bilden die unendlich vielen Geraden, welche den Punkt O mit allen Positionen des Planeten verbinden, mit der Diametralebene einen Neigungswinkel von constanter Grösse, und wenn man in O auf der Diametralebene eine Senkrechte errichtet, so wird diese den Fundamentalkreis OO' in O berühren und mit diesen unendlich vielen Geraden gleiche Winkel bilden, folglich die Axe des von jenen gebildeten geraden Kegels sein. Man sieht leicht, dass der von dieser Axe mit den Erzeugungslinien des Kegels gebildete Winkel halb so gross als die Inclination ist.

Zusatz V. Deshalb kann man die vom Planeten M, während einer Umdrehung der beiden Sphären, auf einer diesen beiden concentrischen festen Sphäre beschriebene Curve, als den Durchschnitt dieser festen Sphäre mit diesem Kegel betrachten; und diese Curve wird durch die gleichzeitige Durchdringung dreier runder Körper, nämlich eines Kegels, eines Cylinders und einer Kugel erzeugt.

Zusatz VI Da sich Punkt M auf dem Umfang des Kreises OT gleichförmig bewegt, so wird auch die Aenderung des Winkels MOT gleichförmig vor sich gehen. Deshalb kann man behaupten, dass die Winkelbewegung des Planeten um die Axe des Kegels gleichförmig sei. Der Planet hat also drei gleichförmige Bewegungen zugleich: eine um die Axe

* Da der Durchmesser des Kreises OT gleich $1 - \cos i$ oder $2 \sin^2 \frac{1}{2} i$ ist, so wird der Radius dieses Kreises $\sin^2 \frac{1}{2} i$; nennen wir y den Abstand des Planeten von der Fundamentalebene und nehmen wir diesen Abstand negativ, wenn er unter diese Ebene fällt, so folgt:

$$y = - \sin^2 \tfrac{1}{2} i . \sin 2\Theta$$

der zweiten Sphäre, eine zweite um die Axe des Cylinders (Zusatz I) und eine dritte um die Axe des eben bezeichneten Kegels. Die erste Axe ist beweglich im Raum, die beiden andern sind unbeweglich und zu einander parallel.

Proposition VII. Aufgabe. — Man bestimme auf der Orthogonalebene die Projection der vom Planeten während einer ganzen Umdrehung der beiden Sphären beschriebenen Bahn.

Beschreibe mit QS, dem halben Durchmesser des von P (Fig. 3) beschriebenen Parallelkreises, als Radius einen Kreis, und alsdann mit der Hälfte von AS als Radius einen zum vorigen concentrischen Kreis (Fig. 7); theile diesen kleineren Kreis in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, alsdann den grösseren Kreis in die doppelte Anzahl gleicher Theile, indem man den mit 0 bezeichneten Anfangspunkten der Theilung in beiden Kreisen entgegengesetzte Lagen vom gemeinschaftlichen Mittelpunkt gibt; alsdann bezeichne man die aufeinanderfolgenden Theilpunkte mit den fortlaufenden Zahlen, indem man in demselben Sinn herumgeht und im kleinen Kreis die Bezifferung durch zwei Umfänge fortsetzt. Ziehe durch die Anfangspunkte beider Theilungen den Durchmesser XX und den darauf senkrechten YY. Ziehe durch jeden Theilungspunkt des grösseren Kreises eine Parallele zu YY, und ebenso durch die Theilungspunkte des kleineren Kreises Parallele zu XX; die so erhaltenen Schnittpunkte dieser Parallelen liefern eine Reihe von Punkten, welche in der Gestalt ∞ auf einanderfolgen, und dieses ist die geforderte Projection, in welcher XX die Fundamentalebene, YY die Diametralebene darstellt. Auf dieser Curve bewegt sich die Projection des Planeten in der Ordnung der beigesetzten römischen Ziffern. Der Grund dieser Construction liegt in dem auseinandergesetzten Verfahren, welches zu jedem gegebenen Argument den Abstand des Planeten von der Diametralebene (Prop. IV Zusatz) und von der Fundamentalebene (Prop. VI Zusatz III) finden lehrt.*

Anmerkung I. Man bemerkt leicht, dass die Längenaxe der Curve dem Durchmesser des vom Pol P, der den Planeten tragenden Sphäre,

* Die Gleichungen der Curve sind also:

$$\begin{cases} x = \sin i . \cos \Theta \\ y = - \sin^2 \tfrac{1}{2} i . \sin 2\Theta \end{cases}$$

wo x und y die auf die Axen XX und YY bezogenen rechtwinkeligen Coordinaten vorstellen. Die Projection der Curve auf die Orthogonalebene ist also das Resultat der Combinationen zweier zu einander rechtwinkeliger schwingender Bewegungen, von denen die eine doppelt so schnell vor sich geht wie die andere, und wobei die vier Hauptphasen der langsameren Bewegung mit den centralen Phasen (den Punkten des Gleichgewichts) der schnelleren Bewegung zusammenfallen. Die daraus entstehende Curve ist eine von den bekannten akustischen Linien Lissajou's. S. Tyndall, der Schall. Braunschweig 1874, pag. 384.

beschriebenen Parallelkreises gleich ist, und dass ihre Breite dem Pfeil *AS* (Fig. 3) oder dem Durchmesser des Cylinders, auf welchem die vom Planeten im Raum beschriebene Bahn liegt, gleichkommt. Die vier am weitesten von der Fundamentalebene entfernten Punkte, die beiden Durchgänge durch den Centraldoppelpunkt, und die Durchgänge durch die beiden äussersten Apsiden liefern acht Hauptphasen der Bewegung und theilen die Curve in acht Bögen, welche vom Planeten in gleicher Zeit durchlaufen werden.

Anmerkung II. Mit Hilfe dieser Projection auf der Orthogonalebene und der Bemerkung, dass die wirkliche vom Planeten im Raum beschriebene Curve die Durchdringung der Kugelfläche *AB* mit einem die Kugelfläche in *O* berührenden Cylinder vom Durchmesser *AS* und einer zu *AB* parallelen Axe ist, können wir uns die Gestalt dieser vom Planeten im Raum durchlaufenen Curve leicht vorstellen. Die Fig. 8 zeigt mit hinreichender Klarheit, wie diese Curve auf der Oberfläche der Kugel und des Cylinders zugleich liegt. Der Durchschnittspunkt, d. h. der doppelte Mittelpunkt *O* fällt mit dem Pol *O* der Orthogonalebene zusammen. Durch *AB* ist die Fundamentalebene, durch *CD* die Diametralebene dargestellt. Auch hat man sich zu denken, dass in den beiden kleineren der vier Winkel, welche die Curve in *O* bildet, der Cylinder die Kugel bedeckt, während in den beiden grösseren der Cylinder von der Kugel bedeckt wird, und dass sich in diesem Punkt *O* die beiden Oberflächen zugleich berühren und schneiden. Ebenso könnte man zeigen, wie diese Curve dem in Prop. VI Zusatz IV erwähnten Kegel angehört. In diesem Fall würde man sehen, wie die beiden von *O* nach entgegengesetzter Richtung laufenden Mantelflächen des Kegels die beiden Schleifen der Curve erzeugen, und dass der Winkel, unter welchem die Curve sich selbst in *O* schneidet, dem Winkel an der Spitze des Kegels, also der Inclination, gleich ist.

Diese wenigen, höchst einfachen Propositionen, bei deren Darstellung das Wesen der Geometrie der Alten gewahrt wurde, geben uns das Mittel für die Construction der vom Planeten beschriebenen Curve, welche wir wegen ihrer Gestalt sphärische Lemniscate nennen wollen, und lassen auch schon einige ihrer wichtigsten Eigenschaften erkennen.* Weitere Mittheilungen derselben sind nach meiner Ansicht unnöthig, erstens weil

---

* Die Betrachtung dieser Curve, der von ihr eingeschlossenen Theile der Oberfläche der Kugel, des Cylinders und Kegels, sowie der Volumina, welche von diesen Flächen und der Curve begrenzt werden, liefern viele interessante Aufgaben, welche alle einfache und elegante Lösungen mittelst der elementaren Geometrie zulassen. Wenn die Inclination einem rechten Winkel gleich ist, so bietet die Curve den Fall des Vivianischen Problems, nämlich des quadrirbaren halbkugelförmigen Gewölbes dar, in welchem die Hälfte einer jeden Schleife eine der vier Oeffnungen vorstellt. Ich erwähne auch noch, dass die Bögen aller dieser sphä-

diese geometrischen Kleinigkeiten heutzutage nicht mehr das Interesse haben, das sie früher boten, und von den Mathematikern, welche am Stamm und an der Wurzel des Baumes ihrer Wissenschaft arbeiten, dem Studium der Anfänger überlassen werden; dann aber hauptsächlich deswegen, weil unser Zweck erfüllt ist, nämlich die Lieferung des Nachweises, dass man zu dieser Construction und zu diesen Eigenschaften auf kurze und leichte Weise, mit Hülfe einer Geometrie, die viel elementarer ist, als die, welche wir dem Eudoxus zuzuschreiben berechtigt sind, und ohne Anwendung analytischer Methoden gelangen kann. Ich werde nun auseinandersetzen, wie es glaublich ist, dass man sich dieser Curve zur Erklärung derjenigen Erscheinungen bei den Planeten, welche wir mit dem Namen solare Anomalie bezeichnen, bedient habe.

Wir kehren deshalb zur Betrachtung der vier Sphären, welche Eudoxus nach Aristoteles und Simplicius einem jeden Planeten beilegte, zurück, und anstatt die Axe AB (Fig. 3) fest anzunehmen, denken wir uns die auf die zweite Sphäre des Eudoxus gestützten Pole derselben beweglich, in der Weise, dass sie in einer, der zodiacalen Umlaufszeit des Planeten gleichen Zeit, die Ekliptik durchlaufen. Ferner nehmen wir an, dass der Fundamentalkreis AOB beständig mit der Ekliptik zusammenfalle. Alsdann wird der Mittelpunkt O unserer sphärischen Lemniscate, sowie die Längenaxe derselben (d. i. der Bogen eines ihre äussersten Apsiden verbindenden grössten Kreises) beständig mit der Ekliptik zusammenfallen; und der Punkt O, ebenso wie A und B, wird während eines zodiacalen Umlaufs die ganze Ekliptik mit gleichförmiger Bewegung durchlaufen und die Lemniscate mit sich ziehen. Wir können jetzt, ohne an der Bewegung des Planeten etwas zu ändern, an die Stelle der dritten und vierten Sphäre die Lemniscate setzen, auf welcher sich der Planet nach den oben entwickelten Gesetzen bewegt. Durch Zusammensetzung dieser Bewegung des

rischen Lemniscaten die Eigenschaft haben, sich summiren, subtrahiren, multipliciren und dividiren zu lassen, mit Hülfe ähnlicher Regeln wie diejenigen, welche zur Ausführung derselben Operationen bei den elliptischen Bögen dienen; das merkwürdigste dabei ist, dass die Länge der ganzen Lemniscate derjenigen einer Ellipse gleich ist, deren eine Halbaxe der Sehne AQ der Inclination, und deren andere Halbaxe dem Sinus versus AS gleichkommt (Fig. 3).

Diese Lemniscaten gehören ferner zur Classe der sphärischen Epicykloiden und haben alle Eigenschaften derselben. Denn ist AB die Axe der ersten Sphäre, und QR der vom Pol P der zweiten beschriebene Parallelkreis, ist ferner der Bogen QB in Z halbirt und der Parallelkreis ZZ' gezogen, dann aus Q als Pol der kleinere Kreis ZU beschrieben, so stelle man sich vor, dass die Kugelhaube ZBZ' unbeweglich bleibe, die andere Kugelhaube ZQU aber auf der Peripherie der ersteren fortrolle, ohne im gemeinschaftlichen Berührungspunkt Z zu gleiten. Wenn mit der beweglichen Kugelhaube der Punkt M so verbunden ist, dass er beständig auf der Kugeloberfläche bleibt und von Q um einen Quadranten entfernt ist, so beschreibt der Punkt M die der Inclination AQ entsprechende Lemniscate.

Planeten auf der Lemniscate mit der auf der Ekliptik fortschreitenden Bewegung der Lemniscate selbst, erhalten wir die Bewegung des Planeten in der Zone des Thierkreises. Nun aber ist die Bewegung der Lemniscate längs des Thierkreises gleichförmig, und ihre Geschwindigkeit ist so angenommen, dass sie während eines zodiacalen Umlaufs des Planeten immer in gleicher Richtung, nach der Ordnung der Zeichen, die ganze Ekliptik durchläuft. Der Lauf des Planeten auf der Lemniscate besteht aber in einer periodischen, bald vorwärts, bald rückwärts gehenden Oscillation, deren Gesetz in Prop. IV angegeben wurde. Die Zeitdauer dieser Oscillation wurde von Eudoxus der Umdrehungszeit der dritten und vierten Sphäre, d. i. der Zeit des synodischen Umlaufs, gleich angenommen. Es wird also während der einen Hälfte eines jeden synodischen Umlaufs die Bewegung des Planeten längs der Ekliptik eine beschleunigte sein, indem sich die Bewegung der Lemniscate um die auf ihr vor sich gehenden Bewegung des Planeten vergrössert; während der zweiten Hälfte wird sich eine verzögerte Bewegung für den Planeten ergeben, indem die beiden eben genannten Bewegungen einander entgegengesetzt sind. Wenn also auf einem Bogen der Lemniscate die rückläufige Oscillation im Sinn der Länge schneller vor sich geht, als die Lemniscate selbst direct sich weiter bewegt, so wird sich daraus für den Planeten während einer gewissen Zeit eine retrograde Bewegung ergeben, und man hat einen Rücklauf zwischen zwei Stillständen. Ferner ist offenbar, dass einerseits die grösste Beschleunigung des Planeten im Sinn der Länge, und andererseits die grösste Verzögerung, oder die grösste retrograde Geschwindigkeit stattfinden wird, wenn der Planet durch das Centrum oder den doppelten Punkt der Lemniscate geht. Diese Bewegungen müssen also so combinirt werden, dass sich der Planet im Mittelpunkt der Lemniscate befindet und auf derselben eine directe Bewegung hat, wenn er in der obern Conjunction steht, wo die scheinbare Geschwindigkeit der Planeten nach der Länge die grösste ist, und dass er sich wiederum im Mittelpunkt befindet, aber retrograd auf der Lemniscate bewegt, wenn er in der Opposition oder in der untern Conjunction steht, welchen Punkten die schnellste retrograde Geschwindigkeit entspricht. Eben so ist klar, dass diese Combination von fortschreitender und oscillatorischer Bewegung nach der Länge von einer entsprechenden Bewegung nach Breite begleitet sein wird, welche letztere den Planeten um eine der halben Breite der Lemniscate gleiche Grösse von der Ekliptik entfernen kann. Diese Bewegung lässt den Planeten zweimal seine nördlichste und zweimal seine südlichste Grenze erreichen, indem er während eines synodischen Umlaufs viermal die Ekliptik durchschneidet.

Dieses sind die Resultate, zu welchen man durch eine freie, aber ogische Betrachtung der wenigen Nachrichten, welche über die Planeten-

theorie des Eudoxus existiren, gelangt. Aber diese Entwickelungen hätten für uns keinen historischen Werth und wären zu unserem Zweck von keinem Nutzen, wenn wir nicht zeigen könnten, dass Eudoxus entweder auf dem von uns eingeschlagenen Weg, oder auf eine ebenso leichte und einfache Weise in Wirklichkeit zu den hauptsächlichsten der von uns angegebenen Resultate gelangt ist. Deshalb wollen wir, nach Erschöpfung des mathematischen und theoretischen Theils unserer Beweisführung, den historischen Theil derselben antreten. Zuerst wollen wir erörtern, ob die von uns angegebenen Folgerungen nicht im Widerspruch sind mit denen, welche Simplicius gegen das Ende seiner Auseinandersetzung über die Sphären des Eudoxus kurz andeutet: „Die dritte Sphäre", sagt er in § 6, „welche ihre Pole auf der zweiten in der Ekliptik hat und sich von Süden nach Norden und von Norden nach Süden bewegt, führt die vierte Sphäre mit sich, welche das Gestirn trägt, und verursacht dessen Bewegung nach der Breite. Jedoch ist sie es nicht allein, welche diese Bewegung bewirkt. Denn so oft das Gestirn, der dritten Sphäre folgend, sich gegen die Pole der Ekliptik hinbewegt und den Weltpolen genähert hat, so führt es die vierte Sphäre, deren Umlauf im entgegengesetzten Sinn mit der dritten, aber in derselben Zeit wie der Umlauf dieser vor sich geht, auf der andern Seite ebenso weit herab, und veranlasst es dadurch die Ekliptik zu durchschneiden und zu beiden Seiten derselben die von Eudoxus Hippopede genannte Curve zu beschreiben. Die Breite derselben ist genau gleich der Breitenbewegung des Gestirns". Diese Erklärungen des Simplicius enthalten mit Kürze und hinreichender Klarheit die durch die dritte und vierte Sphäre hervorgebrachte Bewegung und stimmen sehr gut mit meinen oben dargelegten Entwickelungen überein. Wir sehen ausserdem noch, dass Eudoxus der vom Planeten in Folge der gleichzeitigen Wirkung der dritten und vierten Sphäre durchlaufenen Curve den Namen Hippopede gegeben hatte. Wenn wir nun noch zeigen könnten, dass diese Curve die Gestalt und die Eigenschaften unserer sphärischen Lemniscate hatte, so wäre die Beweisführung eine vollständige. Es ist dieses nicht der einzige Fall in der Geometrie der Griechen, dass eine krumme Linie Hippopede genannt wird. Proclus spricht in seinem Commentar zum ersten Buch der Elemente des Euclid dreimal von einer Hippopede genannten Curve. An einer Stelle zählt er die Hippopede zu den gemischten Linien (d. h. zu den von den einfachen, nämlich der Geraden und dem Kreis verschiedenen) und sagt, dass sie unter die Classe der spirischen Linien gehöre.* An einer andern Stelle wiederholt er, dass die Hippopede eine spirische Linie

* *Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum Commentarii ex recognitione God. Friedlein. Lipsiae in aedibus Teubneri, 1873, p. 127.*

ist und fügt hinzu, dass diese Curve einen Winkel bildet, indem sie sich selbst schneidet.* Die Hippopede hatte also nach Proclus einen doppelten Punkt. Genaueres findet man an einer dritten Stelle,** an welcher Proclus, nachdem er erzählt hat, dass der Geometer Perseus drei Curven entdeckte, welche durch den Schnitt des Spire genannten Körpers durch eine Ebene hervorgehen, so fortfährt: „Die eine dieser Curven ist in sich selbst zurückgebogen (*ἐμπεπλεγμένη*) und der *ἵππου πέδῃ* ähnlich; die andere ist in der Mitte am breitesten und verengert sich gegen die Enden; die dritte ist länglich, in der Mitte eingedrückt und breiter an den beiden Enden."

Es ist bekannt, dass bei den griechischen Geometern mit dem Namen *σπεῖρα* jener ringförmige Rotationskörper bezeichnet wurde, welcher durch die Drehung eines Kreises um eine in seiner Ebene liegende, aber nicht durch seinen Mittelpunkt gehende, gerade Linie erzeugt wird.*** Dieser, heutzutag mit dem Namen Wulst bezeichnete Körper lässt unzählig viele verschiedene Schnitte zu. Wenn man aber nur die Schnitte betrachtet, welche eine gewisse Art von Symmetrie geben und welche Perseus vor allen andern studirt haben musste, so wird der Leser bald aus der Beschreibung, welche Proclus von den drei spirischen Linien gibt, bemerken, dass sie die drei aus dem Schnitt des Körpers durch eine zur Hauptaxe parallele Ebene hervorgehenden Hauptformen darstellen. Die drei Curven in Fig. 10 entsprechen genau den von Proclus angegebenen Eigenschaften. Die erste ist auf sich selbst zurückgebogen und hat einen doppelten Punkt, welches derselbe Punkt ist, in dem die schneidende Ebene die Oberfläche am Kehlkreis berührt; dieses ist die mit dem Namen Hippopede bezeichnete Curve, welche Proclus der *ἵππου πέδῃ* ähnlich nennt. Die zweite findet statt, wenn die schneidende Ebene von der Axe weiter als der Mittelpunkt des erzeugenden Kreises entfernt ist, es ist eine Art von Ovale, in der Mitte breit und an den beiden Enden verengert. Die dritte findet statt, wenn die schneidende Ebene weniger von der Axe entfernt ist als der Mittelpunkt des erzeugenden Kreises, und diese hat eine längliche Gestalt, eingedrückt in der Mitte und breit an den Enden.† Die Hippopede

---

* Ebenda p. 128.

** Ebenda p. 112.

*** S. dasselbe Werk p. 119; ferner Heron in den „geometr. Definit.", veröffentlicht von Friedlein im Bullettino des Pr. Boncompagni, t. IV, p. 108. Nach Heron gab man der Spire auch den Namen *κρίκος* (Ring).

† Die hier gegebene Interpretation der etwas unklaren Stelle des Proclus über die spirischen Linien und deren Gestalt stimmt der Hauptsache nach mit derjenigen überein, welche von Knoche und Märker als die wahrscheinlichste bezeichnet wurde. S. deren schätzenswerthes Programm: *Ex Procli successoris in Euclidis Elementa commentariis definitionis quartae expositionem, quae de recta est linea et sectionibus spiricis commentati sunt. Knochius et Maerkerus, Herefor-*

des Proclus (oder lieber des Perseus) hat also die Gestalt der Lemniscate, ebenso wie die von den Planeten in Folge der Bewegung der dritten und vierten Sphäre beschriebene Curve. Wir glauben daher, dass diese Curve die Hippopede des Eudoxus ist, da Eudoxus und Perseus Curven von ähnlicher Gestalt (wenn auch geometrisch sehr verschieden) natürlicher Weise den Namen eines durch seine Form auf jene Curven hinweisenden, bei den Griechen häufig vorkommenden Dinges — der ἵππου πέδη — gegeben haben müssen.

Zur Vervollständigung unserer Beweisführung müssen wir noch untersuchen, welchem Object die Griechen den Namen ἵππου πέδη gaben, und sehen, ob dessen Gestalt die Uebertragung dieses Namens auf die von Eudoxus und Perseus erfundenen Curven rechtfertigt. Auf diese Fragen gibt uns eine Stelle der Schrift des Xenophon *„de re equestri“* ausführ-

---

diae 1856. Die Ansicht dieser beiden Autoren ist zwar in einem Punkt von der meinigen verschieden, aber dieses ist von keinem Einfluss auf unsere Frage bezüglich der Hippopede, worin ich das Vergnügen habe mit den oben genannten Autoren vollständig in Uebereinstimmung zu sein.

Knoche und Märker nehmen noch als möglich, wenn auch nicht als wahrscheinlich an, dass man den Angaben des Proclus dadurch genügen könne, dass man die drei Schnitte nicht parallel zur Hauptaxe der Spire, sondern schief zu derselben durch das Centrum der Spire, wie in Fig. 11 angezeigt ist, legt. Die Hippopede wäre alsdann die durch den Schnitt *AB*, welcher die Oberfläche zweimal berührt, erzeugte Curve, und hätte zwei doppelte Punkte; die beiden andern Curven bestünden aus je zwei Ovalen, nämlich der Schnitt *CD* gäbe zwei concentrische Ovalen und der Schnitt *EF* erzeugte zwei von einander getrennte, aber zu ein und derselben Axe symmetrisch liegende Ovalen. Ich kann mich mit dieser Ansicht nicht einverstanden erklären. Denn es ist zu bemerken, dass die Griechen in den Schnittcurven, welche durch *CD* entstehen, vielleicht zwei verschiedene Linien anstatt einer einzigen gesehen haben würden, wogegen bei denselben immer drei spirische Schnitte unterschieden werden. Aber der gewichtigste Einwand, der gemacht werden kann, besteht darin, dass der Schnitt *AB* nicht Hippopede genannt werden kann, aus dem einfachen Grund, weil dieser Schnitt keine neue Curve ergibt, sondern einfach aus zwei Kreisumfängen entsteht, welche sich in den Punkten m und n schneiden, wo die Ebene *AB* die krumme Fläche zugleich schneidet und berührt. Dieser Umstand scheint jenen beiden gelehrten Auslegern des Proclus entgangen zu sein.

Eine andere, von dem vorigen verschiedene Interpretation scheint die Stelle auf Seite 119 Zeile 9—17 in der Friedlein'schen Ausgabe des Proclus zu verlangen.

Für unsere Angelegenheit ist dieses alles vollkommen gleichgültig, da aus den Angaben des Proclus über die Hippopede mit Klarheit hervorgeht, dass diese Curve eine zusammenhängende, in sich selbst zurückkehrende ist, welche sich unter einem Winkel schneidet und im Schnittpunkt einen doppelten Punkt hat. Die Möglichkeit von zwei doppelten Punkten ist ausgeschlossen, weil sich in diesem Fall der Schnitt in das System zweier Kreise auflöst. Deshalb muss die

liche Antwort. In dieser Schrift sagt Xenophon bei der Beschreibung der Art und Weise die Pferde manöveriren zu lassen und sie gleichmässig in den Schwenkungen nach rechts und links zu üben: „wir loben den nach der, πέδη genannten, Curve vor sich gehenden Lauf, weil er die Pferde übt, sich nach beiden Seiten zu wenden; und es ist gut den Lauf des Pferdes (von rechts nach links und umgekehrt) zu ändern, damit diese Uebung beide Seiten des Pferdes symmetrisch ausbilde; und wir ziehen die längliche πέδη der abgerundeten vor, weil das Pferd, überdrüssig immer in derselben Richtung herumzulaufen, sich leichter umwenden lässt und auf diese Weise gleichmässig im geradlinigen Lauf und in den Wendungen geübt wird. An einer anderen Stelle desselben Buches heisst es: „man erkennt die auf beiden Seiten nicht gleichmässig geformten Pferde dadurch, dass man sie in der, πέδη genannten Linie laufen lässt.* Aus diesen Worten geht hervor, dass die ἵππου πέδη bei den Griechen eine besondere Art von Curve war, welche die Eigenschaft hatte, die Pferde zu abwechselnden Wendungen bald nach rechts, bald nach links zu nöthigen; dieses setzt aber voraus, dass das Pferd während seines Laufes in dieser

---

Ebene, welche die Spire nach der Hippopede schneidet, diese Spire in einem Punkt ihres concav = convexen Theiles berühren. Die Formen, welche man auf diese Weise erhalten kann, reduciren sich auf drei Typen: der erste derselben ist symmetrisch in Bezug auf zwei zu einander senkrechte Axen und ist der Lemniscate ähnlich; die beiden andern sind symmetrisch zu einer einzigen Axe und geben Curven wie Fig. 12a und 12b. Der zweite Typus besteht aus zwei ungleich grossen Blättern, von denen das eine das andere umgiebt; der dritte hat zwei gleiche auseinanderliegende Blätter. Der zweite Typus ist offenbar für die Zwecke der Hippopede, wie sie von Xenophon beschrieben werden (s. folg. Anm.), nicht geeignet, weil, wenn man auf derselben in bestimmtem Sinn herumgeht, die Convexität der Curve immer entweder auf der linken oder auf der rechten Seite liegt. Der dritte Typus könnte streng genommen den Zwecken des Hippodroms genügen, aber diese Form ist nicht die geeignetste, da sie aus einer unzweckmässigen Umänderung des ersten Typus, das ist der Lemniscate, hervorgeht. Diese bleibt also immer die wahrscheinlichste Figur, auch ganz abgesehen von dem Umstand, dass Perseus bei seiner Betrachtung den einfachsten Fällen vor den verwickelteren den Vorzug geben musste, und von dem weiteren Umstand, dass Curven, welche zum zweiten und dritten Typus gehören, auf keine Weise aus den geometrischen Combinationen des Eudoxus hervorgehen können.

* *Xenophon, de re equestri, cap. 7....* *Ἱππασίαν δ' ἐπαινοῦμεν τὴν πέδην καλουμένην· ἐπ' ἀμφοτέρας γὰρ τὰς γνάθους στρέφεσθαι ἐθίζει. Καὶ τὸ μεταβάλλεσθαι δὲ τὴν ἱππασίαν ἀγαθὸν, ἵνα ἀμφοτέραι αἱ γνάθοι καθ' ἑκάτερον τῆς ἱππασίας ἰσάζωνται. Ἐπαινοῦμεν δέ καὶ τὴν ἑτερομήκην πέδην μᾶλλον τῆς κυκλοτεροῦς* etc. Ebenda, cap. 3. *Τούς γε μὴν ἑτερογνάθους μηνύει μὲν καὶ ἡ πέδη καλουμένη ἱππασία.* Ebenso hat auch der Alexandrinische Grammatiker Hesychius unter den Erklärungen, welche er in seinem grossen Lexikon über das Wort πέδη gibt, auch die: „die Figur der Reitübung“ (εἶδος ἱππασίας). *Hesychii Lexicon, ed. Alberti Lugd. Bat. 1746—66.* Tom. II, p. 898.

Curve die convexe Windung derselben bald auf der rechten, bald auf der linken Seite hatte. Die einfachste Gestalt einer geschlossenen Curve, welcher diese Eigenschaft zukommt, ist offenbar folgende mehr oder weniger verlängerte Windung ∞. In dieser Curve lässt man auch noch heutzutage die Pferde laufen, und sie stimmt genau mit der des Eudoxus und Perseus überein. Aus Fig. 13 erkennt man sofort, dass, wenn das Thier während seines Laufes auf der einen Schleife der Curve seine rechte Seite nach aussen wendet, auf der andern Schleife die rechte Seite desselben gegen das Innere der Curve gekehrt ist; deshalb wird es auf dem einen Endpunkt der Curve nach rechts, auf dem andern nach links schwenken müssen.

Ich muss den Leser um Verzeihung dafür bitten, dass ich in Entwicklungen und Abschweifungen dieser Art gerathen bin, aber, nur nach sorgfältiger Erwägung aller in diesem Abschnitt dargelegten Analogien und Beziehungen, kann man das Wesen des Mechanismus der Stillstände, Rückläufe und der Bewegung nach der Breite im System der homocentrischen Sphären als hinreichend erklärt und bewiesen betrachten.

In anderen antiken Schriften ist, wenn auch nicht der Name der Hippopede, aber doch wahrscheinlich dieselbe Sache unter verschiedenem Namen angeführt. Im Eudoxischen Papyrus, von welchem wir schon gelegentlich Erwähnung thaten, und welcher einen Auszug der Lehren dieses Astronomen zu enthalten scheint, ist gesagt, dass Merkur 116 Tage braucht, um seine ἕλιξ zu durchlaufen*. Die Periode von 116 Tagen ist offenbar die synodische Umlaufszeit des Merkur, woraus man schliessen kann, dass der Autor des Papyrus mit ἕλιξ jene Curve bezeichnen wollte, durch deren Zurücklegung die synodischen Phasen des Planeten hervorgebracht werden. Wenn wir nun bedenken, dass dieser Papyrus unmittelbar von Eudoxus herstammende Lehren enthält, so können wir mit grosser Wahrscheinlichkeit annehmen, dass der Name ἕλιξ hier zur Bezeichnung der Hippopede dient. Der Name ἕλιξ wurde in der That von den Griechen häufig benützt, um eine Spirallinie, wie die des Archimedes, oder die Windung einer Schraube zu bezeichnen; in letzterem Sinn hat ihn auch Plato gebraucht. Ueberhaupt wurde das Wort ἕλιξ zur Bezeichnung von verwickelten Curven, die von den in der Geometrie gewöhnlich betrachteten verschieden waren, angewandt. Wenn wir dem Proclus Glauben schenken dürfen, so bezeichnete Perseus selbst die von ihm gefundenen spirischen Linien** mit dem

---

* Ich habe diese Stelle aus dem Papyrus von Letronne, *Journal des Savants*, 1841, p. 544: *Στίλβων ὁ Ἑρμοῦ τὴν ἕλικα διεξέρχεται ἐν μησὶ τρισὶν καὶ [ἡμέραις] εἴκοσι ἕξ.*

** S. das auf die Erfindung der spirischen Linien sich beziehende Epigramm im Commentar des Proclus zum 1. B. d. Euklid p. 112 der Friedleinschen Ausgabe.

Namen Helicoiden. Wir haben gesehen, dass die Hippopede zu diesen Linien gehört.

In dieser Hinsicht bestätigen mich die letzten Kapitel der Astronomie des Theon von Smyrna, in welchen dieser Autor eine kurze Darlegung der astronomischen Lehren des platonischen Philosophen Dercyllides zu geben versucht.* Dercyllides „glaubt nicht, dass die helicoidischen Linien und die der Hippika ähnlichen als die Ursache der erratischen Bewegung der Planeten betrachtet werden können, denn diese Linien seien zufällig hervorgebracht; die erste Ursache der erratischen Bewegung und der Helix sei die schief im Thierkreis vor sich gehende Bewegung. Die Bewegung der Planeten nach der Helix sei durch die Combination von zwei Bewegungen dieser Gestirne entstanden." Alsdann beschreibt Dercyllides, wie eine Helix durch Combination der Bewegung der Planeten im Thierkreis mit ihrer täglichen Bewegung hervorgeht, und zeigt sehr deutlich das Resultat, welches identisch ist mit der von Plato im Timäus beschriebenen Helix.

Diese Stelle lehrt uns, dass es gewisse Philosophen oder Astronomen gab, welche die erratischen Bewegungen der Planeten durch helicoidische Linien und solche, welche der Hippika ähnlich sind, erklärten und welche von Dercyllides widerlegt wurden. Diese können für uns keine anderen als Eudoxus und die, welche ihm nachfolgten und das System der homocentrischen Sphären vervollkommneten, gewesen sein. Die helicoidischen und die der Hippika ähnlichen Linien sind nichts anderes, als die verschiedenen Hippopeden der verschiedenen Planeten.

Zugleich sehen wir, dass Dercyllides die helicoidischen Linien und die Hippika nicht ohne Weiteres der Helix des Plato ähnlich annimmt. Es ist nicht leicht zu sehen, wie die Helix des Plato mit einer von Pferden beschriebenen Linie Aehnlichkeit haben kann. Wirklich bemerkt Dercyllides kurz darauf, es gebe zwei Arten der Helix, nämlich: erstens die den Windungen der Schraube und den Krümmungen der *σκυτάλη* der Lacedämonier (unserer cylindrischen Schraubenlinie) ähnliche, und zweitens die ebene Helix, deren Construction er auch lehrt, und welche einfach eine ebene Sinusoide von unbestimmter Länge, zwischen zwei Parallellinien, ist. Diese Sinusoide ist nach H. Martin die Hippika des Dercyllides, ja sogar die Hippopede des Eudoxus wäre nach seiner Meinung nicht verschieden von dieser Sinusoide. In diesem Falle erlaube ich mir eine, von der Meinung des ausgezeichneten Herausgebers von Theon's Astronomie entgegengesetzte

* *Theonis Astr. ed. Martin*, p. 328 und die folgenden. Die wichtigste Stelle ist folgende: *Οὐκ ἀξιοῖ (Δερκυλλίδες) δὲ τοῦ πλανωμένου αἰτίας οἴεσθαι τὰς ἑλικοειδεῖς γραμμάς ...... τάς τε ἱππικῇ παραπλησίας ......*

Ansicht auszusprechen, und zwar aus folgenden Gründen: 1. Dercyllides deutet an keiner Stelle eine Identität der Hippika mit seiner ebenen Helix an. 2. Letztere ist abgeleitet durch die cylindrische Abwicklung, nicht sowohl der Helix des Plato, sondern einfach des Zodiacus, diesen als schiefen Kreis betrachtet; deshalb ist ihre Funktion vollständig identisch mit der dieses Kreises, und sie erklärt die erratischen Bewegungen der Planeten nicht besser als dieser Kreis. 3. Es ist nicht zu begreifen, wie man die planetarische Hippika, welche wesentlich eine sphärische und in sich selbst zurückkehrende Curve ist, mit der ebenen Helix des Dercyllides, einer Curve von beliebiger Anzahl von Windungen identificiren kann. 4. Eudoxus konnte zu seinen Hypothesen keine Curve brauchen, welche ihm kein Mittel zur Erklärung der Rückläufe der Planeten darbot; denn der Lauf auf der Sinusoide ist immer direct, und nie retrograd. 5. Meines Wissens gibt es keinen Grund, die Sinusoide wegen ihrer Form eine Hippika zu nennen. 6. Endlich kann man dieselbe mit der Hippopede des Eudoxus nicht für identisch halten, aus dem einfachen Grund, weil sie durch die von Aristoteles und Simplicius so deutlich beschriebenen Bewegungen der planetarischen Sphären nicht erzeugt werden kann. — Ich glaube vielmehr, dass Dercyllides beabsichtigte, durch die über eine für die Astronomie ganz nutzlose Curve gegebenen Erörterungen, mit seinem geometrischen Wissen zu prunken, anstatt die Natur der Hippika, welche er nicht recht verstand, auseinanderzusetzen. Dennoch bleibt diese Stelle des Dercyllides über die Ansicht jener, welche die erratischen Bewegungen der Planeten aus den Helicoiden und den der Hippika ähnlichen Curven herleiten wollten, für uns sehr schätzenswerth, und bestätigt unsere in diesem Abschnitt dargelegten Ansichten, wenn auch der platonische Philosoph mit seinen überflüssigen, gar nicht an jene Stelle gehörigen Erörterungen den Sinn derselben etwas unklar machte.

VI. Specielle Theorien der Planeten nach Eudoxus.

Bei den Planetentheorien der Alten waren die wichtigsten Elemente die Dauer der zodiakalen und jene der synodischen Umlaufszeit. Simplicius hat uns diesen Theil der Planetentheorien des Eudoxus überliefert, aber wie mir scheint, nur in runden Zahlen, weil die Dauer der zodiakalen Umlaufszeiten in ganzen Jahren und jene der synodischen in Monaten und in der Zehnerzahl der Tage angegeben sind. Wenn wir die Monate zu 30 Tagen annehmen, so haben wir folgende Tafel, in welcher, des Vergleichs wegen, neben die Angaben der Alten die Resultate unserer Zeit gesetzt wurden:

Planet	Synodische Umlaufszeiten		Zodiakale Umlaufszeiten		
	nach Eudoxus	nach unseren Angaben	nach Eudoxus	nach unseren Angaben	
Saturn . . .	Tage 390	378	Jahre 30	Jahre 29	Tage 166
Jupiter . . .	„ 390	399	„ 12	„ 11	„ 315
Mars	„ 260	780	„ 2	„ 1	„ 322
Merkur . . .	„ 110	116	„ 1	„ 1	„ 0
Venus	„ 570	584	„ 1	„ 1	„ 0

Wenn auch diese Zahlen zeigen, dass man damit nur eine grobe Annäherung für jene Perioden geben wollte, so sehen wir doch schon in diesen ersten Versuchen der Planetentheorien der Griechen eine ziemliche Annäherung, welche für die Beobachtungen eines einzigen Menschen schwer zu erhalten waren.* Im Eudoxischen Papyrus ist die synodische Umlaufszeit des Merkur zu 116 Tagen angegeben, also genau mit der heutzutage dafür giltigen Ziffer;** wenn diese Angabe, wie es wahrscheinlich ist, von Eudoxus herrührt, so müssen wir zugeben, dass er eine sehr genaue Kenntniss dieser Zahlen hatte, und dass er dieselben vielleicht in Aegypten kennen lernte, oder dass sie ihm von Babylonien aus mitgetheilt wurden. Zudem müssen wir bemerken, dass in demselben Papyrus die zodiakale Umlaufszeit des Mars zu zwei Jahren*** und jene des Saturn zu

* Wir müssen jedoch hiervon die synodische Umlaufszeit des Mars ausnehmen, wovon wir weiter unten sprechen werden. Eine eigenthümliche Folge der geringen Aufmerksamkeit und der Apathie, womit gewöhnlich die astronomischen Hypothesen des Eudoxus betrachtet wurden, kann man selbst bei dem so sorgfältigen Schaubach finden; dieser spricht in seiner „Geschichte der griechischen Astronomie vor Eratosthenes" über die soeben angeführten Zahlen und scheint gar nicht zu wissen, dass die erste der beiden Reihen die synodischen Umlaufszeiten der Planeten anzeigt; er verliert sich deshalb in unnöthigen Auseinandersetzungen, um etwas klar zu machen, was die Vergleichung dieser Zahlen mit denjenigen, welche die heutige Astronomie dafür gibt, auf den ersten Blick erkennen lässt. Noch schlechter ist Eudoxus bei Cornewall Lewis weggekommen, welcher die von Eudoxus für Merkur und Venus angegebenen „geocentrischen" Umlaufszeiten (die, wie Eudoxus wohl sah, genau ein Jahr betragen) mit den „heliocentrischen" Umlaufszeiten im Copernikanischen System vergleicht, welche natürlich ganz andere sind und die in keinem geocentrischen System der Astronomie bestimmt werden können. Der Fehler bei diesen beiden Planeten, sagt er, ist bedeutend und unverzeihlich; aber diesen Fehler hat Cornewall Lewis und nicht Eudoxus gemacht.

** Letronne, *Journal des Savants*, 1841, p. 544.

*** Letronne, ebenda. Irrthümlicherweise jedoch behauptet Letronne, dass sich diese Dauer auf die synodische Umlaufszeit bezieht; der Text sagt deutlich *Πυροειδὴς τὸν ζῳδίων κύκλον διεξέρχεται ἐν ἔτεσι β.* Es handelt sich also um die zodiakale Umlaufszeit.

30 Jahren,* wie oben, angegeben ist. Unter diesen Umständen ist es unnöthig, weitere Auseinandersetzungen über diese Zahlen zu machen, da wir aus denselben nicht ersehen können, ob Eudoxus die Beziehung kannte, welche zwischen dem Sonnenjahr, der zodiakalen Umlaufszeit eines Planeten und dessen synodischer Umlaufszeit stattfindet. Ohne uns also weiter mit dem Grad der Genauigkeit dieser Ziffern zu beschäftigen, wollen wir untersuchen, welche Folgerungen sich aus ihnen für den im vorigen Abschnitt entwickelten Mechanismus ergeben, und welche Resultate man daraus für die Theorien der einzelnen Planeten erhält.

1. Saturn. Aus dem, was über die Fundamente der Planetentheorie des Eudoxus gesagt wurde, sieht man, dass es zur Erlangung der Elemente hinreicht, bei jedem Planeten die Inclination der Axe der vierten Sphäre gegen die der dritten zu wissen. Denn aus diesem einzigen Datum bestimmen sich alle Dimensionen der Hippopede vollständig, und damit der synodische Umlauf des Planeten, sein unregelmässiger Lauf bezüglich der Sonne und seine Bewegung nach der Breite. Leider gibt Simplicius den Werth der Inclination weder für den Saturn noch für die anderen Planeten an, sondern sagt einfach, dass diese Inclination für die verschiedenen Planeten verschieden ist (s. Anhang II, § 5). In diesem Punkte sind wir also einfach auf Vermuthungen angewiesen. Da es aber sicher ist, dass Eudoxus bei der Aufstellung seines Mechanismus das Problem der Rückläufe hauptsächlich im Auge hatte, wenigstens bei Saturn, Jupiter und Mars, so glauben wir, dass wir uns von der Wahrheit nicht zu sehr entfernen, wenn wir die Annahme machen, er habe die Inclinationen so gewählt, dass er für jeden dieser drei Planeten eine Hippopede erhielt, aus welcher sich die rückläufigen Bögen mit der Beobachtung übereinstimmend ergaben. Ohne deshalb zu behaupten, dass wir genau ebenso wie Eudoxus verfahren, wollen wir suchen, welche Folgerungen sich ergeben, wenn wir seine Hypothesen auf die durch den Rücklauf beschriebenen Bögen anwenden und sehen, wie sich aus dieser Untersuchung die Erklärung einiger besonderer Umstände ergibt, welche ohne diese dunkel und unerklärlich erscheinen würden. Von diesem Gesichtspunkte aus ergibt sich für die Theorie des Saturn, von dessen rückläufigem Bogen wir wissen, dass er ungefähr 6^0 beträgt, durch einige einfache Versuche und Rechnungen, dass

---

* *Φαίνων δ' ὁ τοῦ ἡλίου ἀστὴρ, τὸν ζωδίων κύκλον διεξέρχεται ἐν ἔτεσιν λ.* Letronne, *Journ. des Sav.*, 1839, p. 582. Diese Benennung „Gestirn der Sonne“ für den Saturn findet man auch bei Simplicius (s. Anh. II, § 4); und es ist wahrscheinlich, dass sowohl der Autor des Papyrus, als auch Simplicius dieselbe der gleichen Quelle, dem Buche des Eudoxus *περὶ ταχῶν*, entnahmen. Diodorus Siculus, II, 30 führt diese Benennung auf die Chaldäer zurück, welche vielleicht einigen Einfluss auf die Ziffern des Eudoxus gehabt haben können.

man diese Grösse durch Combination des zodiakalen Umlaufs von 30 Jahren, mit einem synodischen Umlauf von 13 Monaten auf der dritten und vierten Sphäre, und durch Annahme einer Inclination von 6^0 für die Axen dieser beiden Sphären, erhält. Alsdann wird die gesammte Länge der Hippopede 12^0 und ihre halbe Breite, d. i. die grösste Entfernung des Planeten von der Ekliptik, fast 9′. Die Combination der zodiakalen Bewegung mit der synodischen, auf der Hippopede vor sich gehenden bewirkt, dass der Planet bei jedem synodischen Umlauf eine verschlungene Curve, wie die in Fig. 14, beschreibt, wo, um die Natur ihrer Windungen deutlicher hervortreten zu lassen, für die transversalen Dimensionen ein zehnmal grösserer Massstab als für die longitudinalen angenommen wurde. In dieser Figur ist O der vom Planeten im Augenblick der Opposition eingenommene Punkt, A bezeichnet die östliche Grenze des Rücklaufs und den Ort des ersten Stillstands, B die westliche Grenze des Rücklaufs und den Ort des zweiten Stillstands, AB misst den Bogen des Rücklaufs, C ist der Ort der oberen Conjunction. Von dieser Phase in C aus gelangt der Planet nach Verlauf des achten Theils seiner synodischen Umlaufszeit das erste Mal in D zu seiner grössten Digression nach der Breite; während des zweiten Achtels derselben durchläuft er den Bogen DE und kehrt zur Ekliptik zurück; und so durchläuft er in Zeitintervallen, welche immer ein Achtel der synodischen Umlaufsdauer betragen, die Bögen EF, FO, OG, GH, HJ, JC' und kehrt in C' zu seiner oberen Conjunction mit der Sonne zurück, um einen ähnlichen Lauf an einer andern Stelle des Thierkreises durchzumachen. Offenbar kann man die transversalen Digressionen von 9′ auf beiden Seiten der Ekliptik als von den Beobachtungen jener Zeiten gänzlich unbemerkt betrachten. Deshalb reducirte sich die wirklich bemerkbare Wirkung dieser so verwickelten Bewegung auf eine Längenbewegung, welche nichts Anderes ist, als ein Rücklauf zwischen zwei ungefähr um 6^0 von einander abstehenden Stillständen; und gerade dieses konnten die Astronomen jener Zeit beobachtet haben. Die solare Anomalie des Saturn konnte also aus den Hypothesen des Eudoxus mit einer, den Beobachtungen gleichen, ja dieselben noch übertreffenden Genauigkeit dargestellt werden.

2. Jupiter. Für die Bewegung des Jupiter gelten genau dieselben Betrachtungen. Wenn man die Inclination gleich 13^0 setzt, so erhält man eine Hippopede von 26^0 Länge und zweimal 44′ Breite. Lässt man, während die Hippopede mit ihrem Centrum einen zodiakalen Umlauf in 12 Jahren beschreibt, den Planeten seinen synodischen Umlauf auf der Hippopede in 13 Monaten zurücklegen,* so betragen die grössten Entfernungen

* Man kann hier, wie bei allen anderen Planeten, fragen, in welchem Sinne die Hippopede vom Planeten durchlaufen werden muss. Eine aufmerksame Be-

des Planeten von der Ekliptik auf beiden Seiten derselben nur $0^0 44'$ und sind noch unbemerkbar für die Beobachtungen, während die Grösse des rückläufigen Bogens ungefähr 8^0 beträgt. Die vom Planeten während eines synodischen Umlaufs auf beiden Seiten der Ekliptik beschriebene Curve ist in Fig. 15 dargestellt. In derselben habe ich die transversalen Dimensionen im Verhältniss von 3:10 vergrössert, um ihre Windungen deutlich zeichnen zu können. Die Phasen der Bewegung sind denen des Saturn analog. Während eines synodischen Umlaufs durchschneidet der Planet in gleichen Zeitintervallen die Ekliptik viermal, erreicht zweimal seine südlichste und zweimal seine nördlichste Breite, und diese acht Phasen der Bewegung theilen den synodischen Umlauf in acht gleiche Theile. Da nun auch für Jupiter die Digressionen nach der Breite für die Beobachtung unbemerkbar bleiben, so können wir sagen, dass, sowohl für Jupiter als auch für Saturn, Eudoxus eine ausgezeichnete Lösung des platonischen Problems gab, den Lauf der Planeten durch gleichförmige homocentrische Kreisbewegungen innerhalb der von den Beobachtungen jener Zeit gesteckten Grenzen der Genauigkeit darzustellen. In der That, die Grösse, die Dauer und die Anzahl der Stillstände und Rückläufe sind fast genau dieselben, wie sie sich aus den obigen Annahmen ergeben.

3. Mars. Nicht ganz dasselbe kann man beim Mars sagen, dessen scheinbarer Lauf am Himmel grössere Verwickelungen darbot und der von Plinius wegen dieser Eigenschaft als *maxime inobservabilis** bezeichnet wurde. Es ist nicht leicht zu begreifen, wie Eudoxus sich in der Dauer seines synodischen Umlaufs so bedeutend irren konnte, indem er dieselbe zu 8 Monaten und 20 Tagen, d. i. zu 260 Tagen angibt, während sie in Wirklichkeit 780 Tage, also genau das Dreifache von 260 beträgt. Ideler glaubt, dass hier ein Irrthum vorliege und dass man 25 Monate und 20 Tage lesen müsse;** Letronne verwechselt die synodische Umlaufszeit mit der zodiakalen und nimmt eine Zeitdauer von 2 Jahren oder 24 Monaten an, indem er sich unrichtiger Weise auf die Autorität des Papyrus beruft,*** wie wir schon oben angegeben haben. Sicherlich ist es nicht leicht anzunehmen, dass Eudoxus, welcher für den Mars eine zodiakale Umlaufszeit

---

trachtung lässt erkennen, dass dieses vollkommen gleichgiltig ist und dass die Bewegung nach der Länge immer dieselbe bleibt; aber die Breitenbewegung wird die Reihenfolge ihrer Phasen wechseln, indem jener Theil der vom Planeten beschriebenen Curve, welcher oberhalb der Ekliptik liegt, unterhalb derselben zu liegen kommt, und umgekehrt. Kurz, die Bahncurve des Planeten kehrt sich gegen die als ihre Axe betrachtete Ekliptik symmetrisch um.

* *Hist. mundi II, 17.*

** Ueber Eudoxus. Abh. d. Berl. Akad. f. 1830, p. 78.

*** S. Anmerkung *** auf S. 156.

kannte, die von der richtigen nur wenig verschieden war, dem synodischen Umlauf dieses Planeten eine Zeitdauer beigelegt hätte, welche mit der wirklichen vollständig im Widerspruch stand, und nicht gewusst hätte, dass mit der zodiakalen Umlaufszeit des Planeten und jener der Sonne auch die synodische Umlaufszeit desselben gegeben* ist. Ich will hier nicht über Etwas entscheiden, was wir nicht mehr wissen können; dagegen will ich untersuchen, zu welchem Resultat die Anwendung der Planetentheorie des Eudoxus durch die beiden Annahmen für die synodische Umlaufszeit des Mars, nämlich durch die Annahme von 260 Tagen und die andere von Ideler vertretene von 780 Tagen, führt. Nehmen wir vorerst die letztere an, so sehen wir bald, dass es unmöglich ist, für den Lauf des Mars eine befriedigende Lösung, wie die für Saturn und Jupiter angegebene, zu erlangen; denn in diesem Falle gelingt es nicht, für die Hippopede des Mars eine geeignete Dimension zu erlangen. Nimmt man z. B. für die Länge der Lemniscate die grösste Grenze an, welche nach der Beschreibung des Simplicius noch zulässig ist, nämlich 180° (wobei man die Inclination gleich 90° annehmen muss), so wird die Hippopede 60° breit, und man muss deshalb Digressionen nach der Breite von 30° zulassen. Trotz dieser äussersten Annahmen erreicht die retrograde Geschwindigkeit des Planeten auf der Hippopede die directe zodiakale Geschwindigkeit der Hippopede selbst nicht, und Mars kann in der Opposition nicht rückläufig werden, sondern die Geschwindigkeit seiner Bewegung scheint nur sehr langsam zu sein. Um daher eine rückläufige Bewegung zu erhalten, müsste man die Inklination grösser als 90° annehmen, folglich der dritten und vierten Sphäre Bewegungen nach gleichem Sinne ertheilen, was gegen die von Simplicius ausgesprochene Behauptung ist. Aber auch damit würde nichts gedient sein, weil sich daraus für Mars Breiten über 30° ergeben würden, was Eudoxus sicherlich nicht annehmen konnte. — Wenn wir im Gegentheil die synodische Umlaufszeit zu 260 Tagen annehmen, so wird die Bewegung des Mars auf der Hippopede fast dreimal schneller als vorhin; und in diesem Falle erhält man durch Annahme einer Inclination von 34° einen Rücklauf,

---

* Ist t die Anzahl der Tage für die jährliche solare Umlaufszeit, z jene für die zodiakale Umlaufszeit eines oberen Planeten, s jene für die synodische Umlaufszeit desselben Planeten, so gilt bekanntlich die Gleichung: $\frac{1}{t} = \frac{1}{z} + \frac{1}{s}$; hat Eudoxus diese Relation gekannt? Wir müssen es bezweifeln, wenn wir die Zahlen betrachten, welche Simplicius für die synodischen und die zodiakalen Umlaufszeiten angibt. Aber wir sind geneigt zu glauben, dass diese Zahlen abgerundet sind, indem die synodischen Umlaufszeiten in Monaten und in der Zehnerzahl der Tage, die zodiakalen in ganzen Jahren angegeben sind.

der mit der Wahrheit hinreichend übereinstimmt. Die Länge der Hippopede wird 68^0, die grösste Digression nach der Breite $4^0 53'$, welche nicht zu sehr von der wirklichen abweicht; die Grösse des rückläufigen Bogens ergibt sich zu 16^0, also wenig grösser, als wie man ihn bei diesem Planeten beobachtet. Fig. 16 zeigt die bei diesen Annahmen von Mars um seine Oppositionen beschriebene Curve. Diese mit den Beobachtungen hinreichende Uebereinstimmung konnte vielleicht Eudoxus zur Annahme einer synodischen Umlaufszeit, die nur ein Drittel von der wirklichen beträgt, veranlassen; aber bei dieser Annahme musste man zwei Rückläufe ausser der Opposition mit der Sonne haben, und sechs Stillstände, von denen vier gänzlich imaginär sind. — Daraus schliessen wir, dass die Theorie des Eudoxus in ihrer Anwendung auf den Planeten Mars zu keinem Resultat führte, weder durch die eine, noch durch die andere der beiden obigen Annahmen; und einige Decennien nachher musste Callippus auf eine Verbesserung dieser Theorie denken.

4. Merkur. Da für Merkur und Venus der mittlere Ort mit dem mittlern Ort der Sonne zusammenfällt, so musste Eudoxus offenbar für beide das Centrum der Hippopede beständig mit dem Ort der Sonne zusammenfallen lassen. Und weil dieses Centrum auf der Ekliptik um 90^0 von den beiden Rotationspolen der dritten Sphäre absteht (wie wir bei der Erzeugung dieser Curve sahen), so ziehen wir daraus den Schluss, dass nach Eudoxus die Pole der dritten Sphäre des Merkur sowie der Venus immer in der Quadratur mit der Sonne stehen müssen, und dass deshalb die Pole der dritten Sphäre des Merkur beständig mit den Polen der dritten Sphäre der Venus zusammenfallen. Diese Folgerung aus der Theorie des Eudoxus wird durch die Worte des Aristoteles „nach Eudoxus sind die Pole der dritten Sphäre verschieden für einige Planeten, identisch für Aphrodite und Hermes“ bestätigt (s. Anhang I). Diese sich ungesucht ergebende Uebereinstimmung beweist zugleich die Genauigkeit der Beschreibung des Aristoteles und die Richtigkeit der von uns wiedergefundenen Planetentheorie des grossen Astronomen von Cnidus.

Aus dem Umstand, dass der mittlere Ort des Planeten das mit der Sonne zusammenfallende Centrum ist, und dass die grösste Elongation des Planeten von diesem Centrum zugleich die halbe Länge der Hippopede, d. h. die Inclination vorstellt, schliessen wir, dass die grösste Längenabweichung dieser beiden Planeten von der Sonne genau ihrer bezüglichen Inclination gleich ist; von dieser Eigenschaft machte Eudoxus höchst wahrscheinlich zur Bestimmung der Inclination dieser beiden Planeten Gebrauch, da er kein anderes Mittel zu demselben Zweck benützen konnte, indem die Rückläufe der Venus schwierig und jene des Merkur gar nicht zu beobach-

ten sind.* Da jedoch von Simplicius nicht berichtet wurde, welchen Werth Eudoxus diesen grössten Elongationen beilegte, so nehme ich für Merkur eine Elongation von 23^0 an, welches fast dieselbe ist, wie sie sich aus den Rechnungen der heutigen Astronomie ergibt. Die gesammte Länge der Hippopede des Merkur wird folglich 46^0, die halbe Breite derselben, d. h. die grösste Digression dieses Gestirns nach der Breite, ergibt sich zu $2^0 14'$. Nach der modernen Astronomie ist diese Digression ein wenig grösser. Nach dieser Annahme bildet die von Merkur bei jedem Rücklauf beschriebene Curve (Fig. 17) nicht wie die andern eine geschlossene Knotenlinie, sondern nur eine dreifache Inflexion. Man hat hier einen rückläufigen Bogen von ungefähr 6^0, viel kleiner als er in Wirklichkeit ist; da aber dieser Fehler in einen Theil des synodischen Umlaufs fällt, welcher nicht beobachtet werden kann, so kann er dieser Theorie nicht zur Last gelegt werden. In den sichtbaren Theilen dieses Laufs stellen sich die Längen mit ziemlicher Genauigkeit dar, wenn auch die Epochen der grössten Elongationen nicht genau mit der Wirklichkeit übereinstimmend ausfallen.

5. Venus. Für die Darstellung des Laufs der Venus gilt dasselbe, was wir beim Merkur sagten, wenn auch das Ergebniss weit davon entfernt ist, den Beobachtungen zu entsprechen. Wenn wir nach der modernen Astronomie die grösste Elongation oder Inclination der Venus zu 46^0 annehmen, so ergibt sich für die gesammte Länge der Hippopede 92^0, und für die halbe Breite derselben oder die Breitendigression $8^0 54'$, was ungefähr mit den grössten Digressionen nach Breite, wie sie die Beobachtungen dieses Planeten ergeben, übereinstimmt. Aber da die Dauer des Umlaufs der Venus auf der Hippopede (570 Tage nach Eudoxus) fast das Doppelte der Umlaufszeit auf dem Thierkreis ist, so ist die Geschwindigkeit der ersteren Bewegung nach der Länge stets um Vieles kleiner als die Geschwindigkeit der zweiten. Daher ergibt sich für Venus dasselbe, was wir schon beim Mars erhielten; nach dieser Theorie des Eudoxus kann Venus niemals rückläufig werden; und dieser Fehler ist nicht zu vermeiden, welchen willkürlichen Werth man der Inclination dieses Planeten auch beilegen mag. Ueberhaupt müssen wir hier bemerken, dass die Stillstände und Rückläufe der Venus gewöhnlich in der Dämmerung vor sich gehen, wo die Vergleichung dieses Gestirns mit den Fixsternen schwierig ist, und es wäre auch möglich, dass Eudoxus noch keine Idee von der

* Nach der Meinung einiger Astronomen würde, wie Plinius angibt, Merkur im Stier, in den Zwillingen und in einem Theil des Krebses nie rückläufig *(hist. mundi II, 17)*, was nach der Theorie dieses Planeten offenbar falsch ist. Es existirte also zur Zeit des Plinius eine Theorie des Merkur, durch welche man die Rückläufe dieses Planeten berechnete, welche der Beobachtung unzugänglich sind.

Möglichkeit dieser Phänomene hatte. Aber ein anderer sehr bedeutender Irrthum seiner Theorie (welcher in geringerem Mass auch bei der Theorie des Merkur vorkommt) bestand darin, dass die 570 Tage betragende synodische Umlaufszeit, zufolge des Bewegungsgesetzes der Venus auf ihrer Hippopede, von den zwei Zeitpunkten der grössten östlichen und westlichen Elongationen in zwei gleiche Theile getheilt werden musste, weil die Bewegung der dritten und vierten Sphäre gleichförmig angenommen wurde. Nun aber gebraucht in Wirklichkeit die Venus von den 584 Tagen ihrer synodischen Umlaufszeit 441, um von der grössten östlichen Elongation zur grössten westlichen zu gelangen, und nur 143 zu ihrer Rückkehr von der westlichen zur östlichen; deshalb ist die ganze synodische Umlaufszeit in zwei Theile getheilt, welche sich ungefähr wie 3:1 verhalten. In Folge dieses Irrthums differiren die Epochen der grössten Elongationen um mehr als 70 Tage von denen, welche sich aus der Theorie des Eudoxus ergeben, wenn auch wegen der geringen Bewegung der Venus gegen die Sonne bei diesen Phasen der Fehler bezüglich der Elongation von der Sonne und bezüglich der Position der Venus im Thierkreis 10^0 nicht übersteigt. In den unteren Theilen des Laufes konnten die Fehler sogar noch grösser werden, aber das kam nur in der Nähe der untern Conjunction vor, wo der Planet nicht beobachtet werden konnte.

Alsdann zeigte sich noch eine Unvollkommenheit in der Theorie des Eudoxus bei der Bewegung nach der Breite, eine Unvollkommenheit, welche bei der Venus merklicher ist als bei jedem andern Planeten. Die Hippopede schneidet die Ekliptik in vier Punkten, nämlich zweimal in ihrem Centrum und einmal in jedem ihrer äussersten Punkte. Daraus folgt, dass der Planet während eines synodischen Umlaufs die Ekliptik viermal treffen muss. Dieses ist aber weit von der Wahrheit entfernt, weil die jährliche Breitenparallaxe jährlich zweimal Null ist, nämlich wenn die Erde die Knotenlinie überschreitet; deshalb darf sich der Planet jährlich auch nur zweimal auf dem grössten Kreis befinden, welcher seine heliocentrische Bewegung auf der Himmelskugel bezeichnet. Die Breite des Planeten ist also nur dann Null, wenn er sich auf der Knotenlinie befindet, was zweimal während jedes siderischen Umlaufs vorkommt. Hierzu kommt noch, dass die Gestalt der Biegungen und Knoten der Trajectorie in den Monaten der Opposition und untern Conjunction in Wirklichkeit weniger symmetrisch, aber viel einfacher ist als die, welche sich aus den Hypothesen des Eudoxus ergibt. Anstatt eines Knotens mit vierfachem Schnittpunkt hat man gewöhnlich einen einfachen Knoten und manchmal auch nur eine Biegung nach entgegengesetzter Richtung (Fig. 18). Diese Unvollkommenheiten hatten bei der Theorie des Saturn und des Jupiter nicht viel zu bedeuten, weil bei diesen beiden Planeten die Breitenbewegung für die Beobachtungen

jener Zeit unbemerkbar war. Bei den auf Mars und Merkur bezüglichen Hypothesen gelangten sie schon zu einiger Bedeutung; aber am meisten machten sie sich bei der Bewegung der Venus bemerkbar, welche eine Breite von 9^0 erreichen kann.

Mit diesen Auseinandersetzungen glaube ich alles das, was man über die Planetentheorie des Eudoxus beweisen oder vermuthen kann, erschöpft zu haben. Ihre Hauptzüge bestehen also darin: dass für die Sonne und den Mond diese Hypothesen über alle hauptsächlichsten Phänomene in befriedigender Weise Rechenschaft gaben, ausgenommen über die von der Excentricität herrührende Ungleichheit, welche entweder dem Eudoxus unbekannt war oder wenigstens von ihm nicht beachtet wurde. Für Jupiter und Saturn, und einigermassen auch für Merkur gaben sie eine im Allgemeinen befriedigende Erklärung der Bewegung nach Länge, der Stillstände, der Rückläufe und der anderen, von der solaren Anomalie abhängigen Erscheinungen. Auffallender waren die Mängel dieser Theorie bei der Venus, und am grössten traten sie bei Mars hervor; deshalb mussten die Schüler und Nachfolger des Eudoxus bald auf die Verbesserung der Hypothesen für diese beiden Planeten Bedacht nehmen. Die Grenzen der Breitenbewegungen ergaben sich aus den verschiedenen Hippopeden in ziemlich guter Uebereinstimmung mit den wirklich beobachteten Digressionen, wenn auch die Perioden der letzteren und ihre Oerter im Cyclus gänzlich irrig waren. Wenn wir jedoch Alles miteinander betrachten und auch auf den Zustand der praktischen Astronomie jener Zeiten Rücksicht nehmen, so wird jeder einsichtsvolle Leser in diesem System eine Erfindung erblicken müssen, würdig der Bewunderung nicht nur der Astronomen der Alten, sondern auch derjenigen unserer Zeit, da diese wohl wissen, wie schwer manchmal die Entdeckung der Wahrheit auch bei ganz einfachen Problemen wird. In jedem Fall gebührt dem Eudoxus der Ruhm, den ersten Versuch zur geometrischen Erklärung des Gesetzes gemacht zu haben, nach welchem die erste und einflussreichste der periodischen Grössen sich ändert, aus denen die planetarischen Ungleichheiten zusammengesetzt sind, nämlich die von der Elongation der Planeten von der Sonne abhängige Grösse. Sollten Jemandem diese Planetentheorien noch sehr roh erscheinen, so geben wir ihm zu bedenken, dass Eudoxus in keiner derselben von mehr als drei Constanten oder drei Elementen Gebrauch machte, nämlich der Epoche einer obern Conjunction, der Dauer des siderischen Umlaufs (womit die synodische Umlaufszeit zusammenhängt) und der Inclination der Axe der vierten Sphäre gegen die der dritten, wodurch die Dimensionen der Hippopede gänzlich bestimmt sind. In unserer Zeit sind zu demselben Zweck sechs Elemente für jeden Planeten nothwendig. Diesen Umstand empfehlen wir denjenigen zur Erwägung, welche auf eine oberflächliche Betrachtung

hin dem Eudoxus Verwicklung in einem System vorgeworfen haben, wie die Astronomie keines von grösserer Einfachheit und Symmetrie bis zu den Zeiten Keppler's sah.

VII. Die Reform des Callippus.

Die Lehre von den homocentrischen Sphären erhielt sich in der mathematischen Schule des Eudoxus auch nach seinem Tode, von welchem er um 355 in einem Alter von 53 Jahren betroffen wurde. Unter denjenigen, welche sich mit diesen Hypothesen beschäftigten, findet sich auch Menächmus, ein Schüler des Eudoxus und der Erfinder der Kegelschnitte, aufgezählt.* Von Polemarchus aus Cyzikus, einem Freund des Eudoxus, lesen wir im Simplicius,** dass er ebenfalls sich mit den homocentrischen Sphären beschäftigte, die er wahrscheinlich durch directe Mittheilung von ihrem Erfinder kennen gelernt hatte. Callippus, der berühmteste und fähigste Astronom seiner Zeit, war ein Studiengenosse und wahrscheinlich auch ein Schüler des Polemarchus. Obgleich Callippus in Cyzikus geboren wurde, so war er doch vielleicht zu jung, um von der Schule, welche Eudoxus dort errichtet hatte, Nutzen ziehen zu können,*** und es scheint, dass er durch Polemarchus in den Theorien dieses Astronomen unterrichtet wurde. Wie dem aber auch sei, nachdem er und Polemarchus sich überzeugt hatten, dass die eudoxischen Hypothesen nicht in allen Theilen durch die Beobachtungen bestätigt wurden (wie der Leser aus dem vorigen Abschnitt ersehen haben wird), so scheinen sie auf den Gedanken gekommen zu sein, dieselben zu verbessern und zu vervollkommnen; und um von dem Wissen des Aristoteles, welcher schon damals für den ersten griechischen Philosophen nach dem Tode Plato's galt, Nutzen ziehen zu können, begaben sie sich mit einander nach Athen, wo Aristoteles lehrte. Es ist wahrscheinlich, dass sich dieses während des zweiten Aufenthalts des Aristoteles in Athen zutrug, also von 336 bis 323 (nach der Angabe Grote's),† während Callippus in der Blüthe seines Lebens stand und zu der Zeit, als er seinen berühmten, nach ihm benannten lunisolaren Cyklus aufstellte.†† Dem Aristoteles gefielen die Sphären des Eudoxus sehr, weil sie mit seinen cosmologischen Ideen gut übereinstimmten und ihm erlaubten, das Alles bewegende Princip ausserhalb des Universums anzubringen, im Gegensatz zu den Pythagoräern, welche es in dem Centrum annahmen. Ueber das Re-

---

* *Theonis Smyrnaei Astronomia ed. Martin,* p. 332.

** S. Anhang II, § 7 und 15.

*** Anhang II, § 7. Callippus lebte wahrscheinlich zwischen 370 und 300 v. Chr.

† Grote, Aristoteles, p. 9—10 des ersten Buches.

†† Die erste Callippische Periode fing mit dem Jahr 330 an.

sultat dieser Art von astronomischem Congress haben wir nur lückenhafte Nachrichten. Das unmittelbarste und dauerhafteste Ergebniss war, dass die Sphären des Eudoxus für die Folge als die Basis der Lehren der Peripatetiker über die Bewegungen am Himmel aufgestellt wurden. Diese Basis wurde zwar in jenen Schulen später modificirt, aber nie ganz aufgegeben. Von Callippus ist sicher, dass er die Theorien des Eudoxus in verschiedenen Theilen verbesserte und berichtigte; es ist aber nicht leicht zu entscheiden, ob allein, nach den Resultaten seiner eigenen Studien, oder unter der Mitwirkung des Aristoteles und Polemarchus. Die erstere Annahme scheint jedoch wahrscheinlicher, wie aus den Worten, mit denen Aristoteles über die im System des Eudoxus angebrachten Modificationen berichtet, hervorgeht; denn er schreibt diese ausschliesslich dem Callippus zu.* Aber über diese Reform hinterliess Callippus keine Schrift; einige Kenntnisse davon verdanken wir, wie ich eben sagte, dem Aristoteles und einige wenige kommen uns von Eudemus, durch Uebermittlung des Sosigenes und Simplicius, welche schon in anderer Hinsicht sich als sicher erwies. Eudemus, ein Zeitgenosse und Freund des Aristoteles, konnte bei der Ausarbeitung seiner Geschichte der Astronomie von Aristoteles (wenn nicht vielleicht von Callippus selbst) die kurzen, aber deutlichen Bemerkungen über die Arbeiten des Callippus in dieser Richtung erhalten haben. Leider war Simplicius nicht sehr freigebig in seinen dem Sosigenes entnommenen Mittheilungen und im Ganzen bleibt uns das System des Callippus weniger genau bekannt als das des Eudoxus. Ich will nun das Wenige, was über die Reformen des Callippus gesagt werden kann, auseinandersetzen und nacheinander die verschiedenen Himmelskörper vornehmen, auf welche diese Reformen angewandt wurden.

1. Jupiter und Saturn. Wir haben gesehen, dass für diese beiden Planeten die Hypothesen des Eudoxus sich ziemlich gut den Phänomenen anpassten. Aristoteles berichtet uns, dass Callippus für dieselben die nämliche Anordnung und die gleiche Anzahl, welche Eudoxus angenommen hatte, für diese beiden Planeten beibehielt. Es scheint also, dass Callippus für diese die Hypothesen des Eudoxus für genügend betrachtete; und man kann schliessen, dass die zodiakale Ungleichheit derselben ihm noch unbekannt blieb, wenn sie auch in ihrem grössten Werth bis auf 6^0 anwächst, sowohl bei dem einen wie bei dem andern dieser beiden Planeten. Wir müssen auch schliessen, dass er ihre Breitenabweichungen für nicht bestehend betrachtete, oder dass er glaubte, sie vernachlässigen zu können.

2. Mars. Die bedeutenden Fehler, welche die Theorie des Eudoxus bei diesem Planeten zeigte, erforderten eine geeignete Verbesserung, und Callippus glaubte, dass die Hinzufügung einer einzigen Sphäre zu denen

* S. Anhang I.

des Eudoxus für diesen Zweck genüge. Es ist offenbar, dass diese hinzugefügte Sphäre weder auf die tägliche Bewegung, noch auf die Bewegung im Thierkreis einen Einfluss haben sollte, sondern auf die synodische Bewegung, für welche die zwei Sphären des Eudoxus durchaus keinen Rücklauf hervorbringen konnten, wenigstens wenn man keinen groben Irrthum bezüglich der Dauer des synodischen Umlaufs begehen wollte. Nun aber ist sicher, dass man durch Beibehaltung der genauen Zeit für diesen Umlauf, d. i. 780 Tage, mittels Combination von drei Sphären einen Rücklauf für den Planeten erhalten kann, in dem Mass, als es zur Uebereinstimmung mit den Beobachtungen nothwendig ist, und zwar auf verschiedene Arten und ohne zu bedeutende Digressionen nach der Breite zu erhalten. Die einfachste Art, welche zugleich am besten die natürlichen Grenzen der Breite beibehält, ist folgende. Es sei (Fig. 19) AOB die Ekliptik, A und B zwei entgegengesetzte Punkte derselben, welche ihren ganzen Umfang während der Zeit des zodiakalen Umlaufs beschreiben. Um diese Punkte lasse man eine erste Sphäre in der Zeit des synodischen Umlaufs rotiren. Einen beliebigen Punkt P_1 auf dem Aequator dieser Sphäre nehme man als Pol einer zweiten an, welche doppelt so schnell als die erste, aber in entgegengesetzter Richtung mit derselben sich dreht und den Pol P_2, welcher um den Bogen $P_1 P_2$ (den wir Inclination heissen wollen) von P_1 absteht, mit sich führt. Um den Pol P_2 drehe sich im entgegengesetzten Sinn mit der zweiten Sphäre, aber in gleichem Sinn und in gleicher Zeitdauer mit der ersten, eine dritte Sphäre, auf deren Aequator der Planet M befestigt sei. Es ist leicht zu begreifen, dass, wenn am Anfang der Zeit die drei Punkte $P_1 P_2 M$ auf der Ekliptik in der Reihenfolge $AP_2 P_1 MB$ liegen, nach irgend einer Zeit der Winkel φ bei A dem Winkel bei P_2 gleich, und der Winkel bei P_1 das Doppelte dieses Winkels betragen wird. Und da $AP_1 = MP_2 = 90^0$ ist, so wird der Planet M längs der Ekliptik und symmetrisch zu derselben eine Curve beschreiben, welche je nach dem Werth, den man der Inclination $P_1 P_2$ beilegt, ihre Form ändern wird. Diese Curve wird bei gewissen Werthen der Inclination sich sehr in die Länge und wenig nach der Breite erstrecken, und da sie im Punkt O in der Mitte zwischen den Polen A und B ihr Centrum hat, so wird sie ganz analog der Hippopede eine directe und retrograde Längenbewegung hervorbringen, sie wird aber vor der Hippopede den Vorzug haben, dem Planeten in der Nähe von O eine viel grössere directe und rückläufige Bewegung bei derselben Breitenbewegung geben zu können. Es ist deshalb möglich, den Planeten auch in denjenigen Fällen rückläufig machen zu können, wo sich die Hippopede des Eudoxus ungenügend zu diesem Zweck erweist.

Wenn wir zum Beispiel $P_1 P_2$ gleich einem Achtel des Kreisumfangs annehmen, so findet man für die vom Planeten beschriebene Curve eine

Form wie ungefähr in Fig. 19. Die grösste Digression nach der Breite übersteigt nicht $4^0\,11'$; die Curve hat auf der Ekliptik eine Länge von $95\frac{1}{3}^0$ und besitzt zwei dreifache Knotenpunkte gegen das Ende hin, deren jeder 45^0 vom Centrum entfernt ist. Während eines synodischen Umlaufs durchläuft der Planet vorwärts und rückwärts diese Curve vollständig und entfernt sich von seiner mittlern Position in O auf beiden Seiten um $47\frac{2}{3}^0$. Die Geschwindigkeit der directen und retrograden Bewegung nach der Länge ist, wenn sich der Planet im Centrum O befindet, 1,2929 der Geschwindigkeit des sich um die Axe AB bewegenden Poles P_1. Da aber die Dauer der Umdrehung von P_1 um AB der synodischen Umlaufszeit des Mars, d. i. 780 Tagen, gleich ist, so beträgt die synodische Bewegung von P_1 täglich $\frac{360^0}{780}$, also $0{,}462^0$; diese Zahl gibt mit 1,2929 multiplicirt $0{,}597^0$ für die tägliche Geschwindigkeit der retrograden synodischen Bewegung des Planeten auf der Curve bei O, und diese Geschwindigkeit wird von den drei Sphären der synodischen Bewegung hervorgebracht. Aber weil der Punkt O wegen der Sphäre der zodiakalen Bewegung auf der Ekliptik sich direct täglich um $0{,}525^0$ weiter bewegt,* so wird folglich der Planet in rückläufiger Bewegung entgegengesetzt der Ordnung der Thierkreiszeichen täglich um $0{,}597^0 - 0{,}525^0$, d. i. $0{,}072^0$ fortrücken. Dieses genügt, um die Phänomene des Mars mit einer gewissen Annäherung darzustellen. Würde man die Inclination $P_1 P_2$ um etwas vergrössern, so erhielte man Resultate, die der Wahrheit noch näher kämen.

Bezüglich der Breitenbewegung erhält man hier auch kein besseres Resultat, als mit der Hippopede; auf jedem periodischen Umlauf erreicht der Planet viermal seine nördliche und viermal seine südliche Grenze (immer in der Breite $\pm 4^0 11'$) und durchschneidet achtmal die Ekliptik, nämlich zweimal im Curvencentrum O und dreimal in jedem der beiden Knotenpunkte. Aber ich muss hier nothwendigerweise hinzufügen, dass, obgleich dieses vielleicht die einfachste und folglich auch die wahrscheinlichste Lösung ist, welche Callippus über die Bewegungen des Mars durch Hinzufügung einer einzigen Sphäre möglicherweise gegeben haben kann, man doch nicht mit Gewissheit bestimmen kann, ob dieses wirklich auch die Lösung des Astronomen von Cyzikus ist, da sich Nichts in den alten Quellen findet, was uns über diesen Punkt Aufklärung verschaffen könnte.

3 Merkur und Venus. Wie beim Mars, so fügte Callippus auch beim Merkur und bei der Venus eine Sphäre hinzu, um dadurch die noch

---

* Nehmen wir die zodiakale Umlaufszeit des Mars zu 686 Tagen an, so ist die tägliche zodiakale Bewegung $= \frac{360^0}{686} = 0{,}525^0$.

unvollkommene Theorie, welche Eudoxus für diese beiden Planeten aufgestellt hatte, zu verbessern. Für die Venus erhält man eine etwas bessere Darstellung der Bewegungen durch Annahme des schon für den Mars angegebenen Mechanismus und durch Einführung der in Fig. 19 dargestellten Curve an Stelle der Hippopede des Eudoxus. Setzt man die Inclination gleich einem Achtel des Kreisumfangs und lässt das Centrum der Curve beständig mit der Sonne zusammenfallen, so erhält man als grösste Elongationen $47\frac{2}{3}{}^0$, welche sehr nahe an die Wahrheit kommen. Auch die Geschwindigkeit, womit Venus von der grössten östlichen Elongation zur westlichen übergeht, ist besser nachgeahmt: weil in der Curve Fig. 19 der Uebergang von einem dreifachen Knotenpunkt zum andern in dem vierten Theil der synodischen Umlaufszeit vor sich geht, im zweiten Viertel wird der entgegengesetzte Weg zurückgelegt, und die beiden noch übrigen Viertel sind zur sehr langsamen Beschreibung der kleinen Schleifen an beiden Enden, deren Länge ungefähr $2\frac{2}{3}{}^0$ beträgt, nothwendig. Dadurch erhält man jedoch für die Venus keine retrograde Bewegung in der untern Conjunction, auch kann man durch Annahme von anderen Combinationen der Sphären ebensowenig seinen Zweck erreichen.* Vielleicht war sowohl dem Callippus als auch dem Eudoxus die Existenz dieser retrograden Bewegung unbekannt.

Für den Merkur war schon die Theorie des Eudoxus ziemlich genau, und ohne Zweifel konnte durch Anwendung einer neuen Sphäre eine noch grössere Genauigkeit erzielt werden. Die Unsicherheit ist in diesem Fall gross, deshalb überlasse ich es Anderen, für diesen Fall einleuchtende und wahrscheinliche Annahmen zu machen, wenn dieses bei dem vollständigen Mangel von Andeutungen überhaupt möglich ist.

4. Die Sonne. Nach den Angaben des Eudemus hatte Callippus zwei Sphären bei der Theorie der Sonne hinzugefügt, um damit die hundert Jahre früher von Meton und Euktemon entdeckte Ungleichheit ihrer Längenbewegung darstellen zu können.** Diese Unregelmässigkeit machte sich den Astronomen jener Zeit durch die Ungleichheiten der vier Zeiträume bemerk-

* Da die synodische tägliche Bewegung der Venus im Mittel $\frac{360}{570} = 0{,}632^0$ nach Eudoxus beträgt, so kann man mit Hilfe des Mechanismus in Fig. 19 beim Planeten eine retrograde Bewegung von $0{,}632^0 \cdot 1{,}2929 = 0{,}817^0$ hervorbringen. Da aber die directe zodiakale Bewegung im Punkt O derjenigen der Sonne gleich ist, also täglich $0{,}986^0$ beträgt, so wird die resultirende Bewegung des Planeten noch direct sein und täglich $0{,}169^0$ betragen. Man kann wirklich durch gewisse Combinationen der Sphären eine rückläufige Bewegung hervorbringen, aber in allen von mir untersuchten Fällen ist dieser Rücklauf von unzulässigen Breitenbewegungen begleitet oder von unmöglichen Elongationen bezüglich der Sonne.

** S. Anhang II, § 7.

bar, in welche die Dauer eines Jahres durch den Eintritt der Sonne in die beiden Aequinoctien und die beiden Solstitien getheilt war. Glücklicherweise sind uns durch den schon mehrmals angeführten Papyrus des Eudoxus die Längen, welche Callippus diesen vier Zeiträumen beilegte, noch erhalten,* und dadurch gewinnen wir eine Vorstellung von der Sonnentheorie dieses Astronomen. Die Dauer dieser Zeiträume entnahm der Autor des Papyrus dem Parapegma oder dem meteorologischen Kalender des Callippus, und diese sind deshalb nur in einer ganzen Anzahl von Tagen ausgedrückt, was man nothwendigerweise bei ihrer Untersuchung bedenken muss. Folgende Tafel giebt in der zweiten Reihe die Dauer dieser vier Zeitintervalle so, wie sie der Papyrus dem Callippus zuschreibt; in der dritten Reihe stehen diese vier Zeitintervalle, wie sie sich nach der heutigen Theorie** für das Jahr 330 v. Chr. ergeben, die vierte Reihe gibt die Fehler an, welche Callippus bei der Schätzung dieser vier Zeitintervalle machte. Die drei letzten Reihen geben dieselben Elemente nach der Sonnentheorie des Euktemon an, welcher um das Jahr 430 v. Chr. beobachtete; auch sie sind diesem Papyrus entnommen.***

Intervalle.	**Im Jahre 330,** nach Callippus.	der heutigen Theorie.	**Fehler** des Callippus.	**Im Jahre 430,** nach Euktemon.	der heutigen Theorie.	**Fehler** des Euktemon.
	Tage.	Tage.	Tage.	Tage.	Tage.	Tage.
Frühlingsäquinoctium – Sommersolstitium	94	94,17	— 0,17	93	94,23	— 1,23
Sommersolstitium – Herbstäquinoctium	92	92,08	— 0,08	90	92,01	— 2,01
Herbstäquinoctium – Wintersolstitium	89	88,57	+ 0,43	90	88,52	+ 1,48
Wintersolstitium – Frühlingsäquinoctium	90	90,44	— 0,44	92	90,50	+ 1,50

Diese Tafel zeigt auf den ersten Blick, welche Fortschritte in Griechenland die Beobachtung der Sonne von 430 bis 330 v. Chr. gemacht hatte. Die Fehler des Callippus erreichen in keinem Fall die Grösse von einem halben Tag, und folglich sind die von ihm im Parapegma angegebe-

* S. Böckh, über die vierjährigen Sonnenkreise der Alten, p. 46.

** Die nach dem jetzigen Standpunkt der Astronomie sich hierfür ergebenden Zahlen sind unter der Annahme berechnet, dass das Perigäum jedes Jahr um 61,7″ gegen die Aequinoctialpunkte vorrückt, und dass sich die Excentricität jedes Jahr um 4,24 Einheiten der siebenten Decimalstelle vermindert.

*** S. Böckh, Ueber die vierjährigen Sonnenkreise der Alten, p. 46.

nen Werthe so genau, als man sie überhaupt mit einer ganzen Anzahl von Tagen ausdrücken kann. Die Fehler des Euktemon dagegen steigen bis zu zwei ganzen Tagen. Es ist wichtig zu bedenken, dass diese Bestimmungen nicht zur Classe jener gehören, welche immer an Genauigkeit in dem Mass zunehmen, als die Beobachtungen durch Jahre und Jahrhunderte fortgesetzt werden, wo der Vortheil immer auf der Seite der neuesten ist (wie zum Beispiel bei der Bestimmung der mittleren Bewegungen). Das Studium der Ungleichheit der Sonnenbewegung zieht keinen Nutzen aus der Länge der darauf verwendeten Zeit, sondern verdankt nur der Genauigkeit der Beobachtungsmethoden seinen Fortschritt, und die Vergleichung der Resultate des Euktemon mit denen des Callippus zeigt, wie sehr letzterer die Arbeit des ersteren vervollkommnet hatte.

Es ist nicht der geringste Zweifel, dass, wenn wir die genaue Angabe der von Callippus durch seine Beobachtungen der Aequinoctien und Solstitien erlangten Resultate besässen, wir daraus Werthe für die Elemente der solaren Anomalie erhalten könnten, welche der Wahrheit sehr nahe kommen. Eudemus erzählt, dass Callippus zur Darstellung dieser Anomalie zwei Sphären anwandte, und man kann kaum zweifeln, dass der Mechanismus, den er benützte, um Rechenschaft von der abwechselnden Beschleunigung und Verzögerung der Sonnenbewegung zu geben, mit demjenigen identisch war, welchen Eudoxus anwandte, um die synodische Ungleichheit der Planeten darzustellen, welche, wenn sie auch viel merklicher als die Ungleichheit der Sonnenbewegung war, damals in ihren Wirkungen letzterer analog zu sein schien.

Mit Beibehaltung der drei Sphären des Eudoxus, sowohl der Ordnung als der Stellung nach,* hatte Callippus nichts weiter zu thun, als zwei Sphären hinzuzufügen, von denen die erste ihre Pole auf der dritten Sphäre des Eudoxus hatte, welche die Bahn der Sonne mit gleichförmiger Bewegung während der Dauer eines Jahres beschrieb; die zweite, auf welcher die Sonne sich befand, hatte ihre Pole auf der ersten, und ihre Axe war gegen die Axe der ersten etwas geneigt; sie hatte die gleiche Geschwindigkeit wie die erste, aber die entgegengesetzte Drehungsrichtung. Wenn man der Inclination einen der grössten Ungleichheit gleichen Werth ertheilt (welcher für Callippus wie für uns 2^0 beträgt), so ergibt sich für die Sonne durch diese beiden neuen Sphären eine Hippopede, deren Länge auf der Ekliptik 4^0 und deren Breite fast $1'$ auf beiden Seiten der Ekliptik beträgt. Die Genauigkeit, womit diese Hypothese die Bewegung der Sonne nach der

* Der Umstand, dass Callippus auch die dritte der Sonnensphären des Eudoxus beibehielt, zeigt, dass auch er die Nutation der Sonnenbahn um die fest liegende Ekliptik zugab. S. Abschnitt IV.

Länge ergibt, ist fast derjenigen gleich, welche man später mit Hilfe des excentrischen Kreises und des Epicykels erlangte, und der Fehler erreicht nur die Quadrate der Excentricität. Die Dauer des Sonnenjahres betrug nach Callippus ebenso wie nach Eudoxus $365\frac{1}{4}$ Tage, was sich aus der Betrachtung des Callippischen Cyklus ergibt, in welchem 76 Jahre genau gleich 27759 Tagen angenommen sind.*

5. Der Mond. Callippus verbesserte auch die Mondsbewegung sehr sorgfältig, welche er viel genauer als Meton kannte; man nahm an, dass die Periode des Callippus von 27759 Tagen genau 940 Lunationen enthalte, woraus sich für die Dauer einer Lunation 29 Tage 12 Stunden 44 Minuten und fast 13 Secunden ergeben, was die wirkliche Dauer derselben nur um 10 Secunden übersteigt. Callippus fügte zu den drei Mondsphären des Eudoxus noch zwei hinzu, welche (wenn wir das, was Simplicius darüber sagt, buchstäblich nehmen**) zur Erklärung der von Meton und Euktemon in der Sonnenbewegung entdeckten Ungleichheiten eingeführt wurden. Auf den ersten Blick könnte diese Verbesserung der Theorie eines Gestirns wegen der Ungleichheiten eines andern sonderbar scheinen; die Angabe des guten Peripatetikers könnte jedoch zufällig nicht ganz ohne Sinn sein; denn wenn zum Beispiel Callippus die eigentliche Anomalie des Mondes nicht gekannt und die Beibehaltung einer für alle Lunationen vollständig gleichen Zeitdauer für nothwendig gefunden hätte, so hätte für ihn dieses der Grund sein können, in die Längenbewegung des Monds eine der Sonnenbewegung vollständig gleiche Anomalie einzuführen. Mit mehr Wahrscheinlichkeit kann man jedoch annehmen, dass Simplicius der Kürze wegen seine auf die Sonne und den Mond bezüglichen Angaben zusammenfasste, vielleicht aus dem Grunde, weil Callippus für jedes dieser beiden Gestirne eine gleiche Anzahl von Sphären hinzugefügt hatte; und ich glaube mich der Wahrheit mehr zu nähern, wenn ich die Annahme mache, dass die Hinzufügung von zwei Sphären beim Mond eine Ursache hatte, welche der Hinzufügung derselben Anzahl von Sphären bei der Sonne nicht identisch, sondern analog war. Und diese Ursache war die Ungleichheit in der Längenbewegung des Monds, welche manchmal bis auf 8^0 anwachsen kann und sich bald bemerkbar machen musste, hauptsächlich wenn man die zwischen mehreren aufeinanderfolgenden Mondsfinsternissen liegenden Zeitintervalle untereinander und die entsprechenden Längen dieses Gestirns, welche in diesem Fall aus denen der Sonne sehr leicht abgeleitet werden können, verglich. Diese Ungleichheit konnte damals ziemlich gut durch zwei Sphären, welche den beiden für die Sonne hinzugefügten analog waren

* *Bailly, hist. de l'astr. ancienne, I, p. 249.*

** Anhang II, § 7.

und in entgegengesetzter Richtung um einander in der Dauer eines anomalistischen Monats rotirten,* dargestellt werden. Die Inclination würde in diesem Fall der grössten Anomalie des Monds gleich angenommen werden müssen, deren mittlerer Werth 6^0 beträgt; die Hippopede des Monds würde eine Länge von 12^0 erhalten, und da ihre grösste Abweichung von der Mondsbahn $9'$ nicht übersteigt, so geht daraus eine für die Breitenbewegung gänzlich unmerkliche Störung hervor. Also konnte man auch für den Mond durch diese Annahmen die Phänomene ebenso gut darstellen, als durch irgend eine andere Theorie vor der Entdeckung der Evection.

So viel kann man ohngefähr über die Verbesserungen, welche Callippus an den Hypothesen des Eudoxus anbrachte, behaupten, ohne Gefahr zu laufen, sich in leere Vermuthungen zu verlieren. Er hatte die damals bekannte Theorie mit dem Resultat der Beobachtungen verglichen, hatte Differenzen gefunden und war infolge dessen bemüht, diese Differenzen durch Verbesserung der früheren Hypothesen zu beseitigen. Dieser Fortschritt von ausschliesslich wissenschaftlicher Natur wird von denjenigen richtig gewürdigt werden, welche bei der Beurtheilung des Verdienstes jener alten Forscher die angewandte Methode, die den Untersuchungen ihren eigentlichen Charakter aufdrückt, von den Beobachtungsmitteln und Instrumenten zu unterscheiden wissen, welche Dinge untergeordneter Art sind. Eudoxus und Callippus hatten weder genaue Instrumente, noch die Hilfe der Trigonometrie. Mit Hilfe graphischer Constructionen und vielleicht auch jenes Zweiges der Mechanik, den die Griechen mit dem Namen σφαιροποιία bezeichneten und der damals viel nothwendiger und wichtiger als in unserer Zeit gewesen zu sein scheint,** gelang es ihnen, eine genaue Vorstellung von der durch Combination so vieler Sphären hervorgerufenen Bewegung zu erlangen und die Zusammenstellung dieser Sphären den Beobachtungen anzupassen. Es ist sicher, dass diese den Forderungen jener Zeit angepassten Mittel für alle Probleme der theoretischen und praktischen

* Damit will ich nicht behaupten, dass Callippus schon die Differenz zwischen dem anomalistischen und dem siderischen Monat, sowie die Bewegung der Apsiden der Monatsbahn kannte. Wenn man einerseits anführen kann, dass er ein fleissiger Beobachter des Mondes war, und dass sein Zeitgenosse und Landsmann Helikon sich mit der Vorherbestimmung der Finsternisse beschäftigte, so muss andererseits auch bemerkt werden, dass die Entdeckung der Bewegung der Apsiden viele Bedingungen erforderte, von denen wir nicht wissen, ob sie damals bei dem Astronomen von Cyzikus vereinigt waren. Dreissig oder vierzig Jahre früher kannte Eudoxus nicht einmal die Excentricität der Mondsbahn. Es ist also besser, die Frage unentschieden zu lassen.

** Bei den Alten nannte man σφαιροποιία (die Kunst Sphären zu construiren) jenen Zweig der Mechanik, welcher zum Gegenstand die materielle Nachahmung der Himmelsbewegungen hat. S. *Proclus, Comm. Eucl., p. 41, ed. Friedlein.*

Astronomie genügten und dass damals wirklich eine Astronomie ohne Trigonometrie bestand; trotz der Aeusserung, welche ein berühmter Geschichtsschreiber über unsere Wissenschaft aussprach, der in derselben nie etwas Anderes sehen mochte, als eine Gelegenheit zur Entwickelung einer Unzahl von trigonometrischen Formeln, und der dieses hübsche Kriterium zur Grundlage seiner Beurtheilung aller Astronomen des Alterthums, sowie der neueren Zeit machte.

VIII. Weitere Modificationen am System des Eudoxus.

Die Systeme des Eudoxus und Callippus waren, wie wir schon bemerkten, einfach geometrische Constructionen, welche zum Zweck der Beantwortung der von Plato vorgelegten Frage, „durch welche Annahmen von regelmässigen und geordneten Bewegungen sich die im Lauf der Planeten beobachteten Erscheinungen darstellen liessen“, erdacht wurden. Wie die Bewegungen dieser Sphären sich vollziehen, würden die Urheber des Systems nicht anzugeben gewusst haben, wahrscheinlich weil sie als Astronomen und Beobachter das Problem der Angabe der Ursachen als ausserhalb ihres Wirkungskreises liegend ansahen und meinten, dass dieses eher zur Physik gehöre. Dass sie die Urheber der festen krystallenen Sphären, über welche so viele wegwerfende Bemerkungen gemacht wurden, gewesen wären, ist eine Annahme, welche nicht die geringste historische Begründung für sich hat. Eudoxus und Callippus beschäftigten sich gar nicht mit der Aufgabe, die Bewegungen der verschiedenen Sphären unter sich zu verknüpfen; für sie bildeten die Sphären eines Planeten ein von den Sphären eines andern vollständig unabhängiges System, und zwar aus dem einfachen Grund, weil zur Erklärung der Bewegung eines jeden Planeten Hypothesen nothwendig waren, welche diesem allein angepasst und von den für die anderen geltenden Hypothesen vollständig unabhängig waren.

Das Problem, die ganze Reihe dieser Bewegungen zu einer systematischen Gesammtheit zu verknüpfen und die inneren Sphären von den äusseren abhängig zu machen, kam dem Aristoteles in den Sinn, welcher in einer solchen mechanischen Verbindung das Mittel sah, den Grundgedanken seiner kosmischen Dynamik zur Geltung zu bringen, nach welcher die das Weltall bewegende Kraft am Umfang wirken und sich von da bis zum Centrum fortpflanzen sollte. Zu diesem Zweck vereinigte er alle von Callippus angegebenen Sphären zu einem Ganzen; um jedoch die Mittheilung der Bewegungen der äusseren Gestirne auf die inneren zu verhüten, schaltete er nach der letzten und innersten Sphäre eines jeden Planeten, sowie vor der äussersten Sphäre des darauf folgenden inneren Planeten eine gewisse Anzahl von neuen Sphären ein, die er reagirende nannte. Die

Wirkungsweise derselben wurde von Sosigenes (s. Anhang II, §§ 8—13) ausführlich beschrieben. Man kann diese Beschreibung kurz in Folgendem zusammenfassen: es seien z. B. $ABCD$ die vier Sphären des Callippus für den Saturn, A die äusserste, D die innerste, auf welcher der Planet befestigt ist, und welche zugleich an den Bewegungen der andern theilnimmt. Wenn wir innerhalb der Sphäre D eine erste reagirende Sphäre D', die um die Pole von D mit gleicher, aber entgegengesetzter Geschwindigkeit rotirt, einführen, so werden die Umdrehungen von D und D' sich gegenseitig aufheben und jeder Punkt von D' wird sich so bewegen, als wenn er fest mit der Sphäre C verbunden wäre. Bringt man ferner innerhalb D' eine zweite reagirende Sphäre C' an, welche dieselben Pole wie C und mit dieser gleiche, aber entgegengesetzte Geschwindigkeit hat, so werden sich die Rotationen von C und C' gegenseitig aufheben und jeder Punkt auf C' wird sich so bewegen, als wenn er fest mit der Sphäre B verbunden wäre. Bringt man schliesslich innerhalb C' eine dritte reagirende Sphäre B' an, welche um dieselben Pole und mit gleicher Geschwindigkeit wie B, aber in entgegengesetzter Richtung rotirt, so werden sich die Umdrehungen von B und B' gegenseitig aufheben und jeder Punkt von B' wird sich so bewegen, als ob er fest mit der Sphäre A verbunden wäre. Aber da nach der Annahme die Sphäre A die Bewegung des Fixsternhimmels hat, so wird sich auch B' wie dieser bewegen; und folglich wird sich die Sphäre des Jupiter innerhalb B' so bewegen können, als ob alle Sphären des Saturn nicht bestünden und als ob B' selbst die Sphäre der Fixsterne wäre.

Hieraus ist klar, dass, wenn n die Anzahl der deferirenden Sphären eines Planeten ist, die Hinzufügung von $n-1$ reagirenden die Wirkung von ebenso vielen der ersten Gattung aufhebt und verhindert, dass die inneren Sphären von den Bewegungen der äusseren gestört werden. Und ebenso leuchtet ein, dass für den Mond, als den letzten der Planeten, keine reagirenden Sphären nothwendig sind. Die Anzahl der von Aristoteles zufolge der Hypothesen des Callippus angenommenen Sphären, sowohl der deferirenden als der reagirenden, ist folgende:

	deferirende	reagirende
für Saturn	4	3
„ Jupiter	4	3
„ Mars	5	4
„ Merkur	5	4
„ Venus	5	4
„ Sonne	5	4
„ Mond	5	0
Summe	33	22

Die Gesammtzahl beträgt 55, wie auch Aristoteles angibt. Es scheint jedoch, dass Aristoteles die Sache etwas oberflächlich nahm, weil in dieser Zahl sechs Sphären überflüssig sind. Denn weil die letzte reagirende Sphäre des Saturn dieselbe Bewegung wie der Fixsternhimmel hat und die erste deferirende des Jupiter nach Callippus sich ebenfalls wie der Fixsternhimmel bewegt, so können diese beiden Sphären als eine einzige betrachtet werden, da sie unmittelbar aufeinander folgen und dieselbe Bewegung um dieselben Pole haben. Ebenso kann die letzte reagirende des Jupiter und die erste deferirende des Mars als eine einzige Sphäre betrachtet werden; ebenso die letzte reagirende des Mars und die erste deferirende des Merkur u. s w. Noch einen andern Fehler scheint Aristoteles begangen zu haben, welchen zu rechtfertigen sich seine zahlreichen Commentatoren ohne Erfolg viele Mühe gegeben haben. Es sagt nämlich der Stagirite, dass, wenn man bei der Sonne und beim Mond die beiden von Callippus eingeführten Sphären nicht hinzunimmt, sich die Gesammtzahl der deferirenden und reagirenden Sphären auf 47 reducirt. Nun aber beträgt die wirkliche Zahl, wie leicht zu sehen ist, in diesem Fall 49. Man sehe im Anhang II, was Sosigenes und Simplicius über diesen Punkt sagen.

Ueber das, was nach Callippus und Aristoteles bezüglich des Systems der homocentrischen Sphären geschah, haben wir nur sehr wenige Nachrichten. Theophrast beschäftigte sich damit, und wir finden ihn deshalb zweimal erwähnt.* Eudemus kannte es und wusste auch die Gründe für die von Callippus eingeführten Aenderungen anzugeben. Ihm verdanken wir vor allen Anderen unsere Kenntnisse über die homocentrischen Sphären. Welche weitere Verbesserungen in den peripatetischen Schulen daran angebracht wurden, können wir unmöglich wissen. Durch Simplicius jedoch erfahren wir, dass schon von Anfang an ein gefürchteter Einwurf, welcher das System unzulässig machen musste, entgegen gehalten wurde, nämlich jener, welcher von dem Wechsel des Glanzes der Planeten, hauptsächlich des Mars und der Venus, hergenommen ist, und der uns zur Annahme einer Veränderung ihrer Entfernungen von der Erde zwingt, was mit der Concentricität aller Sphären bezüglich des Erdmittelpunkts unvereinbar ist. Auf diesen Einwurf hatte schon Polemarchus, eines der Mitglieder der in Athen gehaltenen astronomischen Versammlung, antworten müssen. Diese Schwierigkeiten wuchsen und wurden unübersteiglich mit der Entdeckung der Veränderung der scheinbaren Durchmesser der Sonne und des Mondes; und Sosigenes, obgleich selbst Peripatetiker, scheint dadurch, dass er diese Veränderung zeigte, nicht wenig zum Sturz dieses Systems beigetragen zu haben. Sosigenes hat ausser demjenigen, was er in seinem Commentar

---

* S. Anhang II, §§ 2 und 13.

zum Werk des Aristoteles *de coelo* hierüber bemerkt, ein Werk περὶ τῶν ἀνελιττουσῶν geschrieben, welches ausschliesslich von den homocentrischen Sphären handelt. Die einzige Stelle, welche wir aus diesem Werk noch haben,* betrifft gerade die Durchmesser der Sonne und des Mondes, und wir können wahrscheinlich aus derselben schliessen, dass sie auf die Widerlegung der Hypothesen des Eudoxus zielte und beweisen sollte, dass dieselben den Beobachtungen nicht genügen.

Unter die Astronomen, welche den Lauf der Himmelskörper durch die homocentrischen Sphären zu erklären versuchten, ist auch Autolycus zu zählen, der Autor zweier bekannten, jetzt noch existirenden Werkchen über die elementarsten Begriffe der täglichen Bewegung, sowie des Auf- und Untergangs der Gestirne in den Sonnenstrahlen.** Leider gibt uns das, was Sosigenes über die Versuche des Autolycus zur Erklärung der Veränderung der Lichtstärke der Planeten sagt, keine positive Aufklärung und erlaubt uns auch nicht zu behaupten, dass seine Hypothesen denen des Eudoxus und Callippus analog waren (s. Anhang II, § 14). Uns bleibt Nichts weiter übrig, als den Namen des Autolycus denjenigen Griechen beizufügen, welche vor Hipparch sich damit beschäftigten, eine den Phänomenen angemessene Theorie des Universums aufzustellen.

Bei der Betrachtung der kosmischen Systeme der Griechen, in dem Zeitraum zwischen Eudoxus und Hipparch (360 bis 125), finden wir die Meinungen in viele Parteien gespalten. Denn während die letzten Pythagoräer sich zum System der beweglichen excentrischen Kreise*** bekannten, wusste Heraklides Ponticus schon, dass es möglich wäre, die Phänomene auf die Weise zu erklären, welche später von Copernicus angenommen wurde, und Aristarch hatte dieselbe Hypothese aufgestellt. Andere fingen an, die Theorie der Epicykeln auszubilden, und unter diesen sind Apollo-

---

* *Procli hypot. ed. Halma, p. 111.* Man sehe auch Anmerk. * pag. 196.

** Besprochen von Delambre, *Astr. ancienne I, p. 19—48.*

*** Das System der von den Geschichtsschreibern der Astronomie erwähnten excentrischen beweglichen Kreise findet man bei verschiedenen alten Autoren, nämlich bei Geminus, Nicomachus, Proclus und Theon von Smyrna, von denen der Letztere nach dem Muster des Peripatetikers Adrast die ausführlichste und genaueste Darlegung gibt. Dieses System ist eine Varietät des später nach Tycho benannten, und in ihm muss man die natürliche Stufe erkennen, welche einige Griechen zu den Ideen des Copernikus führte. Den Beweis hierfür gedenke ich bei einer andern Gelegenheit zu liefern. In meiner Arbeit „über die Vorläufer des Copernikus" nahm ich Veranlassung, auf eine Lücke im Ideengang aufmerksam zu machen, welcher den Aristarch und Andere, die vor ihm lebten, zur Annahme des heliocentrischen Systems führte. Später erkannte ich, dass diese Lücke durch das System der excentrischen beweglichen Kreise, dem ich damals nicht die gebührende Aufmerksamkeit geschenkt hatte, ausgefüllt ist.

nius von Perga und nach Apollonius Hipparch zu nennen. Trotz dieser Verschiedenheit der Ansichten scheinen die Sphären des Eudoxus bis zu den Zeiten des Archimedes, also bis zum Ende des dritten Jahrhunderts v. Chr., den Vorrang behauptet zu haben, nicht nur in den aristotelischen Schulen, sondern auch bei den Astronomen. Zu diesem Schluss veranlassen mich einige Worte des Archimedes im Arenarius, welche man bis jetzt nicht viel beachtet zu haben scheint: „Der grösste Theil der Astronomen", sagt er, „pflegt unter dem Wort Welt eine Kugel zu verstehen, deren Mittelpunkt das Centrum der Erde, und deren Halbmesser die Verbindungslinie des Centrums der Sonne mit dem Centrum der Erde ist."* Diese Astronomen, nach welchen die Sonne an dem Ende der Welt stand, konnten sicherlich weder die Pythagoräer mit ihren beweglichen excentrischen Kreisen, noch Apollonius mit seinen Epicykeln, noch Aristarch sein. Aber es konnten gerade die Vertreter der Sphären des Eudoxus und Callippus darunter verstanden werden, weil Eudoxus nur Kenntniss von den Entfernungen des Mondes und der Sonne hatte und wusste, dass letztere ungefähr neunmal weiter als der erstere entfernt sei. Ueber die Entfernungen der anderen Planeten (welche zu jener Zeit allgemein über die Sonne hinaus versetzt wurden) gab es keine bestimmten Annahmen, und es ist wahrscheinlich, dass man, um nicht nutzlose Intervalle einzuführen, die Bewegenden Sphären der Planeten sehr nahe an einander oder unter einander zusammenfallend annahm und sie etwas jenseits der Sonne, jedoch sehr nahe an die Begrenzungssphäre der Welt, d. i. an die Sphäre der Fixsterne versetzte, weil die fünf Planeten sich nur durch die Verschiedenheit ihrer Bewegungen von den Fixsternen unterschieden. Auch kann man die allgemeine Verbreitung, welche Archimedes dieser von ihm berichteten Ansicht zuschreibt, zu einer Zeit, in welcher die peripatetischen Schulen im grössten Ansehen standen, auf Nichts besser beziehen, als auf die Lehre von den homocentrischen Sphären.

Wenn man nun diese Ueberlegung mit dem zusammenhält, was die alten Schriftsteller uns über die von Archimedes künstlich verfertigten Sphären erzählen, so könnte man vielleicht mit einem Anschein von Wahrscheinlichkeit den Schluss ziehen, dass diese künstlichen Sphären nach den Grundsätzen des eudoxischen und callippischen Systems construirt worden sind. Dieses System war in der That damals in seinen Theilen hinreichend ausgearbeitet, um in seiner Wirkungsweise durch einen Mechanismus nachgeahmt werden zu können, was man nicht in gleicher Weise von den anderen, in den Schulen weniger verbreiteten Systemen sagen kann. Ausserdem ist zu bemerken, dass das System der homocentrischen Sphären wegen

* Die Sandrechnung des Archimedes, in der Ausgabe von Torelli, p. 319.

seiner eleganten Symmetrie sehr geeignet war, um durch die Kunst der σφαιροποιία mittelst sinnreicher und einfacher Mechanismen dargestellt zu werden, wie Jedermann, der etwas über den Bau dieses Systems nachgedacht hat, leicht erkennen kann. Das sind jedoch nur Vermuthungen, welche ich zur Anregung weiterer Forschungen anführe.

Als später der Wechsel der Helligkeit bei Mars und Venus, und die Auffindung der Aenderung der scheinbaren Durchmesser bei der Sonne und beim Mond die Vermeidung der Unregelmässigkeit und der Asymmetrie, welche aus den excentrischen Bewegungen entsteht, ganz unmöglich gemacht hatten, musste der interessante geometrische Theil des Systems der Sphären der überzeugenden Kraft der Phänomene weichen, und es begann der Sieg der Epicykeln. Die aristotelischen Schulen hatten damals der Sprache der Natur noch nicht Auge und Ohr verschlossen, und ihre Dogmen waren noch keine starren Nachahmungen des Stagiriten und seiner Ausleger. Wir sehen deshalb, dass Sosigenes selbst, einer der Peripatetiker, die Unzulässigkeit der genauen Symmetrie des Weltalls in Bezug auf seinen Mittelpunkt schliesslich erkennt, und wir sehen, dass später dasselbe Bekenntniss mit derselben Aufrichtigkeit von Simplicius abgelegt wird. Indem diese edlen Philosophen die Wahrheit, welche sich ihnen bei den empirischen Beobachtungen darbot, annahmen (ein Beispiel, das von den Häuptern gewisser moderner Schulen nur zu wenig Nachahmung fand), bestrebten sie sich, die Folgerungen, welche sich aus den Grundprincipien ihrer Lehren ergaben, damit in Uebereinstimmung zu bringen. Aus diesem Bestreben ging eine Umänderung des Systems der Sphären dadurch hervor, dass der Epicykel in Gestalt einer kleineren zwischen die grösseren Sphären eingeschalteten Sphäre eingeführt wurde. Es sei in Fig. 21 O das Centrum der Welt, $JLKM$ ein deferirender Kreis, J das Centrum eines Epicykels; ferner beschreibe man mit den Radien OB und OA um O die beiden Sphären $BDCE$ und $AFHG$, und betrachte die zwischen diesen liegende Kugelschichte als Sphäre des Planeten; man nehme alsdann an, dass der Aequator der kleinen zwischen dieser Kugelschicht befindlichen Sphäre AB der Epicykel sei und dass sich auf diesem Aequator der Planet befindet, so ist klar, dass die gleichzeitige Rotation der Kugelschicht um die Axe des Kreises $JKLM$ und der kleineren Sphäre um die Axe des Epicykels J dieselbe Wirkung hervorbringen wird, als die Bewegung des Epicykels auf dem deferirenden Kreis und des Planeten auf dem Epicykel. Das ist das System der körperlichen Sphären, welches zum Beispiel von dem Peripatetiker Adrast beschrieben wird, von welchem Theon von Smyrna in seinem Buch über die Astronomie Auszüge gegeben hat und welches dann von vielen späteren Schriftstellern bis zum Ende des siebzehnten Jahrhunderts mit oder ohne Modificationen wiederholt wurde. Diese Construction konnte

vielleicht noch bis zu einem gewissen Punkt den kosmologischen Ansichten der Aristoteliker entsprechen und kann in diesem Sinn als ein Zweig des homocentrischen Systems betrachtet werden. Aber genau genommen entsagte man von dem Augenblick an dem homocentrischen System gänzlich, in welchem eine einzige bezüglich des Centrums der Welt excentrische Bewegung im Universum zugelassen wurde; und die körperlichen Sphären sind eher eine Verkleidung der Epicykeln, als eine Nachkommenschaft der Lehren des Eudoxus. Die wirkliche homocentrische Lehre findet sich indess noch bei dem Araber Alpetragius, bei Hieronymus Fracastor und bei dem Cosentiner G. B. Amici,* von denen der Erste im zwölften, die beiden Letzteren dagegen im sechzehnten Jahrhundert die Bewegungen am Himmel mittelst concentrischer Sphären wiederum zu erklären versuchten, indem sie die excentrischen Kreise und die epicyklische Bewegung verwarfen Aber diese späten Früchte gehören nicht mehr zur organischen Entwickelung der Wissenschaft und bilden keinen wesentlichen Bestandtheil ihrer Geschichte. Ich beschliesse deshalb hiermit meine Forschungen, und es würde mich freuen, wenn der Leser dieser Abhandlung einen kleinen Theil des Vergnügens empfand, welches mir die Bearbeitung derselben gewährte.

Anhang I.

Auszug aus dem 12. Buch der Metaphysik des Aristoteles, Cap. 8.**

Eudoxus nahm an, dass die Sonne und der Mond von je drei Sphären bewegt würden, von denen die erste diejenige ist, welche sich wie die Fixsterne bewegt; die zweite bewegt sich nach dem Kreis, welcher durch die Mitte des Thierkreises geht, die dritte nach einem schief in die Breite der Zone des Zodiakus gestellten Kreis. Von diesen schiefen Kreisen hat derjenige, nach welchem sich der Mond bewegt, eine grössere Neigung nach Breite als der, in dem sich die Sonne bewegt. (Und er sagt), die Planeten seien von je vier Sphären getragen, von denen die erste und zweite dieselben sind als die für die Sonne und den Mond, da diejenige der Fix-

* *Joannis Baptistae Amici Consentini de motibus corporum coelestium iuxta principia peripatetica sine excentricis et epicyclis. Venetiis MDXXXVI.* Dieses ist ein wirklich geistvolles Werkchen und steht hoch über den vielgerühmten homocentrischen Sphären Fracastor's, welche noch Niemand verstanden hat.

** *Aristoteles, Graece ex recensione Immanuelis Bekkeri edidit Academia Regia Borussica. Tom II, pag. 1073—1074. Berolini 1831.*

sterne allen zugehört, und die darauffolgende, welche die Bewegung längs des Thierkreises hervorbringt, allen gemeinsam ist. Und die Pole der dritten befänden sich für alle auf dem mittlern Kreis der Zeichen; die Bewegung der vierten gehe sodann nach einem zur Mitte der vorhergehenden schiefen Kreis vor sich.* Die Pole der dritten Sphäre seien verschieden für einige Planeten, identisch für Aphrodite und Hermes.

Callippus nahm dieselbe Anordnung der Sphären wie Eudoxus an, das ist dieselbe Reihenfolge (der verschiedenen Sphären eines und desselben Gestirns), und gab für Jupiter und Kronos dieselbe Anzahl (von Sphären, wie Eudoxus) an; aber bei der Sonne und beim Mond, meinte er, müsse man noch je zwei Sphären hinzufügen, um von den Erscheinungen Rechenschaft zu geben, für die übrigen Planeten je eine.

Damit man aber durch gleichzeitige Combination aller (Sphären) von den Erscheinungen Rechenschaft geben könne, ist es nothwendig, dass für jeden Planeten (ausser den vorigen) ebenso viele reagirende** Sphären, weniger eine, angenommen werden, welche die erste Sphäre des unmittelbar darauf folgenden Gestirns immer in dieselbe Stellung zurückführen, weil es nur auf diese Weise möglich ist, dass sich die Bewegungen der Planeten vollziehen können. Da nun die Anzahl der Sphären, welche sich bewegen, einerseits 8 und andererseits 25 ist,*** so werden von diesen nur diejenigen nicht zurückgedreht werden müssen, von welchen die Bewegung des untersten aller (dieser Gestirne) abhängt.† Für die beiden ersten (Gestirne) werden also 6 reagirende (Sphären) bestehen, und für die vier folgenden 16; die Gesammtzahl der bewegenden und reagirenden Sphären wird also 55 betragen. Wenn man bei der Sonne und beim Mond die Bewegungen, von denen wir sprachen, nicht hinzufügt, wird die Gesammtzahl der Sphären 47 betragen.††

---

* Hierunter ist ohne Zweifel der Aequator der vorhergehenden Sphäre zu verstehen.

** *ἀνελιττούσας*, d. h. im entgegengesetzten Sinne sich drehend. Derselbe Ausdruck findet sich bei den Späteren, wie bei Sosigenes und Simplicius, in weiterem Sinne genommen, und bedeutet alle Sphären des Systems, sowohl deferirende als reagirende; in diesem Sinn haben wir dasselbe Wort mit „revolvirend“ übersetzt.

*** Nämlich 8 für Jupiter und Kronos (von welchen jeder 4 Sphären nach Callippus hat) und 25 für die anderen 5 Sterne (von denen jeder nach Callippus 5 Sphären hat).

† Nämlich des Mondes.

†† Diese Zahl stand schon in den alten Büchern, nach dem Zeugniss des Sosigenes, Simplicius, Alexander und Porphyrius, in deren Commentaren zum Aristoteles. S. hierüber Anhang II, § 12.

Anhang II.

Auszug aus dem Commentar des Simplicius zum zweiten Buch des Aristoteles *de coelo*.*

1. Man sagt, dass bei den Griechen zuerst Eudoxus von Cnidus (wie Eudemus im zweiten Buch der Geschichte der Astronomie erzählte, und auf dessen Autorität hin Sosigenes) mittelst ähnlicher Hypothesen die Lösung des (nach Sosigenes Erzählung) von Plato den mit diesen Dingen sich Beschäftigenden vorgelegten Problems versucht habe; nämlich: durch welche Annahme von regelmässigen und geordneten Bewegungen die in den Bewegungen der Planeten beobachteten Erscheinungen dargestellt werden könnten.... Eudoxus benützte zu diesem Zweck die Hypothese der revolvirenden Sphären.**

2. Dem Eudoxus also und seinen Vorgängern schien die Sonne drei Bewegungen zu haben, nämlich erstens die mit den Fixsternen gemeinsame Umdrehung von Osten nach Westen, zweitens die in entgegengesetzter Richtung mit der Ordnung der zwölf Zeichen vor sich gehende Bewegung, und drittens eine zum mittlern Kreis des Zodiakus seitliche Bewegung; das Letztere wurde daraus geschlossen, dass die Sonne in den Sommer- und Wintersolstitien nicht immer an demselben Ort aufgeht.*** Deshalb nahm Eudoxus an, sie werde von drei Sphären getragen, welche Theophrast *ἀνάστρους* (ungestirnte) nennt, weil jede, ohne einen Stern zu tragen, mit

* Brandis, *scholia in Aristotelem edidit Academia Regia Borussica (Berolini 1836), p. 498—504; Simplicii Commentarius in IV libros Aristotelis de coelo, ex recensione Sim. Karstenii, mandato regiae academiae disciplinarum Nederlandicae editus (Trajecti ad Rhenum 1865), p. 219—229.* Ich habe keinen Vergleich angestellt mit der aldinischen Ausgabe vom Jahre 1526, trotz der bedeutenden Differenzen, welche sie mit den späteren Ausgaben hat. Denn es ist seit dem Jahr 1810 durch die Untersuchungen des Amedäus Peyron bekannt, dass die Aldina kein Originaltext ist, sondern eine griechische Zurückübersetzung eines früheren lateinischen Textes. S. Peyron, *Empedoclis et Parmenidis fragmenta ex codice Taur. restituita et illustrata, Lipsiae 1810, p. 3—26.* Einige Stellen habe ich mit dem Codex des Simplicius, der sich in der Bibliothek der königl. Universität zu Turin befindet, vergleichen lassen.

** *ἀνελιττουσῶν* ist das Wort, womit man häufig die Sphären des Eudoxus von Schriftstellern, die nach ihm lebten, bezeichnet findet. In dieser Abhandlung vermied ich diese Bezeichnung, weil sie zweideutig ist, indem Aristoteles (s. Anhang I) mit demselben Namen jene Classe der von ihm hinzugefügten Sphären bezeichnete, welche zur Aufhebung der Bewegungen der anderen dienten. Wir werden immer die bewegenden Sphären als „deferirende" bezeichnen, dagegen die von Aristoteles hinzugefügten als „restituirende oder reagirende"; mit dem Namen „homocentrisch oder revolvirend" werden wir beide Arten bezeichnen.

*** Natürl.: des Horizontes.

den unteren verbunden ist und von den oberen im Kreis herumbewegt wird. Da die Sonne drei Bewegungen hat, so war es unmöglich, sie nach entgegengesetzten Richtungen durch eine einzige Sphäre zu bewegen, da weder die Sonne, noch der Mond, noch die anderen Planeten sich selbst frei bewegen, sondern alle, auf einem kreisförmigen Körper befestigt, in Umschwung versetzt werden. Wenn wirklich der Umlauf nach der Länge in derselben Zeit vor sich ginge als die grösste Abweichung nach der Breite, so wären zwei Sphären hinreichend, eine für die Bewegung im Sinn der Umdrehung des Fixsternhimmels von Osten nach Westen, und eine zweite, welche sich um eine Axe dreht, die in der ersten Sphäre, senkrecht zum schiefen Kreis, welchen die Sonne zu beschreiben schiene, befestigt ist. Da aber die Sache sich nicht so verhält und dieser Kreis in einer Zeit beschrieben wird, verschieden von der, welche zur Rückkehr bis zu derselben Breite nothwendig ist, so muss man noch eine dritte Sphäre zu Hilfe nehmen, damit jede der beobachteten Erscheinungen eine entsprechende Bewegung habe. Eudoxus nahm nun an, dass von diesen drei unter sich und zum Universum concentrischen Sphären die äusserste sich um die Pole der Welt in demselben Sinn wie der Fixsternhimmel dreht und diese Umdrehung in derselben Zeit vollführt; dass die zweite, welche kleiner als die erste und grösser als die dritte ist, sich von Westen nach Osten um eine Axe dreht, die, wie wir schon anführten, senkrecht zu dem durch die Mitte des Zodiakus gelegten Kreis steht; und dass die dritte, die kleinste von allen, ebenfalls in demselben Sinn wie die zweite sich dreht, aber um eine andere Axe, die man sich senkrecht zur Ebene eines gewissen grössten schiefen Kreises zu denken hat, welchen die Sonne mit ihrem eigenen Centrum beschreibt, getragen von der kleinsten aller dieser Sphären, in welcher sie befestigt ist. Und die durch diese Sphäre hervorgerufene Verzögerung nimmt Eudoxus bei weitem langsamer an als die, welche durch diejenige Sphäre hervorgerufen wird, die die dritte Sphäre umschliesst, und die nach Stellung und Grösse die mittlere ist, was aus der von ihm über die Geschwindigkeiten (*περὶ ταχῶν*) geschriebenen Abhandlung hervorgeht. Nun aber bewegt die grössere der drei Sphären, bei ihrer die Fixsterne begleitenden Umdrehung, auch die anderen beiden, weil sich auf ihr die Pole der zweiten befinden, und weil die zweite Sphäre die Pole der dritten trägt, auf der die Sonne befestigt ist. Da ähnlicher Weise die zweite die Pole der dritten Sphäre in sich hat, so wird sie diese mit eigener Bewegung zur Umdrehung veranlassen, und damit auch die Sonne; deshalb scheint sich dieselbe von Ost nach West zu drehen. Wenn die mittlere* und die kleinste Sphäre für sich

* Ich lese *μέση* mit Brandis Karsten hat *μεγίστη*, was offenbar falsch ist.

selbst unbeweglich wären, so würde die Bewegung der Sonne genau auf dieselbe Weise und in derselben Zeit wie die tägliche Bewegung des Universums vor sich gehen. Da sich aber jene zwei Sphären in entgegengesetzter Richtung drehen, so verspätet sich die Rückkehr der Sonne von einem Aufgang bis zum nächstfolgenden um die oben angegebene Zeit. Und das genügt für die Sonne.

3. Hinsichtlich des Mondes waren die Dinge theils in ähnlicher, theils in verschiedener Weise geordnet. Auch er ist von drei Sphären getragen, weil auch bei ihm drei Bewegungen beobachtet wurden. Von diesen geht eine wie die Bewegung des Fixsternhimmels vor sich; die zweite dreht sich im entgegengesetzten Sinn mit der vorigen um eine auf der Ebene der Ekliptik* senkrechte Axe gerade so wie bei der Sonne. Die dritte ist nicht ganz so wie die dritte Sphäre der Sonne, da sie ihr zwar bezüglich der Stellung, aber nicht bezüglich der Bewegung ähnlich ist, welche im entgegengesetzten Sinn mit der Bewegung der zweiten Sphäre vor sich geht, und zwar in einer der ersten Sphäre ähnlichen Bewegung, als langsame Umdrehung um eine zur Ebene des vom Mondmittelpunkt scheinbar beschriebenen Kreises senkrecht stehende Axe; die Neigung dieser Ebene zur Ebene der Ekliptik ist gleich der grössten Digression des Mondes nach Breite. Die Entfernung der Pole der dritten Sphäre von denen der zweiten, gezählt auf der Peripherie des grössten Kreises, der diese beiden Pole verbindet, ist offenbar gleich der Hälfte der ganzen Breitenbewegung des Mondes. Die erste Sphäre nahm er (Eudoxus) an zur Erklärung der täglichen Bewegung des Mondes von Osten nach Westen; die zweite wegen der Verzögerung, welche beim Mond längs des Thierkreises beobachtet wird (directe Bewegung nach der Länge); die dritte, weil der Mond seine nördlichste und südlichste Position nicht immer in denselben Punkten des Thierkreises zu erreichen scheint, sondern weil sich diese Punkte immer, der Ordnung der Zeichen entgegengesetzt, verschieben, weshalb die Bewegung dieser Sphäre ebenso wie die der Fixsternsphäre vor sich geht. Und wegen der kleinen Grösse der rückläufigen Bewegung, welche besagte Punkte während eines jeden Monats zurücklegen, gab er (Eudoxus) der dritten Sphäre eine sehr langsame Bewegung gegen Westen. So viel über den Mond.

4. Bezüglich der fünf Planeten sagt Aristoteles bei seiner Auseinandersetzung der Ansicht des Eudoxus,** dass sie mittelst vier Sphären bewegt

---

* Der Kürze wegen für: der Kreis, welcher durch die Mitte des Thierkreises geht; ich substituire hierfür „Ekliptik", obgleich dieses Wort bei den Alten vor Achilles Tatius, einem Schriftsteller des 4. Jahrhunderts n. Chr., nicht gebraucht wird.

** Man sehe die oben aus dem 12. Buch der Metaphysik angeführte Stelle im Anhang I.

würden, von denen die erste und zweite dieselben sind und dieselbe Stellung haben, wie die beiden ersten Sphären der Sonne und des Mondes. Bei jedem Planeten dreht sich die Sphäre, welche alle anderen umschliesst, um die Weltaxe von Osten nach Westen in derselben Zeit als die Sphäre der Fixsterne; die zweite, deren Pole auf der ersten sind, macht ihre Umdrehung im entgegengesetzten Sinn von Westen nach Osten um die Axe und die Pole der Ekliptik in einer Zeit, welche derjenigen gleich ist, die der Planet zu gebrauchen scheint, um einen Umlauf im ganzen Thierkreis zurückzulegen. Er (Eudoxus) sagt alsdann, dass für die Sterne Hermes und Eosphoros die Umdrehung der zweiten Sphäre während eines Jahres vor sich geht, für den Ares in 2 Jahren, für Jupiter in 12 und für den Kronos, welchen die Alten das Gestirn der Sonne nannten, in 30 Jahren.

5. Die beiden anderen Sphären (der Planeten) verhalten sich alsdann wie folgt: die dritte Sphäre eines jeden hat ihre Pole auf der Ekliptik, welche man sich auf der zweiten Sphäre desselben Planeten beschrieben denken kann, und dreht sich von Süden nach Norden, in einer Zeitdauer, die jeder Planet von einem Erscheinen bis zum nächsten Wiedererscheinen nothwendig hat,* während welcher Dauer er bezüglich der Sonne alle seine Stellungen einnimmt; diese Zeitdauer nennen die Mathematiker synodische Umlaufszeit.** Diese ist verschieden für die verschiedenen Planeten, und deshalb ist die Umlaufszeit der dritten Sphäre für alle (Planeten) nicht gleich, sondern beträgt nach Eudoxus für den Stern der Aphrodite 19 Monate, für den des Hermes $3\frac{2}{3}$ Monate,*** für den des Ares 8 Monate und 20 Tage,† für den Stern des Jupiter und des Kronos annäherungsweise 13 Monate. Das ist also die Bewegung und die Umlaufszeit für die dritte Sphäre. Die vierte Sphäre, welche den Stern trägt, dreht sich nach einem schiefen Kreis, um Pole, die einem jeden Planeten eigen sind (und von denen eines andern verschieden), in einer Zeit, welche der Umdrehungszeit der dritten Sphäre gleich ist, aber in entgegengesetztem Sinn von Osten nach Westen. Dieser schiefe Kreis ist, wie er sagt, gegen den grössten Parallelkreis auf der dritten Sphäre weder auf gleiche Weise, noch um dieselbe Grösse bei allen (Planeten) geneigt.

---

* Wenn der Planet nach der Conjunction mit der Sonne aus den Sonnenstrahlen heraustritt, und am Morgen seine *φάσις* bildet.

** *διεξόδον χρόνον* ist die Umlaufszeit im Epicyklus, nach dem ptolemäischen System.

*** *ἐν μησὶ τρισὶ δίμοιρον*, Karsten. Brandis hat die gleichbedeutende Variante *ἐν ἡμέραις δέκα καὶ ἑκατόν*.

† Diese Zeitdauer ist falsch, aber alle Ausgaben haben diese Zahl, und so auch die lateinische des Guil. de Moerbeka.

6. Offenbar veranlasst jene Sphäre, welche sich wie die Fixsternsphäre bewegt, die anderen, von denen jede die Pole der folgenden trägt und also auch die das Gestirn tragende, und somit auch das Gestirn, auf gleiche Weise sich mit ihr zu drehen; und dadurch bewirkt sie den Aufgang und Untergang eines jeden Gestirns. Die zweite Sphäre veranlasst das Gestirn, die zwölf Zeichen zu durchlaufen, da sie sich um die Pole der Ekliptik dreht und die beiden anderen Sphären mit dem Gestirn durch die aufeinanderfolgenden Theile des Thierkreises führt,* in einer Zeit, während welcher jeder Planet diesen Kreis zu durchlaufen scheint. Die dritte Sphäre, deren Pole in der zweiten, auf der Ekliptik sich befinden und welche sich von Süden nach Norden und von Norden nach Süden dreht, führt die vierte, das Gestirn tragende Sphäre mit sich und verursacht die Bewegung desselben nach der Breite. Jedoch ist sie es nicht allein, welche diese Bewegung bewirkt. Denn so oft das Gestirn, der dritten Sphäre folgend, sich gegen die Pole der Ekliptik hinbewegt und den Weltpolen genähert hat, so führt es die vierte Sphäre, deren Umlauf um die Pole des schiefen Kreises, worauf das Gestirn sich befindet, im entgegengesetzten Sinn mit der dritten, aber in derselben Zeit, wie der Umlauf dieser, vor sich geht, auf der andern Seite ebensoweit herab, und veranlasst es dadurch, die Ekliptik zu durchschneiden und zu beiden Seiten derselben die von Eudoxus Hippopede genannte Curve zu beschreiben. Die Breite derselben ist genau der Breitenbewegung des Gestirns gleich; dieses gab Veranlassung, Einwürfe gegen Eudoxus vorzubringen. Das ist nach Eudoxus das System der Sphären, deren Anzahl 26 beträgt, vertheilt auf sieben Gestirne, nämlich sechs für die Sonne und den Mond, und zwanzig für die anderen fünf (Planeten).

7. Callippus aus Cyzikus, welcher mit Polemarchus, einem Bekannten des Eudoxus, studirte, kam mit Polemarchus nach Athen, um über die Erfindungen des Eudoxus sich mit Aristoteles zu besprechen und um dieselben durch dessen Hilfe zu berichtigen und zu vervollständigen. Weil nach der Ansicht des Aristoteles sich alle Himmelskörper um das Centrum der Welt bewegen mussten, so zog er die Lehre der homocentrisch zum Universum sich umwälzenden Sphären der über die excentrischen Kreise, welche von vielen Späteren angenommen wurde, vor.... Ueber Callippus schrieb Aristoteles im 12. Buche der Metaphysik Folgendes: „Callippus nahm dieselbe Anordnung der Sphären an wie Eudoxus, nämlich dieselbe Reihenfolge, und legte sowohl dem Jupiter als dem Kronos dieselbe Anzahl von Sphären bei, aber für die Sonne und für den Mond glaubte er je zwei Sphären hinzufügen zu müssen, um von den Erscheinungen Rechen

* Nämlich von Westen nach Osten.

schaft zu geben; bei den übrigen Planeten je eine." Es beträgt also nach Callippus die Gesammtzahl der Sphären fünf mal fünf, vermehrt um zwei mal vier, d. i. dreiunddreissig. Man kennt übrigens keine Schrift des Callippus, welche den Grund für die Vermehrung der Sphären angibt, auch Aristoteles gab den Grund dafür nicht an. Eudemus indess erzählt kurz, welche Phänomene den Callippus zur Hinzufügung jener Sphären veranlassten: denn er berichtet, dieser habe behauptet, wenn wirklich zwischen den Zeitpunkten der Solstitien und der Aequinoctien solche Differenzen in den Zeitintervallen vorkämen, wie Euktemon und Meton (gefunden zu haben) glaubten, für jeden dieser beiden Körper (Sonne und Mond) drei Sphären zur Erklärung der Phänomene nicht ausreichten, wegen der Anomalie, welche sich für die Bewegungen derselben daraus ergibt. Der Grund, weshalb Callippus eine einzige Sphäre für jeden der drei Planeten Ares, Aphrodite und Hermes hinzufügte, wurde von Eudemus kurz und deutlich angegeben.*

8. Nachdem Aristoteles die Ansicht des Callippus über die revolvirenden Sphären erzählt hat, fügt er hinzu: „Damit man sich durch das gleichzeitige Zusammenwirken aller (dieser Sphären) von den Erscheinungen Rechenschaft geben kann, muss man bei jedem Planeten zu den vorigen Sphären ebensoviele reagirende, weniger eine, hinzufügen; letztere haben den Zweck, die erste Sphäre des darauffolgenden unteren Gestirns in dieselbe Stellung zurückzuführen, denn nur so ist es möglich, dass die Bewegungen der Planeten vor sich gehen können." Da dieses von Aristoteles so kurz und deutlich gesagt wird, so versuchte Sosigenes, dessen Scharfsinn lobend, den Zweck der hinzugefügten Sphären zu finden;** und er sagt, dass ihre Einführung in die Hypothesen nothwendig sei, um daraus die Stellung und die nothwendige Geschwindigkeit sowohl für diejenige Sphäre, welche die tägliche Bewegung eines jeden Planeten darstellt, als auch für die anderen, unter dieser liegenden Sphären abzuleiten. Weil jede (nach Bewegung und Stellung) mit der Fixsternsphäre, oder mit einer andern übereinstimmende Sphäre mit dieser sich um dieselbe Axe und in derselben Zeitdauer drehen muss, so kann man ohne die Hinzufügung der

* Hier scheint im Text des Simplicius Etwas zu fehlen.

** Ich bin lange im Zweifel gewesen, ob es nicht besser wäre, Alles von hier an bis zum § 14 ganz wegzulassen, weil hier auf einigen Seiten Ideen entwickelt sind, welche wir deutlicher auf zehn Zeilen darlegen könnten. Nach dieser Stelle zu urtheilen, in welcher Simplicius den Sosigenes fast wörtlich anführt, müssen wir glauben, dass der berühmte Reformator des römischen Kalenders der weitschweifigste und langweiligste Schriftsteller seiner Zeit war. Zuletzt habe ich mich jedoch entschlossen, Nichts wegzulassen, weil diese Stelle einige Wichtigkeit hat und fast das einzige einigermassen Wichtige ist, das von diesem Philosophen auf unsere Zeit kam.

Sphären, von denen Aristoteles spricht, nichts erreichen. Nehmen wir, sagt Sosigenes, um uns dieses deutlicher zu machen, jene Sphären, welche das Gestirn des Jupiter tragen. Wenn wir in die letzte der vier (Sphären) des Kronos, auf welcher dieser Planet befestigt ist, die Pole der ersten Sphäre des Jupiter einfügen, wie können dieselben in der Axe der Fixsternsphäre bleiben, während die sie tragende Sphäre sich um eine davon verschiedene und zu dieser schiefstehende Axe dreht? Und dennoch ist es nothwendig, dass diese Pole auf der Axe der äussersten Bewegung bleiben, wenn wir wollen, dass die um dieselben sich drehende Sphäre dieselbe Stellung wie die Fixsternsphäre beibehält. Weil nun aber die drei (letzten) das Gestirn des Kronos tragenden Sphären, verbunden sowohl unter einander, als auch mit der ersten, von denen jede ihre eigene Geschwindigkeit hat, rotiren, so wird sicherlich die Bewegung der vierten nicht einfach, sondern mit den Bewegungen aller oberen Sphären zusammengesetzt sein. Wir werden in der That zeigen, dass, wenn mehrere Sphären in entgegengesetztem Sinn zu einander rotiren, man einen Theil der ihnen gehörigen Rotationsgeschwindigkeiten verliert; wenn hingegen die Bewegungen übereinstimmen, so kommt zu der, einer jeden (der unteren) zugehörigen Geschwindigkeit noch eine andere, welche ihr von den oberen (Sphären) mitgetheilt wird, hinzu. Wenn man deshalb mit der letzten Sphäre, auf der das Gestirn des Kronos befestigt ist, unmittelbar die erste des Jupiter in Verbindung bringt und dieser ihre eigene Geschwindigkeit ertheilt, damit beim (täglichen) Umschwung der Welt auch sie ihre Umdrehung in diesem Sinn vollführt, so werden die Bewegungen der oberhalb befindlichen Sphären ihr die Beibehaltung dieser Geschwindigkeit nicht erlauben, sondern es wird eine Vergrösserung (der Geschwindigkeit) hervorgehen, weil sie sich gegen Westen bewegen, sowohl die getragene Sphäre, als auch jene anderen, nach derselben Seite.* Dasselbe gilt für die anderen darauf folgenden Sphären; die Bewegung wird immer zusammengesetzter und ihre Pole werden sich aus der ihnen zugehörigen Stellung herausbewegen. Aber wie wir auseinandergesetzt haben, darf weder das Eine, noch das Andere eintreten. Damit nun dieses nicht eintrete und keine solche Unordnung hervorgehe, schuf er (Aristoteles) „die reagirenden Sphären, welche die erste Sphäre des nächstunteren Gestirns immer in dieselbe Stellung zurückführen". So nämlich sind seine eigenen Worte, und dadurch werden beide Gründe für die Einführung dieser Sphären angegeben, nämlich mit dem Wort „reagirend" die Wiederherstellung der Bewegung zur eigenen Geschwindigkeit, und mit dem Ausspruch „diejenigen, welche die erste Sphäre des nächstunteren Gestirns immer in dieselbe Stellung zurückführen", die

* Nämlich die vier Sphären des Saturn.

Erhaltung der Pole in ihrer zugehörigen Stellung. Denn nach diesen Polen richtet sich die Stellung der beweglichen Sphären, da die Pole die einzigen festen Punkte sind. Alsdann sagt er, dass durch diese zurückführenden Sphären die erste Sphäre des nächstunteren Gestirns wieder (in ihre richtige Stellung) zurückgebracht wird, weil durch Annahme dieser (Sphäre), durch diese Zurückführung,* die Stellung und die zugehörige Geschwindigkeit bei den folgenden Sphären (desselben Gestirns), ganz wie es sein soll, geordnet wird. Auf welche Weise dieses zugeht, zeigt Sosigenes dadurch, dass er einige für seine weitere Auseinandersetzung nothwendige Erörterungen vorausschickt, worüber das Folgende eine kurze Erklärung gibt.

9. Es seien zwei homocentrische Sphären, z. B. DE und ZH,** und ausserdem noch eine dritte äussere, die beiden vorigen einschliessende, entweder festliegend, oder die beiden vorigen mit sich in Umschwung versetzend,*** gegeben; nehmen wir an, dass die beiden ersten (um dieselben Pole) mit gleicher Geschwindigkeit in gleicher Zeit, im entgegengesetzten Sinn rotiren, so behaupte ich, dass alle Punkte der innern Sphäre bezüglich der äussersten dieselbe Lage beibehalten, als wenn die innere Sphäre unbeweglich geblieben wäre. Gesetzt es habe sich DE wie von A aus gegen B bewegt, wenn diese die kleinere (Sphäre) ZH mit sich führte und diese sich nicht im entgegengesetzten Sinn bewegte, so würde man sehen, dass beim Uebergang von D unter (den Punkt) B, auch Z zu derselben Zeit unter B† zu liegen kommt. Aber wenn ZH von DE bewegt wird und zu derselben Zeit mit ihrer eigenen Bewegung in entgegengesetztem Sinn rotirt, so wird ZH um denselben Betrag, als sie vorrückte, durch sich selbst rückwärts gedreht worden sein, so dass, wenn D unter B liegt, Z noch unter A, in seiner früheren Lage, sich befinden wird, wodurch die Wahrheit der Behauptung hervorgeht. Wenn also die AB fest bleibt, so ist aus dem Bisherigen klar, dass durch die beiden entgegengesetzten Bewegungen jeder Punkt der vorwärts und rückwärts bewegten inneren Sphäre immer in Bezug auf dieselben Punkte der äusseren Sphäre dieselbe Lage beibehalten wird; dieses würde aber nicht eintreten, wenn sie sich nur in einem Sinn drehen würde. Wenn sich alsdann AB drehen würde, entweder in demselben Sinn wie die zweite Sphäre DE, oder im entgegen-

---

* *ἀνάλειψιν* Karsten, *ἀνείλησιν* Brandis.

** S. Fig. 20; da sich diese Figur in keiner der Ausgaben befindet, so habe ich versucht, dieselbe mit Hilfe des Textes zu entwerfen.

*** Ich lese mit Brandis *εἴτε μενούσης εἴτε περιαγομένης ἐκείνας*, was einen bessern Sinn gibt als die Lesart Karsten's, *εἴτε κινουμένης εἴτε μενούσης τῆς περιεχούσης*.

† Sowohl Brandis als Karsten haben A anstatt B, was offenbar falsch ist und mit dem Folgenden im Widerspruch steht.

gesetzten, so findet bei den Punkten der dritten Sphäre ZH dasselbe statt, weil dieselbe mit DE gedreht und zurückgedreht wird, wie vorher; denn wenn sich die Sphäre AB von A gegen B dreht und die DE so mit sich führt, dass D gegen E hinrückt, so wird die mittlere Sphäre DE sich entweder in demselben Sinn wie AB, oder im entgegengesetzten, mit irgend einer Geschwindigkeit, bezüglich AB drehen, aber immer in derselben Zeit wie ZH, und da sie diese mit sich führt, so wird sie bewirken, dass der Punkt Z aus der geraden Linie heraustritt. Da aber die dritte Sphäre (durch sich selbst) im entgegengesetzten Sinn sich dreht, so wird Z wiederum unter A zu liegen kommen, und da dieses immerwährend so vor sich geht, so werden alle Punkte der Sphäre ZH unter denselben Punkten der Sphäre AB liegen bleiben. Somit ist die Behauptung für die um dieselbe Axe rotirenden Sphären bewiesen. Dasselbe gilt aber auch noch, wenn sie sich nicht um dieselbe Axe drehen;* denn die zusammenfallende Lage der Punkte unter dieselben Punkte wird nicht durch die Bewegung (dieser Punkte) unter denselben Parallelen hervorgerufen, sondern durch die Drehung und die entgegengesetzte Drehung der eingeschlossenen Sphäre (ZH) bezüglich der einschliessenden (AB), weshalb jene ebensoviel an Bewegung verliert, als sie gewann; sei es nun, dass diese entgegengesetzten Bewegungen in einem schiefen Kreis oder in einem senkrechten (nämlich senkrecht zur Axe, um welche sich AB dreht) vor sich gehen.

10. Hat man wiederum zwei homocentrische, nach gleicher Richtung mit einer gewissen Geschwindigkeit sich bewegende Sphären, und nimmt man an, dass die kleinere sich nicht nur mit der grösseren bewegt, sondern auch mit derselben eigenen Geschwindigkeit in demselben Sinn,* so wird die dadurch erzeugte Bewegung (der kleineren) mit doppelter Geschwindigkeit vor sich gehen. Und wenn die (eigene) Geschwindigkeit der kleineren Sphäre das Doppelte betragen wird, so wird die für dieselbe sich ergebende Geschwindigkeit das Dreifache sein, und so fort. Denn wenn die grössere die kleinere um einen Quadranten dreht, und die kleinere mit der gleichen Eigenbewegung um einen Quadranten sich weiterbewegt, hat letztere eine drehende Bewegung um zwei Quadranten ausgeführt; es ist mithin ihre Gesammtbewegung das Doppelte von der Bewegung der ersten. So verhält sich die Sache, sagt er (Sosigenes), in dem Fall, in welchem die Bewegungen um dieselben Punkte vor sich gehen. Wenn die Pole verschieden sind, so wird auch die Wirkung eine andere, wegen der schiefen Lage der zweiten Sphäre (bezüglich der ersten). Denn in diesem Fall

* Nämlich weil die Axe der ersten Sphäre AB verschieden ist von der gemeinsamen Axe, um welche in gleichen Zeiten und im entgegengesetzten Sinn sich die zweite und die dritte Sphäre DE und ZH drehen.

setzen sich die Geschwindigkeiten nicht so zusammen, sondern, wie man mit dem Parallelogramm beweisen kann, wird eine Bewegung in der Richtung des Diameters hervorgebracht,* zusammengesetzt aus zwei Bewegungen, von denen die eine die Bewegung eines Punktes nach der Länge des Parallelogramms ist, die andere die eines Punktes, der die Breite des Parallelogramms in derselben Zeit, wie der vorige die Länge durchläuft. Dadurch gelangt der Punkt gleichzeitig an das andere Ende des Diameters, sowie der Länge der durchlaufenen Seiten, und da der Diameter nicht gleiche Länge mit der von diesen Seiten gebildeten gebrochenen Linie hat, sondern kleiner ist, so wird die aus der Zusammensetzung beider Geschwindigkeiten hervorgehende Geschwindigkeit kleiner sein als ihre Summe.** Aehnlich ist es, wenn zwei homocentrische Sphären um dieselben Pole oder um verschiedene Pole in entgegengesetzten Richtungen in der Weise rotiren, dass die kleinere von der grössern geführt wird und sich (mit ihrer Eigenbewegung) gegen letztere bewegt; jeder Punkt der kleinern wird zu seinem Umlauf mehr Zeit brauchen, als wenn er nur mit der grössern in unveränderlicher Weise verbunden wäre. Deshalb findet die Zurückkehr der Sonne, von einem Aufgang bis zum nächstfolgenden, später statt, als die Umdrehung der Welt, da sie (die Sonne) eine sehr langsame Bewegung im entgegengesetzten Sinn hat. Wenn dagegen die Sonne eine der Bewegung der Fixsterne (vollkommen) gleiche Bewegung hätte, so würde ihr Umlauf diese begleiten und sie würde immer an demselben Punkt (der Fixsternsphäre) erscheinen.

11. Nach diesen Erörterungen kommt Sosigenes auf die Behauptung des Aristoteles zu sprechen, dass es nothwendig sei, für jeden Planeten ebenso viele reagirende Sphären hinzuzufügen (als Callippus deferirende annahm), weniger eine, wenn man die Erscheinungen retten will, und setzt die Theorie der Sphären nach Aristoteles folgendermassen auseinander. Es sei von den Sphären des Kronos die erste wie die Fixsternsphäre bewegt, die zweite längs der Ekliptik, die dritte bewege sich senkrecht zur Ekliptik, von Süden gegen Norden; der (Aequatorial-) Kreis derselben wird senkrecht zur Ekliptik stehen und in dieser seine Pole haben, weil sich die (grössten) Kreise, von denen der eine durch die Pole des andern geht,

---

* Nämlich die Diagonale.

** Hier ist von Sosigenes, einem Zeitgenossen Julius Cäsars, das Princip der Zusammensetzung der Bewegungen mit aller möglichen Klarheit ausgesprochen. Der Beweis dieses Princips mittelst des Parallelogramms war eine in den Schulen bekannte Sache. Darauf spielt auch Geminus an, bei *Procl. Comm. in Eucl., p. 106, ed. Friedlein.* Der Grundstein dieser alten Lehren über die zusammengesetzte Bewegung findet sich bei Aristoteles, Probleme der Mechanik, Cap. 2, wo der Satz über das Parallelogramm der Geschwindigkeiten bewiesen ist.

senkrecht schneiden. Die vierte Sphäre, welche das Gestirn enthält, bewegt es nach einem schiefen Kreis, zu dem Zweck, die Breitenbewegung gegen das Sternbild des Bären hin zu beschränken, damit es sich nicht zu sehr den Polen der Welt nähert. Nun muss man noch zu diesen vier deferirenden Sphären eine andere fünfte Sphäre hinzufügen, welche sich um dieselben Pole im entgegengesetzten Sinn und gleichzeitig mit der vierten bewegt. Da die Bewegung dieser Sphäre im entgegengesetzten Sinn mit der vierten, um dieselben Pole mit derselben Geschwindigkeit vor sich geht, so wird sie die Bewegung der vierten aufheben, und die Geschwindigkeit wird eine geringere.* Die Punkte der dritten Sphäre werden auf der fünften immer in der Richtung derselben Kathete erscheinen.** Nach der fünften muss man eine sechste annehmen, mit denselben Polen wie die dritte, welche sich mit derselben Geschwindigkeit, aber im entgegengesetzten Sinn mit dieser bewegt, um die Erscheinungen zu retten. Hierauf muss man eine siebente Sphäre hinzufügen, welche der zweiten entgegenarbeitet und, sich mit dieser um die Pole der Ekliptik bewegend, die der zweiten eigene Geschwindigkeit aufhebt, welche von der zweiten auf die inneren Sphären übertragen wird (weil die zweite sich mit der Fixsternsphäre bewegend, auch die Geschwindigkeit den unteren Sphären von Osten nach Westen mittheilte). Auf diese Weise wird sich also die siebente wie die Fixsternsphäre bewegen, aber nicht dieselbe Stellung wie letztere haben, da sie um andere Pole*** von Osten nach Westen rotirt. Mit Recht bemerkt Sosigenes, dass unter diesen noch eine achte angenommen werden muss. welche die erste des Jupiter sein wird, weil es nicht wahr ist, dass die letzte der drei reagirenden (des Kronos) die erste der Sphären des Jupiter ist, was jedoch Diejenigen annahmen, welche sagten,† dass die letzte der die oberen Bewegungen aufhebenden Sphären die erste der Sphären des nächstunteren Gestirns sei, und dass die siebente die von uns als achte bezeichnete und zugleich die erste Sphäre des Jupiter wäre. Deshalb müssen jene diese Sphäre zweimal zählen, um die von Aristoteles angenom-

* Genauer: wird die Anzahl der Geschwindigkeiten, welche die Bewegung zusammensetzen, vermindern. Die fünfte Sphäre, oder die erste der reagirenden wird sich wie die dritte der vier deferirenden bewegen.

** Nämlich sie werden radial auf identische Punkte der fünften Sphäre durch denselben Strahl projicirt.

*** Ist unrichtig; die Pole sind dieselben.

† Diese Annahme ist die richtige, mag Sosigenes darüber sagen was er will. Offenbar folgt die dritte reagirende des Kronos der Bewegung der Fixsterne, und innerhalb derselben kann man sofort die zweite der deferirenden des Jupiter annehmen. Deshalb ist die erste deferirende des Jupiter überflüssig, da sie genau so wie die letzte reagirende des Kronos rotirt.

mene Anzahl zu erhalten. Es ist in der That nothwendig, dass bei jedem Gestirn die Anzahl der restituirenden Sphären um eine Einheit geringer ist als diejenige der deferirenden; es wird also bei Kronos und Jupiter, welche vier deferirende Sphären haben, die Anzahl der restituirenden je drei betragen; bei den anderen vier (Planeten), nämlich bei Ares, Aphrodite, Hermes und der Sonne, welche fünf deferirende besitzen, wird die Anzahl der restituirenden vier betragen. Bei Kronos und Jupiter haben wir also zwei mal drei, bei Ares, Aphrodite, Hermes und der Sonne vier mal vier restituirende, was zusammen 22 ausmacht. Aber bei Kronos und Jupiter haben wir 8, bei den anderen 5 Planeten 25 deferirende. Zu den 33 deferirenden die 22 restituirenden hinzugenommen, giebt eine Gesammtsumme von 55 Sphären; denn für die deferirenden des Mondes braucht man keine restituirenden, indem Aristoteles sagt, dass dieselben nicht zurückbewegt werden müssen, weil sie das unterste von allen Gestirnen tragen. Es ist also offenbar, dass die Anzahl aller genau so gross sein muss.

12. Die von Aristoteles alsdann angeführte Bemerkung, „dass, wenn man bei der Sonne und beim Mond die von uns angeführten Bewegungen nicht hinzufügt, die Gesammtzahl der Sphären 47 beträgt", hat Verwirrung veranlasst. Denn wenn wir bei der Sonne und beim Mond die zwei von Callippus hinzugefügten Sphären weglassen, so ist klar, dass wir bei der Sonne zwei weitere restituirende Sphären wegnehmen müssen (weil mit der Wegnahme der beiden ersten Sphären auch diejenigen verschwinden müssen, welche deren Umdrehung vernichten): im Ganzen muss man also sechs, nämlich zwei deferirende und zwei restituirende der Sonne, und die beiden von Callippus für den Mond hinzugefügten, wegnehmen, aber auf diese Weise bleiben, anstatt 47, als Gesammtzahl 49 übrig. Aristoteles sagte 47, indem er vielleicht nicht bedachte, dass man beim Mond nicht vier, sondern nur zwei wegnehmen darf;* wenigstens wenn man nicht zugeben will, dass er bei der Sonne die vier von ihm selbst hinzugefügten restituirenden Sphären und ausserdem noch die beiden von Callippus hinzugefügten wegnahm, in welchem Fall man von den 55 acht abzuziehen hätte, und die gewünschte Zahl 47 bleibt. Wir könnten hier wohl zugeben, dass die restituirenden Sphären für die zweite und dritte der deferirenden Sonnensphären weggelassen sind, indem er selbst sagte, dass die inneren Sphären keine restituirenden besitzen, welche ihre Bewegung vernichten;** über-

* Dies scheint die annehmbarste Erklärung des vom Stagiriten begangenen Fehlers zu sein.

** Simplicius will sagen, dass, wenn es möglich wäre, von einer gewissen Anzahl der unteren deferirenden die zugehörigen restituirenden wegzunehmen, man nicht nur diese restituirenden bei den deferirenden des Mondes entbehren könnte,

dies bemerkt Sosigenes mit Recht, dass man auch beim Mond die restituirenden beibehalten muss, wenn man nicht will, dass die Geschwindigkeit der oberen Bewegungen, zu der Geschwindigkeit der deferirenden Mondssphären hinzugefügt, den Mond veranlassen, sich mit einer Geschwindigkeit gegen Westen zu bewegen, die von derjenigen der Fixsterne verschieden ist.* Und wenn man auch annimmt, dass der Mond allein keine restituirenden Sphären habe, kann man die Zahl 47 nicht erreichen, was dem Alexander und Porphyrius in ihren Commentaren zum 12. Buch der Metaphysik viel zu schaffen machte. Sosigenes bemerkt, es sei besser die Annahme zu machen, dass beim Anschreiben der Zahl ein Fehler vorgekommen sei, als diese siebente und diese achte Sphäre aufzustellen (welche nothwendig sind, um von der Zahl 55 auf die Zahl 47 zu kommen), weil sich in keiner Weise die von Aristoteles angegebene Gesammtzahl zu 47 ergiebt.

13. Sosigenes fügt alsdann hinzu, es sei aus dem Vorhergehenden klar, dass diese Sphären in verschiedenem Sinn von Aristoteles *ἀνελιττούσαι* (revolvirende), und von Theophrast *ἀνανταφερούσαι* (entgegenwirkende) genannt wurden. Denn sie sind sowohl das Eine als das Andere, indem sie die Bewegungen der oberen Sphären im entgegengesetzten Sinn drehen und die Pole der unter diesen liegenden Sphären zurückführen, also die Wirkung jener aufheben und diese in die geeignete Stellung zurückbringen. Es ist in der That nothwendig, dass die äusseren Bewegungen sich nicht auf alle inneren Sphären fortpflanzen, und dass die Pole der inneren Sphären auf dieselbe Kathete wie die Pole der homologen Sphären (der anderen Planeten) fallen, damit, wie er sagt, die ersten Sphären der unteren Gestirne stets in dieselbe Stellung zurückgebracht werden, und mit diesen auch offenbar die anderen darauf folgenden Sphären (derselben Gestirne). Nur so, sagt er, gelangt man dahin, dass die Bewegung der Fixsterne alle anderen hervorruft. Und hierüber ist genug gesprochen.

14. Und das ist das System der revolvirenden Sphären (*ἡ διὰ τῶν ἀνελιττουσῶν σφαιροποιία*), welches die Erscheinungen nicht zu retten vermag, was ihm auch Sosigenes zum Vorwurf macht, indem er sagt: „Die Hypothesen der Anhänger des Eudoxus vermögen die Phänomene nicht zu retten, weder die von den Späteren entdeckten, noch die früher bekannten, welche von Jenen selbst als wahr angenommen wurden." Und was wird über jene anderen zu sagen sein, welche, da Eudoxus von einigen derselben keine Erklärung geben konnte, Callippus aus Cyzikus zu erklären versuchte,

---

sondern auch bei den beiden letzten Sonnensphären, ohne dem aristotelischen Text, buchstäblich genommen, zu widersprechen.

* Ist etwas ungenau ausgedrückt, der richtige Sinn hiervon ist aber offenbar.

wenn es wahr ist, dass es ihm gelang? Aber es ist gewiss, dass auch von folgendem (Phänomen) Keiner derselben, vor Autolicus aus Pitane, eine Erklärung durch Hypothesen zu geben versuchte, welcher überdies auch keine (Erklärung) davon geben konnte:* nämlich von der Thatsache, dass die Sterne uns manchmal nahe zu sein scheinen, manchmal entfernt, was bei einigen derselben auf den ersten Blick auffällt. Denn das nach der Aphrodite benannte Gestirn, sowie das nach dem Mars benannte erscheint in der Mitte der Rückläufe** vielmals heller, so dass dasjenige der Aphrodite in mondlosen Nächten verursacht, dass die Körper Schatten werfen. Aber auch beim Mond ist leicht zu ersehen, dass er sich nicht immer in derselben Entfernung von uns befindet, weil er Demjenigen, der ihn mit einem andern Object vergleicht, nicht immer von derselben Grösse erscheint. Das ergibt sich auch aus den mit Instrumenten angestellten Beobachtungen, weil das eine Mal eine Scheibe (*τύμπανον*) von elf Zoll, ein anderes Mal eine solche von zwölf in die gleiche Entfernung vom Beobachter gestellt werden muss, um diesem den Anblick desselben zu nehmen. Zu Gunsten des Angeführten giebt auch dasjenige Zeugniss, was bei Gelegenheit der vollkommenen Verfinsterungen (nämlich der centralen) der Sonne sich ereignet, und das ist ein sicherer Beweis von der Wahrheit dieser Dinge. Denn wenn es sich ereignet, dass die Mittelpunkte der Sonne und des Mondes in gerader Linie mit unserem Auge liegen, treffen nicht immer dieselben Erscheinungen ein, sondern manchmal kommt es vor, dass der Kegel, welcher dem Mond umschrieben ist und seine Spitze in unserem Auge hat, auch genau der Sonne umschrieben ist: zuweilen bleibt die Sonne während einer gewissen Zeit uns ganz verborgen, zuweilen fehlt hierzu noch

---

* Hier findet sich in beiden Ausgaben Folgendes eingeschaltet: *δηλοῖ δὲ ἡ πρὸς Ἀριστόθηρον αὐτοῦ διαφορά,* „seine Differenz mit Aristoteles ist offenbar". Beide Texte haben *Ἀριστόθηρον*, und dieselbe Lesart hat die Handschrift, welche sich in der Bibliothek der Universität zu Turin befindet. Diese sinnstörende Glosse, welche hier nichts zu thun hat, wurde von uns unterdrückt.

Postscriptum. Nach drei Jahren ist es mir gelungen, Aufklärung über diesen Punkt zu erlangen. Diese Stelle ist kein späterer Zusatz, wie ich glaubte, sondern kann sehr wohl im Text stehen bleiben. Ich habe gefunden, dass wirklich eine Person Namens *Ἀριστόθηρος* existirte. Diese lebte gleichzeitig mit Autolycus (ungefähr 300 v. Chr.), war wie Letzterer Mathematiker und hatte den berühmten Dichter Aratus als Schüler. (Man sehe die Biographie des Aratus in der Ausgabe der Schriften des Aratus von Buhle, Leipzig 1793, Vol. I p. 4.) Dasjenige also, wovon hier Sosigenes spricht, ist nichts Anderes, als eine *disputatio Autolyci contra Aristotherum,* worin wahrscheinlich Autolycus seine Ideen über die Bewegung der Planeten auseinandersetzte, und worauf sich Sosigenes, weil es eine bekannte Sache war, bezieht.

** *προηγήσεις*. In Wirklichkeit findet die grösste Helligkeit der Venus nicht in der Mitte ihres Rücklaufs statt.

etwas, so dass im Augenblick der Mitte der Verfinsterung um den Mond herum eine Art von ringförmigem Saum, welcher diesen umgibt, übrig bleibt.* Diese Verschiedenheit der scheinbaren Grössen kommt nothwendigerweise davon her, dass ihre Entfernungen ungleich sind, was auch bei Gegenständen, welche sich in der Luft befinden, vorkommt. Das, was in diesen Fällen vor sich geht und dem Anblick bemerkbar ist, kommt wahrscheinlich auch bei den anderen (Gestirnen) vor, wenn es auch der Beobachtung nicht auffällt. Und es ist nicht nur wahrscheinlich, sondern wirklich, weil ihre Bewegung von einem Tag zum andern unregelmässig erscheint, während bei ihrer scheinbaren Grösse die Differenz nicht auffällig ist, da ihre Veränderung der Nähe und Tiefe nicht gross ist, nämlich jene Veränderung, welche die Mathematiker Bewegung nach der Tiefe zu nennen pflegen. Dieses also haben sie nicht zu erklären versucht, wie jene (Grösse) sich von einem Tag auf den andern zu verändern scheint, obgleich das Problem dieses fordert.

Aber man kann dennoch nicht sagen, dass ihnen die Veränderung der Entfernung eines und desselben Gestirns unbekannt geblieben wäre, denn es scheint, dass Polemarchus aus Cyzikus sie kannte, aber dass er ihr, als einer geringfügen Sache, nur wenig Beachtung schenkte, da er die Hypothese der zum Mittelpunkt des Universums concentrischen Sphären bevorzugte. Und es ist offenbar, dass auch Aristoteles in den physikalischen Problemen** die Hypothesen der Astronomen deshalb zweifelhaft findet, weil die Grösse der Planeten nicht constant zu sein scheint; deshalb war auch er von den revolvirenden Sphären nicht vollständig befriedigt, obgleich er dieselben concentrisch zum Universum gelegt und ihnen eine Bewegung um den Mittelpunkt desselben gegeben hatte.*** Wirklich ersieht

---

* Es ist zu bedenken, dass alle diese Bemerkungen dem Sosigenes zugehören, welcher über diesen Gegenstand viel genauere Anschauungsweisen hatte, als der grösste Theil der Astronomen bis nach Tycho. Noch am Anfang des 17. Jahrhunderts bezweifelten Einige die Möglicheit einer totalen Finsterniss. Sosigenes schreibt in seinen von Proclus citirten Büchern *περὶ τῶν ἀνελιττουσῶν*, „dass die Sonne bei den zur Zeit des Perigäums stattfindenden Finsternissen mit ihren Rändern aus der Mondscheibe hervorragt und mit diesen ungehindert leuchtet." Hieraus ersieht man, dass Sosigenes die Veränderungen des scheinbaren Durchmessers sowohl der Sonne, als des Mondes kannte. Auch hier, wo er direct von den revolvirenden Sphären spricht, hatte er wahrscheinlich den Zweck, jenes System zu widerlegen, dadurch, dass er zeigt, dass die Entfernung der Sonne von uns veränderlich ist. (S. *Procli Hypot. ed. Halma, p. 111.*)

** Verloren.

*** Alle diese Begründungen der Zweifel des Aristoteles bezüglich der homocentrischen Sphären dürfen den Leser nicht täuschen: sie dienen dazu, den Abfall der Peripatetiker von den revolvirenden Sphären des Stagiriten zu entschuldigen

man aus dem, was er im 12. Buch der Metaphysik sagt, dass er dasjenige, was bis auf ihn von den Astronomen über die Bewegung der Planeten gesagt worden war, nicht für genügend erachtete, weil er sich so ausspricht:* „Wir nehmen hier dasjenige, was einige Mathematiker sagen, um unsere Gedanken über die Zahl (der Himmelsbewegungen) einigermassen zu bestimmen und zu erklären, als wahr an; übrigens können wir entweder selbst Untersuchungen anstellen oder von den weiteren Aufklärungen Nutzen ziehen, welche uns diejenigen zu geben vermögen, die sich mit diesen Dingen beschäftigen, und dadurch, dass sie Alles erwägen, uns einer gewisseren Anschauung näher bringen.“ Aber nach Aufzählung aller Bewegungen fügt er in demselben Buch** noch hinzu: „Ob die Zahl der Bewegungen, aus denen wir mit Wahrscheinlichkeit annehmen können, dass das Wesen und die unbeweglichen und wahrnehmbaren Principien in gleicher Zahl vorhanden seien, eine solche sei, wie sie (die Zahl) nothwendig ist, überlassen wir Leuten, die gelehrter sind als wir.“ Die Worte, ob die Zahl so sei, und mit Wahrscheinlichkeit und wir überlassen die Sache Gelehrteren, zeigen seinen Zweifel über diesen Gegenstand.

15. Es wird also, nach dem Rath des Aristoteles selbst, besser sein, jenen späteren (Astronomen) zu folgen, welche von den Erscheinungen besser Rechenschaft geben konnten, obgleich auch nicht mit vollständiger Genauigkeit, anstatt den früheren, welche noch keine Kenntniss von so vielen Phänomenen hatten, da die Beobachtungen von 1903 Jahren*** noch nicht nach Griechenland gelangt waren, welche Callisthenes, auf die Bitte des Aristoteles, von Babylonien aus mitgetheilt hatte und die, nach Por-

---

und ihren Beitritt zu der Theorie der excentrischen Kreise und Epicykeln, nach dem Beispiel des Sosigenes, zu rechtfertigen.

* Metaphys. XII, 8.

** S. Anhang I.

*** Brandis, Karsten und der Turiner Codex lesen: *ἐτῶν χιλίων καὶ μυριάδων τριῶν*, was 31000 anstatt 1903 gibt; letztere Zahl hat sowohl die lateinische Ausgabe, als diejenige von Aldus. Alle neueren Gelehrten haben sich an die Zahl 31000 gehalten, welche ungereimt ist, da sie eine an und für sich mögliche und durch neuere Entdeckungen bestätigte Sache zu einer unmöglichen Fabel macht. Lepsius bemerkt in seiner Chronologie der Aegypter, p. 9, mit Recht, dass diese Ungewissheit von der Umänderung des Zeichens ϡ für 900 in das Zeichen *M* für die Myriade herkommt. Zu Gunsten der Lesart 1903 spricht sowohl der Bau des angeführten Satzes, in welchem *ἐννεακοσίων* viel besser am Platz ist, als *μυριάδων*, als auch die Thatsache, dass der Codex, aus welchem Guil. de Moerbeka seine lateinische Uebersetzung gegen Ende des 13. Jahrhunderts machte, wahrscheinlich älter als derjenige war, aus welchem sowohl Brandis als Karsten ihre Lesart für diese Stelle entnahmen. Diese Frage scheint wichtig genug zu sein, um von competenten Personen mit Hilfe aller Codices, welche man noch auffinden kann, von neuem untersucht zu werden.

phyrius, bis zur Zeit Alexanders von Macedonien aufbewahrt wurden, und welche durch Hypothesen nicht Alles beweisen konnten, was ihnen bekannt war. Deshalb beschuldigt sie Ptolemäus, eine so grosse Anzahl von Sphären eingeführt zu haben, zu dem einzigen Zweck, den periodischen Umlauf der sieben Planeten auf den Umschwung des Fixsternhimmels zurückzuführen.... Die späteren Astronomen verwarfen deshalb die Hypothesen der revolvirenden Sphären hauptsächlich deshalb, weil sie nicht geeignet sind zur Erklärung der Veränderung der Entfernungen und der Unregelmässigkeit der Bewegungen, und setzten die Hypothesen von den excentrischen Kreisen und Epicykeln an die Stelle der homocentrischen Sphären, wenn auch die Hypothese der excentrischen Kreise nicht schon von den Pythagoräern erfunden war, wie einige Andere erzählen, unter denen Nicomachus ist, und auf dessen Autorität hin Jamblichus....



Tafel I.

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 7.

Fig. 9.

Fig. 10.

Fig. 11.

Fig. 13.

Tafel II.

Saturn. Fig. 14. Längengrade

Längengrade

Jupiter. Fig. 15.

Mars. Fig. 16.

Merkur Fig. 17.

Fig. 18.

Fig. 19.

Fig. 20.

Fig. 21.

Zeitschrift

für

Mathematik und Physik.

Supplement

zur

historisch-literarischen Abtheilung

des XXIV. Jahrgangs.



Leipzig,
Verlag von B. G. Teubner.
1879.

Abhandlungen

zur

Geschichte der Mathematik.

Zweites Heft.



Leipzig,
Verlag von B. G. Teubner.
1879.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

Die deutsche Coss.

Von

P. Treutlein,
Professor am Gymnasium zu Karlsruhe.

1. Einleitung. — Im vorigen Jahre habe ich eine Studie aus der Geschichte der Mathematik veröffentlicht*), in welcher ich versuchte, den Zustand der gemeinen Arithmetik um die Neige des fünfzehnten und während des sechzehnten Jahrhunderts, zumal in deutschen Landen, zu schildern, in der Zeit also, in welcher sie aufhörte Eigenthum einzelner Weniger zu sein, wo sie, durch eine Reihe günstiger Verhältnisse unterstützt, zu immer weiteren und weiteren Kreisen des Volkes gelangte, um bald darauf einen Theil des eisernen Bestandes an geistigem Besitze eines Jeden auszumachen. Zweierlei wollte ich mit jener Arbeit erreichen: einmal war sie Selbstzweck, ich wollte den wirklichen Zustand des Rechnens zur angegebenen Zeit kennen lernen und lehren, ich wollte Aufschluss haben und geben, von wo aus und wie insbesondere die wunderbare Kunst der zehn Ziffern sich ausgebreitet und eingebürgert habe; dann aber sollte sie auch Vorstudie sein, um für die Erscheinungen eines anderen verwandten Gebietes die unumgänglich nöthigen Vorkenntnisse zu gewähren, um mir damit den richtigen Massstab zu verschaffen und mir so die klare Einsicht in die geschichtliche Entwickelung zu ermöglichen.

Seit längerer Zeit hatte ich nämlich meine Aufmerksamkeit der Geschichte jenes anderen Zweiges der Mathematik zugewendet, welchen man am Ausgange des Mittelalters im Gegensatze zur niederen oder gemeinen Arithmetik *(Ars minor)* als die höhere Arithmetik *(Ars major, Arte maggiore)* oder Algebra, oder auch aus Gründen, die weiterhin dargelegt werden sollen, als die Coss bezeichnete. Wie jene, so bietet auch diese, der Inbegriff einer Reihe von zum Aufstellen und Lösen von Gleichungen dienlichen Hülfsmitteln und Vorschriften, der Räthsel genug, sowohl was ihre Entstehung, als auch was ihr nach Ort und Zeit sporadisches Auftreten und ihre Entwickelung betrifft. Mich zog vor Allem die deutsche Coss an, und was ich bis jetzt über deren Schicksale erkundet, das erzählen die folgenden Blätter. Von den Zeiten, welche der Erfindung des Bücherdruckes vorangingen und aus welchen uns leider nur zu wenige Zeugnisse

*) „Das Rechnen im 16. Jahrhundert" in der Zeitschrift für Mathematik und Physik, hrsg. von Schlömilch, Kahl und Cantor, Supplementheft zur histor.-literar. Abtheilung des XXII. Jahrgangs. (Auch unter dem besonderen Titel: Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, I. Heft, Lpzg. 1877, S. 1—100.)

überliefert oder wenigstens allgemeiner zugänglich sind, führen sie den Leser zuerst in rascherem Laufe hindurch durch das fünfzehnte Jahrhundert und geleiten ihn dann langsamer hinüber ins sechzehnte, um ihn hier Schritt für Schritt die gewordene Gestaltung und die allmähliche Veränderung der Coss schauen zu lassen, um ihm die Männer namhaft zu machen, welche sich um deren Förderung verdient gemacht, und um ihm die Leistungen derselben einzeln klar zu stellen. So ist es im Wesentlichen die deutsche Algebra des fünfzehnten und sechzehnten Jahrhunderts, deren Schicksale ich hier zu erzählen gedenke; denn weiterhin, mit dem Anfange und dem Fortgang des siebenzehnten, ändert sich durch die gewaltigen Neuerungen der Ausländer ihr Charakter derartig, dass von einer specifisch deutschen Coss nachmals nicht mehr geredet werden kann.

2. Vorarbeiten. — So auffallend die Thatsache auch sein mag, so wahr ist es, dass die Geschichte der deutschen Coss bis heute noch keine eingehendere Darstellung erfahren hat. Da ich aber der meinigen den Charakter einer möglichst quellenmässigen zu geben wünschte, so war ich genöthigt, alles Material mir selbst erst aufzusuchen und herbeizuschaffen*); wer aber aus eigener Erfahrung etwa kennt, wie zeitraubend und mühsam und wie gar manchmal erfolglos solche Nachsuchungen sind, der wird auch nicht zu hart urtheilen, wenn er im Folgenden aus solchen Ursachen herrührend die eine oder andere Auslassung bemerken sollte: eine absolute Vollständigkeit ist ja niemals zu erreichen. — Ich hatte meine ganze Arbeit im Wesentlichen schon beendet, als die „Geschichte der Mathematik in Deutschland“ von C. J. Gerhardt erschien**), welche auf S. 51—87 das gleiche Thema erörtert; da ich aber die Geschichte der deutschen Coss systematischer behandelt hatte und da mir dieselbe auch einer noch eingehenderen Darstellung würdig schien, so glaubte ich meine Arbeit nicht unterdrücken zu müssen, um so mehr, als nur durch vereinte Arbeit das erwünschte Ziel erreicht werden kann.

3. Vorgeschichte. — Den Ursprung der Algebra anzugeben, ist bei dem heutigen Stande der Wissenschaft unmöglich; an drei verschiedenen und entlegenen Orten, zu ebensoviel verschiedenen Zeiten bemerken wir ihr Auftreten. In dem Sinne, wie wir heute Arithmetik und Algebra betreiben, finden sich diese Zweige der Mathematik zuerst bei Diophant, einem dem 4. Jahrhundert n. Chr. angehörigen Schriftsteller; „er ist der erste gewesen, welcher ohne geometrische Repräsentation, ja ohne jede Be-

*) Ich kann es hier nicht unterlassen, Herrn Prof. Dr. Cantor in Heidelberg abermals meinen besten Dank auszusprechen für die freundliche Bereitwilligkeit, mit welcher er mir wiederholte und langandauernde Benützung seiner Bibliothek gestattete.

**) Im 17. Bande der Geschichte der Wissenschaften in Deutschland, Neuere Zeit. München 1877.

ziehung zu einer solchen mit allgemeinen zusammengesetzten Zahlenausdrücken nach den bestimmten formalen Gesetzen der Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenzirung, Radicirung operirt, d. h. gerechnet hat." In mehrfacher Beziehung ihm überlegen zeigen sich die Inder, deren älteste uns bekannte mathematische Werke aus dem 5. Jahrhundert n. Chr. stammen; „ja, wenn man unter Algebra die Anwendung arithmetischer Operationen auf zusammengesetzte Grössen aller Art, mögen sie rationale oder irrationale Zahl- oder Raumgrössen sein, versteht, so sind die gelehrten Brahmanen Hindustans die wahren Erfinder der Algebra." Aber weder ihrem Einfluss noch auch dem Diophant's ist die Ausbreitung der Algebra zuzuschreiben; die geschichtliche Entwickelung macht vielmehr die Araber zu Vermittlern bei der Verpflanzung dieses Zweiges der Mathematik nach Europa.

Ihnen war schon frühe die Kenntniss der Algebra zugekommen: schon im Anfange des 9. Jahrhunderts verfasste der aus Kharizm im heutigen Chiwa stammende, daher auch mit dem Zunamen Alkharezmi benannte Mohammed ben Musa in Folge der Aufmunterung des Kalifen Al Mamun ein populäres Werk über Algebra, welches bei seinen Landsleuten dauerndes Ansehen genoss und auch Jahrhunderte später in Europa vielfach benutzt wurde, ja seinem Verfasser den Ruhm einbrachte der ursprüngliche Erfinder der Algebra zu sein. *„Al gebr w' al mukabalah"* benutzt er wiederholt als Bezeichnung für den ganzen von ihm behandelten Zweig der Mathematik, ohne selbst die Erklärung dieser Ausdrücke zu geben; doch lässt sich leicht der Sinn derselben feststellen, da er auch gewisse auf die Behandlung von Gleichungen bezügliche Operationen darunter verstanden wissen will: *al gebr* (von *gabar* = *restaurare, restituere* = herstellen, einrichten — daher auch heute noch in Spanien der Wundarzt *Algebrista* heisst) bedeutet das Versetzen eines negativen Gliedes einer Gleichung auf deren andere Seite, und *al mukabala* (von *kabala* = *opponere, comparare* = gegenüberstellen, vergleichen) bedeutet die Vereinigung gleichartiger Glieder beider Seiten mit einander. So ist es im Wesentlichen die Behandlung der Gleichungen ersten und zweiten Grades, welche Alkharezmi gibt, aber auch die Lehre von der Durchführung der Rechnungsarten mit Ausdrücken, welche die Unbekannte, deren Quadrat oder deren Quadratwurzel enthalten. Und in fast unveränderter Weise haben dann die Araber die Algebra auch in den folgenden Jahrhunderten behandelt, so dass ein im 16. Jahrhundert verfasstes und noch heutzutage in Vorderasien, besonders auch in Indien gebräuchliches und daselbst in hohem Ansehen stehendes Werkchen des Beha-eddin kaum die Stufe überschritten hat, auf welcher wir die algebraischen Lehren schon bei den ersten Schriftstellern der Araber finden.

Aber gleichwohl kann ihr Verdienst um die Ausbreitung mathematischen Wissens nicht hoch genug angeschlagen werden: ihr wissenschaftlicher Sinn

nahm überall die geistigen Errungenschaften der von ihnen unterworfenen Völker fertig wie nach Kriegsrecht an sich, und die weite Ausdehnung ihres Reiches begünstigte deren Verbreitung über die entlegensten Länder. So verdanken wir Europäer im Wesentlichen ihnen die Mittheilung unserer zehn Zahlzeichen und die Verwerthung derselben unter Benutzung des Gesetzes vom Stellenwerthe; so verdanken wir auch ihnen die Möglichkeit, dass strebsame Männer aus dem christlichen Abendlande in den Ländern am Mittelmeere algebraische Kenntnisse sich erwerben und dieselben ihren heimischen Volksgenossen dann mittheilen konnten.

Hatten doch schon im 12. Jahrhundert manche unter denen, welche des Studiums der Wissenschaften wegen nach Spanien gereist waren, die Kunst der Zahlzeichen mit nach Hause gebracht und so nach Frankreich und England die Arithmetik der Araber verpflanzt; warum sollte die Algebra, welche doch nur einen Theil der Arithmetik ausmachte, nicht auf demselben Wege zur Kenntniss der Nordländer gekommen sein? Anzeichen und selbst Beweise dafür sind vorhanden; aber unzweifelhaft waren es nur Wenige, die der neuen Wissenschaft sich annahmen, eine allgemeinere Verbreitung und eine häufigere Bekanntschaft ist wenigstens für die ersten zwei Jahrhunderte nicht zu behaupten.

In Italien dagegen bürgerte sie sich früh und dauernd ein: dem Pisaner Leonardo Fibonacci gebührt die Ehre, die Algebra nach Italien verpflanzt zu haben. Auf seinen weiten Reisen nach Aegypten, Syrien, Griechenland, Sicilien und der Provence hatte er Gelegenheit die Methode der Araber kennen zu lernen, und indem er diese sowie seine eigenen Untersuchungen in einem grossen ächt wissenschaftlichen Geist verrathenden Werke (1202) niederlegte, gab er durch dieses den Hauptanstoss zur Einführung unserer heutigen Rechenweise und im Anschluss an diese auch der Algebra in Italien. Und nach ihm fand diese letztere während des 13., 14. und 15. Jahrhunderts dauernde Pflege in Italien, da alle italienischen Städte ihre Mathematiker hatten (Libri II, 205); eine kräftige Fortentwickelung aber, ein reges Weiterbauen auf dem so schön gelegten Grunde hat für jene Zeit die Geschichte unserer Wissenschaft leider nicht zu verzeichnen. „Mit Erstaunen nimmt man wahr, dass das Pfund, welches einst Leonardo der lateinischen Welt übergeben, in diesen drei Jahrhunderten durchaus keine Zinsen getragen hatte; wir finden, von Kleinigkeiten abgesehen, keinen Gedanken, keine Methode, welche nicht aus Fibonacci's *liber abbaci* oder der *practica geometriae* bereits wohl bekannt oder ohne Weiteres abzuleiten wäre. Der einzige Fortschritt kann in einer etwas grösseren Routine bei der Lösung von Aufgaben, der geringeren Breite in der Ausführung numerischer Rechnungen, sowie in dem Anfange zu einem algebraischen Calcül gefunden werden“ (Hankel S. 349). Am besten ersieht man dieses und was etwa von Fortschritten zu berichten ist

beim Studium eines dem Ende des 15. Jahrhunderts angehörigen Werkes, der *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni e Proportionalità* des Minoritenmönches Lucas Pacioli (1494). Wenn auch nicht immer unter Beachtung pädagogischer Anforderungen, so doch vielfach mit Geschick stellt dieses Werk in der That die ganze Summe des Wissens jener Zeit in den genannten Disciplinen dar und ist deshalb auch die Grundlage geworden, auf der die bedeutenden italienischen Algebristen des 16. Jahrhunderts weiter gebaut haben. Denn mit Anfang dieses neuen Zeitabschnittes kommt in der Behandlung der Algebra ein neuer Geist zur Geltung, die seit Jahrhunderten überkommene Schranke zwischen den Gleichungen des zweiten und des dritten Grades wird niedergerissen, und die bekannten glänzenden Leistungen von Ferro, Tartaglia, Cardanus und Ferrari sind die Ausgangspunkte einer Entwickelung der Algebra, welche seitdem nimmer zum Stillstande gekommen ist.

Während so in Italien die Algebra im 15. Jahrhundert noch in einer Weise behandelt wird, welche mit der seit Leonardo Fibonacci überkommenen nach Inhalt und Form nahezu übereinstimmt, dann aber bis zur Mitte des folgenden Jahrhunderts der Inhalt eine wesentliche Bereicherung erfährt, und während sie in der pyrenäischen Halbinsel fast gar keine, in England, wie es scheint, eine unbedeutende Pflege findet, in Frankreich aber eine von dem italienischen Muster durchaus nicht verschiedene, gewährt sie in Deutschland, seitab von der Heerstrasse, einen Anblick, der bei oberflächlichem Zusehen für identisch mit dem der italienischen Algebra gehalten werden könnte, der dies aber durchaus nicht ist; dem Inhalte nach bietet auch die deutsche Algebra des 15. und 16. Jahrhunderts nicht mehr als die soeben genannte, aber die Form ist eine wesentlich verschiedene.

Und wenn die Frage nach dem Zustande der deutschen Mathematik jener Zeit an und für sich schon von grossem Interesse ist, so kann sich dieses nur steigern, wenn wir den eben berührten Unterschied beachten. Deshalb scheint es mir auffallend, dass die deutsche Algebra jener Zeit, die Coss, bis jetzt, so weit ich weiss, noch keine eingehendere Darstellung gefunden hat; ich werde im Nachfolgenden versuchen, im Verhältnisse zu den mir zu Gebote stehenden Mitteln eine solche zu geben, werde aber zur leichteren Orientirung einen Ueberblick über den geschichtlichen Verlauf und die zur Betrachtung kommenden Persönlichkeiten vorausschicken.

4. Ueberblick. — Nachdem die mathematische Wissenschaft von arabischem auf frischen europäischen Boden verpflanzt war, hätte man erwarten können, dass sie sich schnell und kräftig weiter entwickeln würde. Die Wirklichkeit zeigt leider ein anderes Bild, einen fast vollständigen Stillstand allerorts. Die Bedürfnisse des praktischen Lebens wurden befriedigt durch das von Alters her überkommene Fingerrechnen und durch das

Rechnen auf Linien, welches der Benützung des Abacus gefolgt war; die Klöster fanden grossentheils ein Genüge an der Mittheilung der Regeln des *computus,* und wenn sie ein Uebriges thaten, so war dies eine Erklärung der arithmetischen und geometrischen Elemente des Boethius; die Universitäten aber, welche mit dem beginnenden 13. Jahrhundert plötzlich und zahlreich zunächst in den romanischen Ländern gegründet werden, haben vollauf zu thun mit der Erklärung von Aristoteles' Schriften, und wo gleichwohl etwa die Mathematik in den Rahmen der Vorlesungen sich aufgenommen zeigt, da sind es die ersten Bücher, oft nur das erste Buch des Euklid, die Sphära des Sacrobosco, vielleicht auch noch die wunderbaren Eigenschaften und Geheimnisse der Zahlen, der Inhalt der griechischen Arithmetik und deren Auswüchse, welche behandelt werden. Dies ist das Bild, welches die Mathematik des späteren Mittelalters bis in die Mitte des 15. Jahrhunderts und auch an manchen Orten darüber hinaus uns darbietet; dass hier der Boden für eine lebendigere Betreibung algebraischer Studien nicht vorhanden war, ist sofort verständlich.

Eine Besserung der Zustände scheint um den erst angegebenen Zeitpunkt zuerst in Deutschland eingetreten zu sein und der Anstoss hierzu ist, soweit wir dies zu verfolgen im Stande sind, von der Wiener Universität ausgegangen. An diese, deren Gründung in das Jahr 1364 fällt, wurde nämlich im Jahre 1389 der gewesene Vicekanzler der Pariser Universität, Heinrich von Hessen (Henricus Hassianus, gest. 1397) als Professor der Theologie und Astronomie berufen und hat, wie wenigstens Ramus bezeugt, „als der Erste die Kunst der Mathematik von Paris nach Wien übertragen". Dass dieselbe dann in Johann von Gmünden (1375 oder 1385—1442), in dessen Schüler Georg Peurbach (1423—1461) und wiederum in dessen Schüler Regiomontanus (1436—1476) ihre würdigen Vertreter fand, ist bekannt genug. Und eben der Letztgenannte ist es, von welchem als dem Ersten wir zuverlässig wissen, dass er die Algebra verstand, der selbst uns Kunde gibt, dass und wie er sie verwandte.

Bei ihm findet sich auch diejenige Bezeichnung unserer Wissenschaft, welche seit Leonardo und schon aus der Zeit vor diesem*) gebräuchlich geworden war: *Ars rei et census.* Die Araber hatten nämlich die unbekannte Grösse als *schei* (= Ding = Etwas) und deren Quadrat als *māl* (= Vermögen oder Besitz) bezeichnet und in wörtlicher Uebersetzung hiervon benutzten dann die Lateiner des Mittelalters dafür die Wörter *res*

*) Chasles sagt, dass Libri Unrecht habe, wenn er Fibonacci den erstmaligen Gebrauch der Wörter *res* und *census* zuschreibe, „*puisque dans les traités d'algèbre antérieurs au sien, on trouve les mêmes expressions*", und Chasles führt dann auch Belege aus den lateinischen Uebersetzungen von Mohamed ben Musa und aus einem durch Gerhard von Cremona übersetzten Werke an (*Comptes Rendus des séances de l'Acad. de Paris,* 1841, Bd. 13, S. 607).

und *census (= quidquid fortunarum quis habet)*, so dass sie die von den Arabern nach zwei Rechnungsoperationen benannte Wissenschaft nun auch nach den beiden ersten Potenzen der Unbekannten mit dem Namen *Ars rei et census* belegten. Aus der Stelle, wo Regiomontan diese Bezeichnung gebraucht, ist zugleich auch zu ersehen, dass zu seiner Zeit dieser Zweig der Wissenschaft ausser ihm, der auf der Höhe mathematischer Bildung stand, nur Wenigen genügend bekannt war; aber die Thatsache, dass man sich mehrfach damit beschäftigte, ist nicht abzuleugnen. Verschiedenes lässt sich dafür als Beweis beibringen. Einmal spricht Regiomontan selbst freilich mit Unglauben von Solchen, welche sich rühmen, eine ausgebildetere algebraische Kunst zu besitzen; dann aber hat Gerhardt in den letzten Jahren Manuscripte aufgefunden, welche darthun, dass man sich um die Mitte des 15. Jahrhunderts damit abgab, einerseits die vorhandenen Quellen sich nutzbar zu machen durch Uebersetzungen, anderseits auch schon in mehr selbständigen Ausarbeitungen die Ergebnisse solcher Studien niederzulegen. Gedruckte Werke freilich, aus welchen wir uns Kunde von derartigen Bestrebungen verschaffen könnten, bringt erst das Ende des Jahrhunderts hervor. Am frühesten noch begegnen wir solchen Spuren in einem in mancher Beziehung höchst interessanten Büchlein „Behende vnd hubsche Rechenung auf allen kauffmannschaft", welches Joh. Widman von Eger i. J. 1489 zu Leipzig erscheinen liess. Eingehenderes für später versparend hebe ich nur hervor, dass auch er sofort in den ersten Zeilen seiner Widmung darauf hinweist, wie „die aldē meyster der kunst der Rechnūg Irenn nach komendē schwere Regeln̄ tzuuornemen vn muesam tzuuerfuren gelassen haben Alsz do seynn die Regel Algobre ader Cosse genant", dass also auch zu seiner Zeit an eine ausgebreitetere Bekanntschaft der Algebra noch nicht gedacht werden darf. Aber auch der eben gebrauchte Name der letzteren verdient Hervorhebung, um seine Erklärung hier sofort beizufügen.

Als nämlich in Italien im 14. Jahrhundert die Landessprache die bis dahin übliche lateinische verdrängte, wurden auch die vorhin angegebenen Benennungen italianisirt: *res* ging nun über in *cosa* oder *cossa*, *census* in *censo*, und ausser den beiden gebräuchlichen Namen erhielt so unsere Wissenschaft nun noch einen dritten, den der *arte* oder *regola della cosa.* Und bei dem vielfachen Besuche Italiens durch Ausländer verbreitete sich dann diese Benennung auch nach den übrigen Ländern Europas, zunächst in barbarisch latinisirten Formen als *ars cossica*, *ars cosae* oder *cossa*, dann auch aus diesen abgeleitet in den gleichklingenden Wörtern, welche der bezüglichen Landessprache angepasst wurden*). „Von dan̄en kompt das es von den Teutschen die Coss genent wirt" (Rudolff).

*) So handelt La Roche in seiner „*Larismethique nouuellement composee*" vom Jahre 1520 im 6. Abschnitt (fol. 42[r]) „*de la regle de la chose et de la quantite*"

Von deren Regeln sagt nun Widman, dass sie „dē gemeynem volck tzu schwer verdrossen vnd vnbegreyfflich seyn̄", so dass auch dieses Zeugniss mit dem des Regiomontan übereinstimmt. Ein hübsches Streiflicht fällt auf diese Aeusserung aus einer gelegentlichen Bemerkung, welche sich bei Stifel findet*). Ein Mönch *(quidam iniquus monachus)* hatte nämlich behauptet, die Algebra lehre nichts Anderes als auch die sog. Mischungsregel, und in Erinnerung hieran lässt sich der sonst so sanftmüthige und friedfertige Stifel zu dem Ausspruche hinreissen: „ . . . *recte asinus dici mereatur, qui pronunciare audet Algebram nihil docere aliud quam ea quae doceat regula Alligationis, siue ex ignorantia siue ex malitia proficiscatur talis affirmatio.*" Zu dem vorhin festgestellten Grunde für das geringe Bekanntsein der algebraischen Regeln gesellt sich nun aber noch ein anderer, dessen Vorhandensein auch schon aus den analogen Erscheinungen im Gebiete verwandter Wissenschaften jener Zeit und selbst noch des folgenden Jahrhunderts hätte vermuthet werden können, welcher uns übrigens auch durch unmittelbar in diesem Sinn gethane Aeusserungen Mitlebender bestätigt wird. Es ist die Geheimthuerei, welche damals, im direkten Gegensatz zur heutigen Sitte, die Meisten veranlasste ihr Wissen für sich zu behalten und höchstens ihr Können durch Stellen von Aufgaben anzudeuten, deren Lösung der Gegner zu finden hatte, freilich manchmal auch unter Umständen, welche zu dem Glauben berechtigen, dass der die Frage Stellende sie selbst nicht zu beantworten wusste.

Dieses Geheimthun bezeugen uns für unser Gebiet die alsbald noch zu erwähnenden Cossisten Rudolff, Riese und Stifel. Indem der Erstere von den schönen Regeln der Coss spricht, sagt er (in der Widmung seines Buches), dass sie „zum teil (als ich gedenck) mer durch neidische hinter-

---

und verkündet deren Ruhm in den Worten: „*Ceste regle est de si merueilleuse excellēce quelle excede et surmonte toutes les aultres | car elle faict tout ce que les aultres font | et si faict oultre et par dessus innumerables comptes de inextimable profundite | et pour ce est appellee regle de la chose ou regle de . 1 . qui sont principes transcendent pour ce quelle transcende toutes les regles darismethique. Maistre nicolas chuquet en son triparty lappelle la regle des premiers qui vault autant a dire comme la regle des vnites ou de . 1 . aulcunes nations lappellent algebra | et les aultres almucabala | et a brief parler ceste regle est la clef lentree et la porte des abismes qui sont en la science des nombres.*"

So betitelt Recorde seine Algebra vom Jahre 1557 als „*The Whetstone of Witte, which in the second parte of Arithmetique: containing the extraction of rootes: The Cossike Praktise with the Rule of Equation: and the Workes of Surde Numbers*".

So spricht Rudolff schon in dem Titel seines seltenen Werkes (v. J. 1525) von den „kunstreichen regeln Algebre | so gemeiniklich die Coss genen̄t werden" und erwähnt in der Vorrede, dass „die alten . . haben geschribē ein subtile kunst | so . . . von walhē (= Wälschen) de la cose geheissen würt".

*) *Arithmetica integra*, fol. 227v (cf. fol. 322r).

haltung dañ von wegen das sie schwer zu verstan vn müsam zu verfüren | bei vnsern zeitē so gentzlich geschwigen | das auch die namen solcher regln bei wenigē erkent werden . . . .", und am Schlusse seines Buches: „Dweyl es nun gen tal geet | hat mich für gut angesehen | damit dise kunst nit gar in vergessen keme | sie durch müglichen vleisz zu eröffnen . . . Wo nit den yetzigē | vermeyn ich doch den nachkom̄enden mit solchen gedient." — Riese thut sich etwas darauf zu gute, dass er seinen Beispielen auch stets die Probe beifügt: „Darzu hab ich sie alle rechtfertigett vnnd am leichtestenn in tag gebenn mit anhangenden probenn, Der si alle Zeit vormittenn (= vermieden) habenn, sonder heimlich auch vorborgen Die fragstuck gesatzt, welche sie ane Zweyfel fur eynen grosenn schatz der Zal gehaltenn habenn." — In gleicher Weise äussert sich auch Stifel (1545): *„Sufficiant ista pro indicio Algebrae Germanicae, ad obsequium illis praestitum, qui putant Algebram non posse consequi absque cognitione Linguae latinae, putantque eam esse difficiliorem quam sit regula Falsi etc. Deinde ex huiusmodi operationibus optime ostendi potest, qua ratione tot calculandi regulae ad nos deuolutae sint. Scilicet fuerunt illusores ingeniorum, qui delectati opinione hominum existimantium, ipsos esse singulari industria inueniendi regulas praeditos, et hi occultata earum fonte, tales riuulos ad nos deduxerunt. Mire enim quosdam (iis similis) uri et indignari sensi, quod Christophorus prodiderit Algebram tanta fide."* *) Und ein Jahrzehnt später finden wir bei Stifel nochmals ein Anklingen an die beregte Tonart; er vertheidigt Rudolff gegen den Vorwurf, mit Unrecht sein Lehrbuch der Coss veröffentlicht zu haben und ruft dabei aus: „. . . wem hat er damit schaden gethan? Niemands | den dem Neyd | der vns nicht gōnet den lust | so wir dran haben. Oder vileicht der Hoffart | die gern allein wolt fur köstlich gesehen sein . . . gar heymlich vnd thewr ist die Coss gehalten worden | bey denen die sie gekundt haben | ehe Christoff Rudolff sie vns hat mitgeteylet | . . . Aber wie ich disen flucher hab gekennet | ists jm zu thun gewesen darumb | das Christoff Rudolff die Coss so gemein hat gemacht | vnd bewisen | das sie nicht so schwer sey zu lernen wie etzlich fürgeben. Das ists orth | da das lamb dem Wolff das wasser hatte trüb gemacht." **)

Unter solchen Verhältnissen, wie sie durch die angeführten Aussprüche von Zeitgenossen charakterisirt sind, darf es nicht Wunder nehmen, dass das Wissen von algebraischen Dingen nicht verbreiteter war; es konnte dies nicht sein, da ja der Einzelne auf sich angewiesen, ein Erlernen durch Andere fast gänzlich ausgeschlossen war. Grossen Dank verdienen demnach die Männer, welche Ehrgeiz und persönlichen Eigennutz bei Seite

---

*) *Arithmetica integra*, fol. 272v.

**) Stifel's Ausgabe von Chr. Rudolff's Coss v. J. 1554, Vorrede.

setzend, ja der Sitte ihrer Zeit entgegentretend sich der Mühe unterzogen, was sie wussten und was sie erfahren konnten, zusammenzustellen und so allmählig die Wege zu ebnen zur Abfassung von Lehrbüchern der Algebra. Dass sofort vollendete Leistungen zu Tage treten würden, war demnach nicht zu erwarten und solche sind auch nicht zu verzeichnen; aber es wäre Unrecht, wie solches schon manchmal begangen worden, nun sofort den Stab zu brechen über die Leistungen jener Zeit und hervorkehren zu wollen, wie wir Alles so herrlich weit gebracht. Nicht tadeln soll eine verständige Geschichtsbetrachtung, sondern mit dem geeigneten Massstabe messen und so Verständniss erwecken für die geschichtliche Entwickelung und die Bedingungen, aus und unter welchen jene erwachsen ist.

Sehen wir uns nun um nach den Männern, welche in Deutschland an der Spitze der erwähnten Bewegung stehen, so sind es nur wenige Namen, deren wir Erwähnung thun müssen. Und nicht weniger als drei Jahrzehnte nach Abfassung von Widman's Rechenbuch müssen wir einfach überschlagen, um zu den Anfängen einer besseren Zeit zu gelangen.

Hans Bernecker zu Leipzig und Hans Conrad zu Eisleben und St. Annaberg sind wohl, soweit unsere Nachrichten reichen, die Ersten, welche im zweiten Jahrzehent des 16. Jahrhunderts sich eifriger der Coss annahmen und ihr Wissen mitzutheilen nicht verschmähten: der erstere fertigte Exempel an *) und vom zweiten wird berichtet **), dass er für Mittheilung der Lösung einer Aufgabe „eynem schwartzen munich prediger ordens, welcher aquinas genant wartt 1 fl gebenn" — Beweis genug dafür, dass es ihm ernstlich um die Sache zu thun war, aber auch für das, was ich vorhin über die allgemeinen Verhältnisse des Lehrens und Lernens jener Zeit sagte.

Während die beiden Genannten schriftliche Aufzeichnungen nicht hinterliessen, wird dieses dagegen überliefert von einem dritten ebenfalls „in der Zahl sehr erfahrenen" Mathematicus, von dem Magister Andreas Alexander: ob sein Buch sich erhalten, weiss ich nicht ***). Dagegen

*) Die Coss von Adam Riese. Hrsggb. von Berlet als Beigabe zum „Bericht über die Progymnasial- und Realschulanstalt zu Annaberg". Annaberg 1860. S. 27.

**) ib. S. 30. — Die betreffende Aufgabe heisst: Item Drey kauffenn 1 pfertt vmb 12 fl. keyner vormugens allein Zubezalen. *A* spricht zu *B* und *C*, leyhe mir itzlicher $\frac{1}{2}$ seynes geldes, so wil ich das pferdt bezalen. Spricht *b* zum *c* vnd *a* gebt mir $\frac{1}{3}$ so wil ich das pferdt vergnugen. Nachdem spricht *c* zum *b* vnd *a* gebt mir beyde $\frac{1}{4}$, so wil ich das pferdt kaufenn. Nun frage ich, wiuil itzlicher in sunderheitt gehabt hab. Machs, kommen $3\frac{9}{17}$ souil hat *a*, *b* hat $7\frac{13}{17}$ und *c* $9\frac{3}{17}$ fl."

***) Berlet sagt (a. a. O. S. 5), dass dieses Buch ein lateinisches gewesen sei. Wenn sich diese Aussage aber nur auf Riese's Worte gründen sollte, so müsste ich ihr widersprechen; mir scheint aus Riese's Worten (a. a. O. S. 9 „Ankündigung") viel eher hervorzugehen, dass es in deutscher Sprache abgefasst war. Sollte Andreas Alexander vielleicht später noch ein lateinisches Bnch geschrieben haben!? (vgl. a. a. O. S. 4 unten).

liegt vor mir ein im Jahre 1518 erschienenes Büchlein von Henricus Grammateus (= Heinrich Schreiber von Erfurt *), welches wohl als das erste Lehrbuch der deutschen Algebra bezeichnet werden kann und seine Entstehung der Anregung durch die Wiener Hochschule verdankt**). Dasselbe führt sich ein unter dem Titel: „Eyn new künstlich behend vnd gewiss Rechenbüchlin | vff alle Kauffmannschafft. Nach Gemeynen Regeln de tre. Welschen practic. Regeln falsi. Etlichen Regeln Cosse . . . Buchhalten . . Visier Ruthen zu machen." Ein Zeitgenosse (Riese, vgl. Berlet S. 10) urtheilt über dessen Verfasser, dass er ein „wol erfarner wolgelarter Magister vnd Mathematicus gewesen . . Der in lateinischer Zungen erfarenn, die Bucher Euclidis vnd andere Zur sach dienendtt gelesenn." Sein nur 94 Blätter in klein Octav umfassendes Büchlein wollte er „den vnwissendē vⁿ sondern libhabern der kunst | an den tag bringen | damit nit alleyn die kunst | sonder auch der nutz darausz vernom̄en vnd empfangē würde"; es behandelt (auf 34 Blättern) das gewöhnliche Zahlenrechnen mit Ziffern und auf Linien, schliesst (auf weiteren 29 Blättern) daran an „die Regulā Falsi mit sampt etlichen Regeln Cosse" (wobei auch die Rechnungsarten mit ganzen und gebrochenen algebraischen Quantitäten) und erläutert deren Gebrauch durch Behandlung von 26 Aufgaben, deren 15 erste jeweils sowohl „durch regulam falsi" als auch „durch Coss" gelöst werden, während die 11 übrigen nicht zur „ersten Regel Coss" gehörenden ***) nur „durch Coss" ihre Lösung finden; die weiterhin nachfolgende „Arithmetica applicirt oder gezogen | vff die edel kunst Musica," sowie die Anweisung zum „Buchhalten durch Zornal Kaps vnd Schuldtbuch" und zur „Künstlich zubereytung der Visierruten durch den Quadrat vnd Triangel" haben wir hier nicht weiter zu beachten. So hat Grammateus in Kürze zwar, aber immerhin verhältnissmässig deutlich die Coss behandelt und verdient besondere Hervorhebung auch wegen der häufigeren Benutzung der + und — Zeichen und wegen der schon etwas ausgedehnteren Anwendung allgemeiner Zahlbezeichnung; doch wollte er, wie er selbst sagt †), noch eine ausführlichere

---

*) Nach Berlet: Riese's Coss a. a. O. S. 10.

**) Grammateus war ein Schüler von Tanstetter (1480—1530); dieser selbst ein Schüler von Stöberl (Stiborius; (?)—1515 etwa), welcher von einem Nürnberger Mathematiker Aquinus Dacus unterrichtet war. Letzterer ist dieselbe Person wie der im Texte erwähnte Aquinas. [Nach Gerhardt, Monatsber. d. Berl. Akad. für 1867, S. 46.]

***) Ueber den Sinn dieses Ausdrucks vgl. unten.

†) In der Widmung seines Büchleins an „Johansen Tscherte | einem des Senats zu Wien vnd Hospitalmeyster daselbst" heisst es: Wo ich das [nämlich die Gewogenheit und den Schutz seines Gönners] spüren würde | Bin ich geursacht ander künst der Arithmetic und Geometrei (als die vbrigen regeln Cosse) welche dann nit alle in diesem Buch sein beschrieben | darin̄en wund'barliche verborgne ding begriffē | auch von wag vnd gewichtē | in den truck zu geben | . . . ."

Darstellung veröffentlichen, ist aber wohl nicht dazu gekommen, vielleicht durch astronomische Arbeiten davon abgehalten *).

Aber das Bedürfniss nach solchen Darstellungen war unzweifelhaft vorhanden, wie aus mehrfachen Andeutungen und selbst Aeusserungen der Zeitgenossen zu entnehmen ist. Es ist deshalb begreiflich, wenn wir lesen, dass „dem Achtparnn Hochgelartenn Ern Georgio stortzen, Doctori der Ertzney wonhafftig zu Erffurtt“ um das Jahr 1524 der Gedanke kam, den wohl schon damals bekannteren Adam Riese (1492—1559) aufzufordern, eine hierauf bezügliche Schrift zu verfassen.

Dieser nachmals so berühmte und heute noch im Munde des Volkes fortlebende „Rechenmeister“, wie er selbst sich nennt, war jedenfalls schon vom Jahre 1515 an, also seit seinem 23. Lebensjahre zu Annaberg in Sachsen als Bergbeamter thätig, hatte auch schon vor 1524 „etzliche Jar schul gehalten“ und bereits 1518 sein kleineres Rechenbuch veröffentlicht, welches seinen Ruhm begründete **). An diesen nun wendete sich Dr. Stortz und hat ihn „offtt vnd digk angeredtt, vleysz fur zu wenden, etwas dem gemeynen man nutzlich in trugk zu geben, darneben angehefft wie etlich vil geschriebnn vnd so schwere vnderweisung gebenn, sonderen im anfangk, Das viel Zu lern abgelaszen, auch ihr wenigk mit geschafft.“ Und wenn sich solche Klage und Aufmunterung vielleicht auch mehr auf das gewöhnliche Rechnen bezog, so unterliess deren Urheber doch auch nicht die Bitte an Adam Riese, „vber die Algorithmi, so Algebrasz gesatzt, Zu beschreibenn, Dañ die selbigenn biszher so schwer gesatzt in lateinischer Berichtung, Das selten eyner darausz verstand hett fassen mugenn“. Riese aber hat sich eine Zeit lang „des alle weg gewidertt“, und auf Andere, zumal auf Henricus Grammateus aufmerksam gemacht „der kürtzlich angefangen Zu schreybenn, auch etwas von der Coss berurtt“, hat aber endlich doch seines Gönners „begern angesehen vnd zu hertzen genumen“ und hat eine „Beschreybung“ aufgesetzt, um auch die „vil vnd mancherley fragen so im Zu gekommen nicht Zubergenn, Wie uil bisz hero gethan“.

Diese Arbeit von Riese, deren Titel einfach „Die Coss“ lautet und welche er um Ostern 1524 bereits vollendet hatte, beweist, dass wir seinen Titel als Rechenmeister nicht zu eng fassen dürfen, da er lange vor Stifel und Cardanus und ohne Christoph Rudolff zu kennen sich an seine Aufgabe machte, welche kein gewöhnliches Mass mathematischen Wissens voraussetzte. Und dass er dadurch der auch nach seinem Zeugniss wenig verbrei-

*) In Riese's Widmung seiner Coss (Berlet S. 10) wird als Grund, weshalb Grammateus nicht um Abfassung eines Buches über die Coss angegangen wird, das Folgende angegeben: „Aber eur achtparkeit hat mich solchs nicht erlasen wolln, sondern vormelt wie berurrter Heinrich schreiber Mathematicus vnd magister sich vnderstehe der Astronomey itzt Zu dieser Zeit . . .“

**) Vgl. hierüber mein „Rechnen im 16. Jahrhundert“ S. 14.

teten Kenntniss der Coss aufhelfen wollte, geht aus seinen Worten hervor, wenn er von seiner Arbeit sagt, dass er sie „vffs allerleichtest vnd gruntlichst wol Zu begreyfen gefertigt“ und wenn er hofft, dass durch dieselbe „den die sprechen durffenn, sey Zu schwer Zu begreyffen . . . das maul soll den selbigen, se sie es lesenn Zu gestopffet werden.“ Freilich enthält diese Riese'sche Coss nicht einmal das Rechnen mit den Symbolen für die verschiedenen Potenzen der Unbekannten und nichts über das Rechnen mit Wurzelgrössen, sondern nur die Anleitung zur Auflösung von Gleichungen des ersten und zweiten Grades und eine Reihe von Beispielen für gewisse Fälle dieser Gleichungen. Gleichwohl ist sie, wie wir unten im Einzelnen nachweisen werden, von hoher Bedeutung, freilich nur für uns Spätgeborene, die wir die Entwickelungsgeschichte der Algebra studiren, und nicht für Riese's Zeitgenossen; denn sein Werk blieb Manuscript und unbekannt, bis es Berlet i. J. 1855 in der Kirchen- und Schulbibliothek zu Marienberg wieder auffand und der Hauptsache nach zum Abdruck brachte.

Eine ganz hervorragende Bedeutung muss dagegen der Coss von Christof Rudolff (aus Jauer in Schlesien) zugeschrieben werden*). Ueber die Lebensverhältnisse dieses nachmals viel citirten Mannes ist uns ausser dem, dass er in Wien lebte, weiter Nichts überliefert**); sein Werk wurde in Strassburg gedruckt, erschien im Januar 1525***) und erzielte bald einen durchschlagenden Erfolg. „In zwen Teyl geteylt beschleust der erst acht Algorithmos, mit etlichen andern vorleufflen so zu Erklerung der Cosz Nottürfftig sind. Der ander zeygt an die Regeln der Cosz, je eine in sonderheyt erkleret, mit vil vnd mancherley schönen Exempeln.“

Ueber seine Quelle spricht sich Rudolff selbst aus in folgenden Worten: „Ich hab von meister Heinrichen | so grammateus genannt | der Cosz

*) Der Titel dieses seltenen Buches ist: „Behend vnnd Hübsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre | so gemeiniklich die Coss genent werden. Darinen alles so treulich an Tag geben | das auch allein ausz vleissigem Lesen on allen mündtlichē vnterricht mag begriffen werden. Hindangesetzt die meinug aller dere | so bisher vil vngegründten regeln angehangen. Einem jeden liebhaber diser kunst lustig vnd ergetzlich Zusamen bracht durch Christoffen Rudolff von Jawer.“

**) Woher Rud. Wolf (Gesch. d. Astronomie S. 340) die Angabe hat, dass Rudolff 1499 geboren wurde, weiss ich nicht; Wolf sagt auch (ib.), dass Rudolff etwa 1545 zu Wien starb.

***) Mehrfach findet sich das Jahr 1524 angegeben, was aber nur darauf beruhen kann, dass Stifel in seiner Bearbeitung von Rudolff's Coss jenes Jahr anführt. Rudolff selbst fixirt 1525 und zwar schon in seinem im Jahre darauf zu Wien erschienenen Büchlein „Künstliche Rechenung u. s. w.“ Uebrigens steht auch am Ende von Rudolff's Coss selbst zu lesen: *„Argentorati Vuolfius Cephaleus* (= Wolffen Koppfl) *Joanni Jung, studio et industria Christophori Rudolf Silesii, excudebat. Manus extrema operi data, mense Januario. Anno supra sesquimillesimo uicesimoquinto.“*

anfengklichen Bericht empfangen. Sag im darub danck. Was ich weyters | über entphangenen Bericht | durch embsigen vleyss zu gemeynē nutz | geschaffen | wil ich im (als meinem preceptor) zu indiciren heimgesetzt haben. Brauch sich (= bemühe sich) ein anderer als ich than habe | so wirt die sach gemeert." Hieraus erklärt sich denn auch die Aehnlichkeit beider Bücher *), was äussere Anordnung betrifft, während der innere Gehalt von Rudolff's Coss die seines Lehrers um ein Ziemliches übertrifft, vorab durch die aufgenommene Behandlung der Irrationalen und durch die mehr als 16 fach grössere Reichhaltigkeit an meist anlockenden und durchaus gelösten Aufgaben der „Speculation" wie der „Praktika". Gerade dieser letztere Umstand, welcher so recht die Anwendungsfähigkeit und zugleich die Art des Gebrauches der cossischen Regeln einem Jeden unmittelbar vor Augen führte, musste in der That die Erreichung des Zieles ermöglichen, welches Rudolff bei Abfassung seines Buches sich gesteckt hatte und welches er selbst aussprach, indem er dem Titel desselben beifügte: „Darinen alles so treulich an tag gegeben | das auch allein aus vleissigem lesen on allen mündtlichē vnterricht mag begriffen werden." Hierin findet es denn auch seine Erklärung, dass das Buch überall bekannt wurde, dass der Löwener Arzt und Mathematiker Gemma Frisius z. B. auf dasselbe Bezug nahm und dass man in Rom im Jahre 1546 eine lateinische Uebersetzung davon veranstaltete **), ja dass es in Deutschland selbst noch nicht drei Jahrzehnte nach seinem Erscheinen, wie verbürgte Nachrichten uns belehren ***), selbst zum drei- und vierfachen Preise nicht mehr zu erlangen war — ein Erfolg, dessen in unsern Tagen höchstens Steiner's „Systematische Entwickelung" oder Chasles' „Geschichte der Geometrie" sich berühmen können. Besondere Hervorhebung verdient es, dass Rudolff möglichst durchgehends die Zeichensprache benutzt, während früher Vieles noch durch Worte ausgedrückt wurde, „nit durch charakter", wie er selbst sagt. Da Rudolff in seinem Werke vom Jahre 1525 das gewöhnliche Zahlenrechnen nur als „vorleufflen so zur Erklerung der Cosz Nottürfftig" behandelt hatte, sah er sich veranlasst, „den anfang vorgemelts büchleins widerumb zu handen zu nemen" und in weiterer Ausführung zu veröffentlichen (1526) †), und

*) Hienach hat also Dr. Drechsler Unrecht, wenn er [Scholien zu Chr. Rudolph's Coss, Beilage zum Programm des Vitzthum'schen Gymnasiums zu Dresden vom Jahre 1851, S. 6] von Rudolff's Buch als „dem ersten in deutscher Sprache gedruckten algebraischen Werke" redet.

**) Nach Chasles' Geschichte der Geometrie, deutsche Uebers. S. 638. Der Uebersetzer war Christoph Auver.

***) Stifel, Ausgabe zu Rudolffs Coss, Vorrede.

†) Titel: „Künstliche rechnung mit der ziffer vnd mit den zal pfenigen | sampt der Wallischen Practica | vnnd allerley vortheyl auff die Regel de Tri .... Alles durch Christoffen Rudolff zu Wien verfertiget. — Ich füge hier gelegentlich bei, dass in der ersten Ausgabe das Zahlwort „Million" sich nicht findet.

dabei sprach er sich dahin aus, auch „den hinderstelligen theil seines offt gemelten Buchs die Cosz inhaltend | widerumb herfürzuziehen . . . vnd auch mit sichtigklicher demonstration | einem yeden verstendig | auch mit vorhin vnerhörten künsten gespickt | auf ein newes mittheilen“ zu wollen, wie er ja auch schon in seinem ersten Buche *) versprochen hatte, später „in kürtz dise regeln Algebre | in latein . . . in druck zu geben“ und dann die Beweise beizufügen; dass er dieses sein Vorhaben ausgeführt, ist höchst unwahrscheinlich, da nirgends dessen Erwähnung geschieht, Neues oder Eigenthümliches würden wir wohl auch kaum erhalten haben.

Viel mehr zu bedauern ist, dass Petrus Apianus (= Bienewitz), „der Astronomei an der hohen Schule zu Ingolstadt Ordinarius“, seinen Vorsatz nicht ausgeführt hat, ein Lehrbuch der Coss zu veröffentlichen. Dass er dies wollte, ja dass er ein solches vielleicht schon ausgearbeitet hatte, geht aus einer Stelle der Vorrede zu seinem Rechenbüchlein vom Jahre 1532 hervor, wo er sagt: „Die Regulas Cosse mit sampt dem Centiloquio | darin̄e der kern ligt | werd ich in kürtzer zeit (wil Got) auch in druck geben“. Nach der Leistung zu urtheilen, welche uns in eben diesem Rechenbüchlein vorliegt und welche in mehrfacher Beziehung unter gleichzeitigen Leistungen Anderer hervorragt, wie ich dies anderwärts **) besprochen habe, wäre seine Coss eine vorzügliche Handhabe geworden zur Beurtheilung seiner Auffassung der Algebra und damit der Geschichte der letzteren. Sollte seine Ausarbeitung sich vielleicht noch auffinden lassen?!

Mit Erwähnung des letzten Cossisten sind wir schon in das vierte Jahrzehnt des 16. Jahrhunderts gelangt, und wenn auch innerhalb dieses Jahrzehntes und selbst in der ersten Hälfte des folgenden wohl noch die eine oder andere Bearbeitung der Regeln der Coss veröffentlicht worden, so kann ich dieselben doch füglich übergehen, da sie Neues oder Erwähnenswerthes nicht zu Tage gefördert haben. Ich kann mich deshalb sofort zu einem Manne wenden, welcher um die Mitte des 16. Jahrhunderts mit seinen schriftstellerischen Leistungen hervortrat und geradezu als der Hauptvertreter der gesammten deutschen Mathematik jenes Jahrhunderts und als der wichtigste unter den Cossisten bezeichnet werden kann, zu Michael Stifel aus Esslingen (1487—1567). Wie Luther war er ursprünglich Augustinermönch, trat dann zum Protestantismus über und wurde Pfarrer in Annaberg, musste diese Stelle aber verlassen, weil der jüngste Tag, den er aus Eigenschaften gewisser der hl. Schrift entnommener Zahlen auf den 16. October 1533 prophezeit hatte, nicht eintreten wollte und darob grosser Aufruhr entstand; folgeweise dann noch auf zwei Pfarreien thätig, wurde er endlich 1559 Professor der Mathematik an der Universität Jena. Schon

---

*) In der Widmung an den „Bischoff zu Prixen.“

**) Vgl. mein „Rechnen im 16. Jahrhundert“, Seite 15, 22, 38, 56 u. sonst.

die angegebene Thatsache aus seinem Leben zeigt, dass Stifel zu Aberglauben und trübem Mysticismus geneigt war; gleichwohl steht dies in innigstem Zusammenhange mit seiner Vorliebe für arithmetische Speculationen jeglicher Art. Deutliche Kunde hiervon und von seinen Erfolgen auf dem Gebiete der Arithmetik gibt sein noch in Holzdorf bei Wittenberg geschriebenes, doch erst fünf Jahre später im Jahre 1544 zu Nürnberg gedrucktes Hauptwerk „*Arithmetica integra*“, welchem Melanchthon einen so schönen Geleitsbrief über die Bedeutung mathematischer Studien mitgegeben hat.

Die Hauptanregung zu seinen Beschäftigungen mit Mathematik bekam Stifel durch den Wittenberger Professor der Philosophie, dann der Medicin Jakob Milich (1501—1559), auch dadurch bekannt, dass er zuerst an seiner Universität Mathematik lehrte; diesem seinen Eifer zu bethätigen und ihm zu zeigen, wie seine Unterweisung auf guten Boden gefallen, schrieb Stifel das erste Buch seiner nachmaligen *Arithmetica integra*, in welchem er im Anschlusse an das gewöhnliche Zahlenrechnen und dessen Anwendungen seine originellen Forschungen über Progressionen niederlegte. Als aber der Drucker mit dessen Fertigstellung zögerte und Milich unterdess aufs Neue durch glückliche Behandlung von Stifel's Frau in schwerer Krankheit sich dessen Dank erworben hatte, aber Bezahlung zu nehmen durchaus ablehnte, kam Stifel „wieder auf seine frühere Art sich dankbar zu erweisen zurück“, liess sich sein Manuscript vom Drucker zurückgeben, vervollständigte dasselbe durch seine grosse Arbeit über die Irrationalgrössen, welche nun das zweite, und durch seine Algebra, welche das dritte Buch des ganzen Werkes ausmacht, liess dieses in Nürnberg, wo über den Druck der fremden Zeichen keine Klage geführt wurde, drucken und widmete dasselbe seinem vielverdienten Freunde Milich, welcher auch den Gesammttitel vorschlug, den es nun trägt. Und mit Recht — denn vorher war in Deutschland kein Werk erschienen, welches wie dieses den gesammten Inhalt der Mathematik so umfassend und mit so vielen neuen Resultaten zur Darstellung brachte.

Was insbesondere die Lehre von der Coss betrifft, so hat Stifel das unläugbare Verdienst, die Irrationalgrössen ausführlicher betrachtet und gewürdigt, die mannichfaltigen Einzelregeln für das Lösen von Gleichungen bewiesen, sie zugleich aber auch unter eine einzige Vorschrift gebracht und so die Allgemeinheit der Betrachtung wesentlich gefördert, die Regeln der Coss in ausgedehnterem Masse auf Fragen der Geometrie angewandt, und auch auf des Cardanus' Bedeutung und damit auf die des Studiums der italienischen Mathematiker aufmerksam gemacht zu haben.

Aber Stifel's Einfluss knüpft sich nicht an seine *Arithmetica integra* allein; neun Jahre nach deren Erscheinen behandelte er nochmals die Algebra, indem er „Die Cosz Christoffs Rudolffs Mit schönen Exempeln der

Cosz Gebessert vnd sehr gemehrt" im Jahre 1553 herausgab (gegen 1000 Seiten in gross 8⁰), „damit die getrewe arbeyt dises Frommen Christoffs Rudolffs nicht vndergehe". Denn es war dieselbe schon so selten geworden, dass Stifel hat „hören klagen | das dis Buch der Cosz nyendert mehr furhanden sey | so sie doch das selbig gern wolten bezalen dreifach | oder auch vierfach." Gleichzeitig übernahm Stifel damit eine Ehrenrettung Rudolffs; denn wie er erzählt, hatte er „höret auff ein zeit jm grewlich vnd vnchristlich fluchen | das er die Cosz hatte geschriben | vnd das beste (wie der flucher sagt) hette verschwigen | nemlich die Demonstrationes seyner Regeln. Vn̄ hette seine Exempla (wie er saget) ausz der Librey zu Wien gestolen." Gegen solch ungerechte Vorwürfe vertheidigte nun Stifel den, aus dessen Buch er selbst „die selbige | Kunst ohn allen mündtlichen vnderricht | verstanden vnd gelernet"; Rudolff habe eben gehandelt im Sinne des Spruches Salomonis „Ein Narr schüttet seynen geyst gar ausz aber ein weyser helt an sich", und „do Christoff Rudolff wolt ein gut buch schreyben (wie geschehen) stünd es bei jhm dreyn zu setzen was jhn glüstet." Uebrigens gesteht Stifel (fol. 171ᵛ), dass er selbst früher „vermeynet Christoff Rudolff hette von den Demonstrationes nichts gewusst"; „aber Johann Newdorffer der Meyster viler berümbter Schrifften | vnd Rechēmeyster zu Nürnberg | hat mir hereyn in Preussen geschickt | desz Christoffs Rudolffs demonstrationes | Wie er sye selbs mit seyner eygnen hand geschriben | doch mit wenig worten | den̄ die Figuren waren an jhnen selbs klar."

Stifel lässt nun in seiner Ausgabe die Schrift Rudolff's vollständig abdrucken, fügt aber jedem einzelnen Kapitel noch je einen oder selbst mehrere Anhänge bei, in welchen er deren Inhalt entweder verdeutlicht durch ausführliche Besprechung und Exemplificirung oder wo er denselben durch eigene Zusätze reichhaltiger macht. Unter den letzteren sind besonders hervorzuheben seine Vereinfachung des „Algorithmus der surdischen Zahlen", seine Erläuterungen zum berühmten zehnten Buche des Euklid, seine Wurzelausziehung aus algebraischen Ausdrücken, seine Zusammenfassung der 8 Equacionen Rudolff's in eine Regel und endlich sein Bericht über die Lösung cubischer Gleichungen und damit sein Hinweis auf das Studium italienischer Mathematiker.

Mit Stifel hatte die deutsche Algebra des 16. Jahrhunderts ihren Höhepunkt erreicht; er hatte in seiner *Arithmetica integra* in mustergültiger Weise einen Kanon der gesammten Arithmetik und Algebra seiner Zeit fertig gestellt, nach welchem die mit und nach ihm Lebenden in höchst bequemer Art sich unterrichten und aus welchem Schriftsteller leicht nach Form und Inhalt Passendes entnehmen und in ihre eigenen Werke verflechten konnten. Ja viele derer, welche in deutschen und fremden Landen die wundersame Kunst der Coss studirten, vielleicht ohne Stifel auch nur dem Namen nach genannt zu hören, sie hörten und lasen trotzdem in den

meisten Fällen mehr oder minder wörtlich Stifel's Werk, ob nun in lateinischer oder deutscher, französischer oder spanischer Sprache. Denn gründlich ist Stifel ausgebeutet worden — wie unverschämt, wird das Folgende zeigen.

Als nächsten Nachfolger Stifels haben wir seinen Landsmann, den Tübinger Professor Scheubelius (Johann Scheybl, 1494—1570) zu bezeichnen. Nachdem dieser schon 1545 ein Rechenbuch hatte erscheinen lassen, in welches er der Uebung wegen z. B. auch die Berechnung von Seiten und Diagonalen eines regelmässigen Fünfeckes aufnahm, veranstaltete er auch (1550) eine Ausgabe der 6 ersten Bücher Euklid's; uud weil er hierin vielfach geometrische Sätze durch Rechnungen erläuterte, so schickte er auf 76 Seiten die Lehren der Algebra voraus. Dieses einleitende Kapitel muss vielfach als kurze und leichte Darstellung des betreffenden Gegenstandes erschienen sein; denn ausdrücklich hierdurch veranlasst veröffentlichte ein Pariser Verleger im Jahre 1551 einen Abdruck*) desselben unter dem Titel „*Algebrae compendiose facilisque descriptio, qua depromuntur magna Arithmetices miracula*"; dieser Abdruck scheint am meisten bekannt geworden zu sein. Scheubel weicht zwar in der Bezeichnung von der Stifel's ab, zeigt sich aber sonst vielfach von diesem beeinflusst, doch so, dass immerhin noch von eigener Arbeit die Rede sein kann. In der Behandlung der Irrationalgrössen ist ihm offenbar Rudolff Vorbild, so dass gegen Stifel ein Rückschritt stattfindet; die Einzelheiten werden geeigneten Ortes zur Besprechung kommen.

War schon durch Scheubel's Bearbeitung Manches von dem Inhalte der *Arithmetica* Stifel's ins Ausland, hier zunächst nach Frankreich gedrungen, so wurde dessen Verbreitung noch mehr befördert durch eine wohl im Jahre 1554 zuerst erschienene, später aber und selbst im folgenden Jahrhundert noch vielfach und unter verschiedenem Titel wieder aufgelegte Algebra von Peletarius (Jacques Peletier, 1517—1582). Dieser erwähnt**) zwar Cardan und Scheubel und Stifel und gesteht, von letzterem die Bezeichnung „cossische Zahlen" entlehnt zu haben, ebenso auch „*assez d'autres particularités*"; aber er sagt nicht ausdrücklich, dass er den Namen der „*Exposants*", dass er die Beziehung zwischen arithmetischen und geometrischen Progressionen, dass er den Algorithmus der cossischen Zahlen und die

*) Denn eine eigene Ausgabe Scheubel's kann dies nicht sein: Kästner und Scheibel kennen keine besondere Algebra von Scheubel, und es wird auch nur unter jener Annahme verständlich, was der französische Verleger („*Typographus Lectori*") vorausschickt: „*Hunc (librum) autem cum seorsum excusus non esset, seiungere placuit* . . . . " — Jedenfalls war vor 1545 noch keine Algebra Sch.'s erschieoen, da er in seinem Rechenbuche (S. 500) ausdrücklich sagt: . . „*praesertim illis regulis (Algebrae) nondum doctrina nostra declaratis.*"

**) Ich citire nach der Ausgabe von 1622.

sämmtlichen einschlägigen Beispiele, dass er die Vorschrift zur Lösung der Gleichungen und die bezeichnende Auffassung derselben als Wurzelausziehung, dass er den Begriff und Namen der negativen Zahlen*), dass er die Einleitung über die Natur der Irrationalen, die Eintheilung derselben und ihre Unterabtheilungen, ihre Rückführung auf dasselbe Zeichen, die ganze Aufeinanderfolge der Hauptabschnitte, die Rechnungsarten mit Irrationalen — dass er dies Alles geradezu aus Stifel entnommen habe; nur eine genauere Vergleichung zeigt, dass ganze Abschnitte (so S. 57—78, S. 94—116) füglich als Uebersetzungen der betreffenden Abschnitte von Stifel's Buch bezeichnet werden müssen und dass die meisten Beispiele an sich und in ihrer Verwerthung zur Erklärung aus derselben Quelle stammen; nur einzelne sind Cardanus entnommen. Dachte Peletier vielleicht seine Eigenthümlichkeit zu wahren, wenn er durchgängig statt + und — die Zeichen *p* und *m* gebrauche? oder wollte er hohe Meinung von seinen Künsten erwecken, wenn er am Schluss seines Buches (S. 194) sagt, er wolle für jetzt nur noch wenige Beispiele von Stifel geben „*en attendant que nous facions un troisieme liure, de Demonstrations et exemples geometriques et d'inuentions nouuelles, pour la perfection d'Algebre*"? Das Buch von Peletier hat ja gewiss seine Verdienste als Lehrbuch für Frankreich; aber es ist Pflicht der Geschichtschreibung daran zu erinnern, dass Ehre wem Ehre gebührt!

Wir sahen, wie Stifel's Arbeit sich ihren Weg durch die Welt bahnte, wenn auch Männer wie Peletier um Verherrlichung seines Namens sich keineswegs bemühten. Immerhin aber erscheint der genannte Franzose noch achtungswerth im Vergleiche zu Stifel's Landsmann, dem bekannten Christoph Clavius (1527—1612). Seinem ausgezeichneten Rechenbüchlein vom Jahre 1584 liess dieser im Jahre 1608 eine Algebra folgen, welche in der Gesammtausgabe seiner Werke, in deren zweitem Bande, nicht weniger als 181 Folioseiten einnimmt und sich, was den grössten Theil des Inhaltes betrifft, dem ersteren bezüglich der diesem nachgerühmten**) Eigenschaften würdig an die Seite stellt, getreu der ausgesprochenen Absicht „*quae inuolute alii, ego explicatius exponam, apertius quae illi obscurius . . .*" Aber es wäre unrecht, des Clavius Arbeit als etwas Anderes denn einen Abklatsch von Stifel's *Arithmetica integra* zu bezeichnen: nirgends geht er, der doch Jahre lang in Italien lebte und lehrte und Bombelli kennen lernte und Vieta's Arbeiten sich musste verschaffen können, über Stifel hinaus; in Anordnung des Stoffes, in dem erklärenden Texte, in der Wahl der Bezeichnungen und der Beispiele und gerade der schönsten unter den letz-

*) S. 83: „*nombres absurdes qui sont nombres feincts au dessous de rien*" — Stifel fol. 249: „*numeri ficti infra nihil*"!!

**) Vgl. mein „Rechnen im 16. Jahrhundert" S. 18 f.

ren findet sich ein unmittelbares Anlehnen an Stifel, oft ein wörtliches Abschreiben von dessen Sätzen und Seiten. Aber die Erwähnung seines Vorgängers und Meisters?! In dieser Beziehung lesen wir S. 5: „*qua quidem in re nonnullos scriptores recentiores secuti sumus*" und später: „*Plerique auctores pro signo + ponunt literam P . . . sed placet nobis uti nostris signis*", und gelegentlich der einzigen Regel zur Lösung von Gleichungen: „. . *ut illis collatis cum vnica nostra quid intersit, intelligas*" und „*facile deprehendemus, vnicam nostram Algebrae regulam longe esse praestantiorem supradictis 6. regulis aliorum*" und weiterhin: „*nos cum aliis appellabimus radices secundas notabimusque hoc modo 1 A., 1 B., . .*", und sonst ähnlich — also überall ein absichtliches Verschweigen von Stifel's Namen, wo stets die Redewendung dazu drängte desselben Erwähnung zu thun! Und wo er sich auf denselben beruft (S. 27) als „*nobilem Arithmeticum*", bei der Lösung der Gleichungen zweiten Grades, in dem Falle, wo Stifel mit Recht das stete Vorhandensein von zwei Wurzelwerthen behauptet, gerade da meint Clavius, dass „*non semper utraque radix propositum problema soluet, sed altera tantum*". Wie gesagt, Peletier erscheint hiergegen noch achtenswerth, da er doch bei gewohnter Auslassung jeglicher Quellenangabe auch von einer Hervorkehrung seiner Bezeichnungen und seiner Regeln im Vergleiche zu denjenigen Anderer völlig absieht.

Mit Clavius sind wir bereits in das siebenzehnte Jahrhundert eingetreten und haben uns so schon ein halbes Jahrhundert von Stifel entfernt, ohne dass von einer weiteren Vervollkommnung der deutschen Coss die Rede sein könnte. Wie wir schon sahen, bestand die Leistung der Zwischenzeit im Wesentlichen in der Ausbreitung der in Stifel's Werk niedergelegten Sätze und Methoden. Was Scheubel und Peletier begonnen, das führten, um nur wenige Namen zu nennen, Ramus und Salignac und deren Nachfolger weiter für Frankreich und Deutschland, der in die Fremde verschlagene Deutsche Menher z. B. für die Gegend der heutigen Niederlande, der bekannte Nunez *) für seine spanische Heimath und deren An-

*) Ramus (1515—1572), dessen Hauptverdienste auf anderem Gebiete liegen, verweilte einige Zeit (1569) in Deutschland und verfasste (ob vor oder nach jener Zeit ist mir unbekannt) auch eine Algebra in zwei Büchern, wie Kästner berichtet (II, 736 und I, 139). — Bernardus Salignacus war ein wahrscheinlich aus religiösen Gründen ausgewanderter Franzose, aus Bordeaux gebürtig, welcher Mitvorstand der dem Grafen zu Waldeck gehörenden Schule zu Corbach war und als solcher daselbst auch den mathematischen Studien Raum gönnte; unter Beihülfe eines gewissen Balth. Gerlach, welchen er sehr rühmt, verfasste er ein kurzes Lehrbuch der Algebra *(Bernardi Salignaci Burdegalensis Algebrae libri duo. Francofurti 1580)*, in welchem er den methodischen Grundsätzen seines Vorbildes Ramus folgte und worin er auch die Hauptsache von dessen Algebra aufnahm („*— e cuius Algebra pleraque in hanc meam transtuli —*"). — Valentin Menher schreibt selbst aus dem Jahre 1565, dass er „nu ain lange zeit allhie zu An-

nexe; und damit die Wechselwirkung zwischen Deutschland und Italien nicht fehle, sorgte in der angegebenen Weise Clavius.

Mit dem 17. Jahrhundert aber und theilweise schon vorher verschiebt sich allmählig der Schwerpunkt des mathematischen Interesses in Deutschland. Die mehr und mehr theologische Richtung der Zeit wendet sich mit Vorliebe jenen mystischen Speculationen zu, welche schon Stifel so eifrig gepflegt hatte, ja welche sogar der Ausgangspunkt seiner arithmetischen Studien gewesen sind und als deren Ergebniss wir das merkwürdige Buch zu betrachten haben, das er i. J. 1553 als Anhang zu seiner Ausgabe vom Rudolff's Coss unter dem Titel „Ein sehr Wunderbarliche wortrechnūg Sampt einer mercklichen Erklerung etlicher Zalen Danielis vnd der Offenbarung Sanct Johannis" erscheinen liess, ein Buch, von welchem er selbst in einer Zuschrift an seinen Freund Ottendorffer sagt: „Denn wo jr euch des (d. i. der Sorge für Veröffentlichung) würdet wegern | und mir hiemit | nicht wöltet zu willen werden | sag ich euch | das mich mein leben lang rewen solte | alle erbeyt von mir | an diese Cosz gewandt." Hiermit ist der Grundton der folgenden Zeit angegeben; man wendet sich auf dem theoretischen Gebiete mit Vorliebe demjenigen Theile der Arithmetik zu, von welchem man hauptsächlich Beihülfe und Förderung erwartete, der Lehre von den Eigenschaften der Zahlen, von der Bildungsweise und den Gesetzen der Polygonal- und Pyramidalzahlen u. s. w.

Haben wir damit den einen Weg bezeichnet, welcher vom Studium und demgemäss von der Ausbildung der Algebra als Selbstzweck hinwegführte, so wurde allgemach nicht minder noch ein anderer begangen, der

---

torff (= Anvers, Antwerpen), die Jugent, deszgleichen andere Liebhaber der freyen Kunst des Rechnens vnd Buchhaltēs, auch in der Mathematica, meins verhoffens nit ohne frucht, geinstruiert vnd gefurdert" und so veranlasst veröffentlichte er i. J. 1556 „*Practicque povr brievement apprendre à Ciffrer, et tenir Liure de Comptes, avec la Regle de Coss, et Geometrie*"; in klarer Darstellung und (dem Beispiele Stifel's und Rudolff's folgend, deren Namen er auch erwähnt) mit Vorführung vieler aus deren Schriften entnommener Exempel lehrt er die Algebra und deren Verwerthung für die Fragen der Geometrie. — Pedro Nunez (1492—1577), Professor der Mathematik an der Universität zu Coimbra und Cosmograph des Königs von Portugal, schrieb zuerst in portugiesischer Sprache ein Werk über Algebra, übersetzte es dann selbst ins Spanische und veröffentlichte (1567) es zu Anvers unter dem Titel: „*Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria*". Er beginnt sofort damit, dass der „*fin de la Algebra*" bestehe in den „*seis conjugaciones, porque son tres conjugaciones simples, y tres compuestas*" und er behandelt dann diese zugleich mit vielen auch geometrischen Uebungsaufgaben im Wesentlichen nach dem grossen Werke des Frey Lucas de Burgo, verfehlt aber auch nicht (fol. 324 ff.) der Leistungen und der Streitigkeiten des Hieronymo Cardano und des Nicolao Tartalla Erwähnung zu thun und ist insbesondere beflissen, die Lösung der cubischen Gleichungen zu geben, wofür er auch (fol. 334r) die bekannten Verse „*Quando chel cubo con le cose apresso* . . ." mitteilt.

gewiss auch von dem angegebenen Sammelpunkt entfernen musste. Mit der auf Copernicus († 1543) folgenden stärkeren Betreibung der Astronomie, die in Kepler (1571—1630) ihren nächsten Höhepunkt erreichte, schiebt sich nämlich das praktische Rechnen mehr und mehr in den Vordergrund des Interesses: man bildet die Trigonometrie aus, berechnet für ihren Dienst genauere und genauere Tafeln, erfindet die Decimalbrüche und die Logarithmen und verwerthet sie alsbald in rationellster Weise.

Den im Vorstehenden angedeuteten Richtungen müssen wir nun noch einen Augenblick unsere Aufmerksamkeit zuwenden.

In Bezug auf die erstere dieser Richtungen thut sich unter anderen minder Erwähnenswerthen besonders der „ehrnveste wohlgelahrte und kunstreiche Herr, der h. R. St. Ulm bestellter Rechenmeister und Modist, auch Reichserbtruchsässischer Faktor" Johann Faulhaber (1580—1635) hervor. In zahlreichen Schriften gibt er immer und immer wieder dem Gedanken Ausdruck, dass „in etlichen Prophetischen und Biblischen Geheimnisszahlen tiefer Sin̄ verborgen sei, dass Gott zu allen Zeiten die Ordnung gehalten, dass er in den vornehmsten Generalprophezeiungen über die Hauptveränderungen sich der Pyramidalzahlen gebraucht, wen̄ er eine gewisse Zeit bestim̄t. Welches alles den Gelehrten in allerhand Facultäten zu wohlmeinender Aufmunterung und Vermahnung dienen kan̄, dass sie nach dem ausgedruckten und klaren Befehl Gottes, solche hochwichtige Zahlen, gründlich zu erforschen keinen Fleiss sparen, damit der eigentliche Verstand nach dem Beschluss der Göttlichen Majestät endlich recht an Tag kommen möge".*) Faulhaber seinerseits sucht nun den tiefen Sinn derart zu ergründen, dass er die vielfach induktorische Manier Stifel's benützend die bekannten Zahlen 666, 1260, 1290, 1335, 2300 und andere als Glieder von Reihen oder als Summen von Reihengliedern oder als Summen solcher Summen u. dgl. auffasst, dass er dafür die allgemeinen cossischen Ausdrücke abzuleiten sucht und letztere den gewählten Zahlen gleichsetzend Gleichungen höherer Grade bildet, deren Lösungen er dann theils selbst gibt, theils in „gemein offen Ausschreiben an alle Philosophos, Mathematicos, sonderlich Arithmeticos und Künstler ganz Europas" von letzteren zu wissen verlangt. Trotz aller Mystik, trotz der manchfachen unerlaubten Verallgemeinerungen, trotz dem Wahne, in dem er befangen ist, da er glaubt, seine höheren Gleichungen wirklich „gelöst" zu haben, trotz alledem hat sich Faulhaber immerhin das Verdienst erworben, die Lehre von den figurirten Zahlen eifrigst bearbeitet und dadurch auf diese und zugleich damit auf die Lehre von den cubischen und höheren Gleichungen ein grösseres Publikum aufmerksam gemacht zu haben.

Die zweite der im vorigen Artikel hervorgehobenen Richtungen der

*) Nach Kästner, Gesch. d. Math. III, 116.

deutschen Mathematik des siebenzehnten Jahrhunderts, die Bevorzugung und die weitere Ausbildung des praktischen Rechnens nämlich, war so wenig als das Streben nach Zahlendeuterei geeignet, eine kräftige Weiterbildung der deutschen Coss zu befördern; gleichwohl ist auch hierbei einiger Männer Erwähnung zu thun, welche über die Leistungen ihrer Vorgänger hinausgingen. So werden wir die Untersuchungen zu besprechen haben, welche der Zeitgenosse und Bekannte Kepler's, der Miterfinder der Decimalbrüche und der Logarithmen, Jost Bürgi (1552—1632), anstellte über die Anzahl und die Aufsuchung der Wurzeln von auf den Kreis bezüglichen höheren Gleichungen; ebenso werden wir auch des sonst unbekannten Johann Junge „Erfindung" besprechen, d. h. seine Art, durch Probiren zu erkennen, ob eine Zahl Wurzel einer Gleichung sei oder nicht, und ebenso auch die Verbesserung, welche Nicolaus Reymers daran anbrachte, derselbe, welcher, dem Cardanus folgend, nach Stifel wieder zuerst (1601) in einer deutschen Algebra die Klassifikation der biquadratischen (und cubischen) Gleichungen gab, deren Lösungsart aber nicht veröffentlichte; wenige Jahre nach ihm (1604) hat erst Faulhaber diese Lücke ausgefüllt.

Die letzten Paragraphen liessen es klar genug hervortreten, dass die deutsche Coss im Grunde genommen seit Stifel zum Stillstande gekommen war und dass und warum die Zeiten auch des begonnenen siebenzehnten Jahrhunderts hierin nahezu keine Aenderung brachten. Der Fortschritt der Algebra knüpft sich um diese Zeit und für die folgenden Jahrzehnte an die Namen berühmt gewordener Ausländer: Vieta führt in gewaltig bedeutungsvoller Weise die allgemeinen Zahlzeichen ein und macht von der neuen Form der Algebra ausgedehntere Anwendung auf die Fragen der Geometrie; Girard deckt den Zusammenhang auf zwischen der Anzahl und der Grösse der Wurzeln einer- und zwischen dem Grade, bezw. den Coefficienten einer Gleichung anderseits; Harriot zeigt die Entstehung einer Gleichung aus der Multiplikation einfacher Faktoren und schreitet wie Oughtred vor in der Kunst der Auflösung von Zahlengleichungen. Ueberall regt sich da neues Leben und es beginnt eine neue Wissenschaft heranzuwachsen; aber es ist dies zunächst nicht mehr die deutsche Coss, und hierin liegt es begründet, dass wir der unserer Darstellung vom Wesen und der Entwickelung der deutschen Coss vorauszuschickenden Uebersicht hier ein Ziel setzen.

5. Gliederung. — In dem vorangehenden Ueberblicke wollte ich dem Leser in geordneter Zeitfolge die wichtigsten Persönlichkeiten vorführen, durch deren Leistungen die Wissenschaft der Coss theils gefördert, theils mehr nutzbar gemacht und zu allgemeinerer Kenntniss gebracht worden ist. Wenn ich dabei auch schon der verschiedenen Zweige gedachte, durch deren Herauswachsen sich allmählich das Ganze der Coss ausbildete, so

geschah dies durchaus gelegentlich und in steter Anlehnung an die einzelnen Mathematiker; es empfiehlt sich aber mit Rücksicht auf die nachfolgende Einzelbehandlung nun auch den Inhalt der Coss im Ueberblicke vorzuführen, dessen Entfaltung aufzuzeigen und daraus eine Gliederung des Stoffes zu gewinnen.

Wohl durch verschiedenartige Aufgaben des praktischen Lebens sah man sich veranlasst, eine bei denselben gesuchte Zahl als „Unbekannte" aufzufassen, sie gleichwie eine gegebene Grösse zu behandeln, also die in der Aufgabe vorkommenden Rechengeschäfte mit und an ihr durchzuführen, um so zu einer Beziehung zwischen gegebenen Grössen und der gesuchten, d. h. zu einer Gleichung zu gelangen, deren Lösung dann zum gewünschten Ziele, zur Kenntniss des Zahlenwerthes der Unbekannten führte. Also Lösung und hierzu Behandlung von Gleichungen ist der eigentliche und ursprüngliche Inhalt der Algebra. Dies lehrt der eben gebrauchte und oben (S. 5) erklärte Name, welchen dieser Zweig der Mathematik bei den Arabern besass; das Gleiche lehrt die eine Benennung „*Avyakta-Kriya*" (= Rechnung mit der Unbekannten), welche die Inder ihm gaben. Hieraus ist es auch verständlich, dass der erste Algebrist der Araber, Mohammed ben Musa, bei Beginn seines „Algebra" betitelten Buches sofort den Leser einführt in die Behandlung der Gleichungen und nachher erst (ed. Rosen S. 21—35) gewissermassen zur Erläuterung zeigt, wie die vier Grundrechnungsarten an Verbindungen von bekannten und unbekannten Zahlen durchzuführen seien; eben daraus wird auch verständlich, wie später manche deutsche Cossisten bei Behandlung der Coss ihre Aufgabe nur oder doch der Hauptsache nach darin fanden, die Vorschriften zur Lösung der Gleichungen mitzutheilen und durch Beifügung einer möglichst grossen Anzahl von Exempeln den Lernenden in der Handhabung jener zu üben. Freilich hatten schon die indischen Mathematiker, Brahmagupta wie Bhaskara, einen feineren Sinn für wissenschaftlichen Aufbau ihrer Darstellung bewiesen, als sie der Behandlung der Gleichungen die Regeln über den Gebrauch der Vorzeichen, die „arithmetischen Operationen mit unbekannten Grössen" und selbst das Rechnen mit Irrationalen vorausschickten; aber selbst bei ihnen, und in gleicher Weise auch bei den dentschen Cossisten, zumal vor Stifel, wird der Nachdruck in weit überwiegender Weise auf die Lehren von den Gleichungen gelegt, so dass bei Allen — Stifel ausgenommen — die übrigen vorhin erwähnten Kapitel nicht Selbstzweck sind, sondern nur als zur Behandlung der Gleichungen nothwendige Hülfsmittel ihre Bearbeitung finden.

Gleichwohl werde ich der eigentlichen Lehre von den Gleichungen erst die spätere Stelle einräumen und vorher besprechen, in welcher Weise unsere Algebristen des 16. Jahrhunderts eben jene einleitenden Kapitel behandelt haben. Hierbei muss natürlich zuerst die Rede sein von den

Benennungen und verschiedenartigen Bezeichnungen, welche sie zur Darstellung der manchfaltigen Formen der cossischen Unbekannten und zur Andeutung der Rechengeschäfte verwendet haben und wie in dieser kurzen Kennzeichnung für Ohr und Auge ein freilich ziemlich langsamer Fortschritt zu erkennen ist. Weiterhin wird eine Darstellung des „Algorithmus der Coss" ihre Stelle finden müssen, d. h. die Angabe, wie und in welcher Ausdehnung die Rechnungsarten der gemeinen Arithmetik an den „zalen der coss und ihren charakteren" durchgeführt wurden; denn gerade dieser Abschnitt der Coss ist das damalige Aequivalent unserer heutigen Buchstabenrechnung und nur seine genaue Beachtung vermag den richtigen Standpunkt zu gewähren, von welchem aus ein Verständniss für die geschichtliche Entwickelung der letzteren gewonnen werden kann. Unter den verschiedenen Rechnungsarten nimmt aber die uns heute unter dem Namen des Radicirens geläufige in der damaligen Zeit eine hervorragende Stellung ein, obwohl freilich nicht in der späteren Allgemeinheit, da meist nur Wurzelgrössen des 2., 3. und 4. Grades zur Behandlung kommen; aber eben das Operiren mit solchen Irrationalen oder mit „surdischen Grössen", wie ihr gewöhnlicher Name lautet, nimmt bei den Cossisten fast regelmässig einen besonderen Abschnitt ein, und das Gleiche gebührt deshalb der Behandlung dieses Gegenstandes auch in meiner Darstellung. Und wenn letztere, stets die Förderung des Verständnisses geschichtlicher Entwickelung im Auge habend, dieses ihr Ziel einigermassen erreichen will, so wird sie der Frage nach den Quellen, aus welchen unsere Cossisten schöpften, nicht aus dem Wege gehen dürfen, einer Frage, welche bis jetzt nur im Vorübergehen angeregt, aber, so weit ich weiss, noch nicht eingehend behandelt, viel weniger abschliessend beantwortet wurde.

Dem eben Dargelegten entsprechend werde ich nun den Stoff, welchem meine Abhandlung gewidmet ist, gliedern, und diese in die folgenden fünf Abschnitte theilen:

I. Von den cossischen Benennungen und Zeichen;
II. Von dem Algorithmus der Coss;
III. Von den surdischen (irrationalen) Grössen;
IV. Von den Regeln der Coss (Auflösung der Gleichungen);
V. Von den Quellen der deutschen Coss.

I. Von den cossischen Benennungen und Zeichen.

6. Wohl nirgends mehr als in der Mathematik ist der geistige Gehalt so innig verknüpft mit der Form, unter welcher er sich darbietet, so dass eine Vervollkommnung der letzteren sehr gut auch eine solche des ersteren

zur Folge haben kann, ja dass oft genug eine Verallgemeinerung und Vertiefung des Inhaltes zumal der Arithmetik erst möglich war, nachdem die Form der Darstellung sich geändert hatte. Die Geschichte unserer Wissenschaft bietet nicht wenige Beispiele, welche hierfür als Belege zu dienen vermögen. Wie, wenn den Griechen unsere Zahlbezeichnung zur Verfügung gestanden hätte, würde ihre Mathematik nicht ein anderes Ansehen darbieten? Und wäre der binomische Satz möglich geworden ohne die verallgemeinerte Bezeichnung der Potenzen? Hätte überhaupt die Mathematik der letzten drei Jahrhunderte diesen Grad der Allgemeinheit annehmen können ohne Vieta's durchgreifende Aenderung der Darstellung, ohne seine Einführung der allgemeinen Zahlgrössen? Deutlich genug zeigen diese Beispiele, denen auch solche aus der Geschichte der neueren Mathematik sich anreihen liessen, den innigen Zusammenhang zwischen Wesen und Form, und es wird deshalb wohl gerechtfertigt erscheinen, wenn wir hier an erster Stelle den von unseren Cossisten gebrauchten Bezeichnungen unsere Aufmerksamkeit zuwenden. Ist doch auch gerade die Form, unter welcher sich sofort von Anfang an die Algebra auf deutschem Boden darstellt, eines der charakteristischen Merkmale, welches einem Jeden sofort in die Augen fällt, wenn er eine Vergleichung anstellt mit dem zur selben Zeit in anderen Ländern Geleisteten.

Zu allererst sind es die auch heute noch benutzten Vorzeichen der Addition und Subtraktion, $+$ und $-$, welche unsere Beachtung verdienen*).

In Deutschland gebrauchte man nämlich diese einfachen Abkürzungen schon längst, als man in Italien und Frankreich die Wörter *Plus* und *Minus* noch durch deren Anfangsbuchstaben $\bar{p}$ und $\bar{m}$ zu bezeichnen gewohnt war; und während z. B. die grossen italienischen Algebristen des sechzehnten Jahrhunderts, natürlich auch der Portugiese Nunez, ja selbst Bombelli noch (1572) nur die letzte Art der Abkürzung kennen, war es eine allen Historikern bekannte Sache, dass Stifel z. B. nur der Zeichen $+$ und $-$ sich bediente. Ja lange Zeit war es gebräuchlich**), die Einführung derselben geradezu Stifel (1544) zum Verdienste anzurechnen, bis Drobisch im Jahre 1840 darauf aufmerksam machte***), dass sich jene Zeichen

*) Im Anfange des 17. Jahrhunderts gebrauchen Einige, wie Reymers und Faulhaber, das Zeichen ÷ und Andere, wie Peter Roth z. B., das Zeichen ∺ statt des Minuszeichens.

**) Montucla I, 474 macht keine bestimmte Angabe — Cossali I, 48 sagt, dass er eine bestimmte Zeit der Einführung jener Zeichen nicht angeben könne, dass er sie aber zuerst finde in dem i. J. 1575 erschienenen Commentare Xylander's zu Diophant — Nesselmann S. 305 gebraucht den Ausdruck, dass man jene Zeichen „bei Vieta bereits" benützt finde — Arneth S. 232 schreibt sie Stifel zu — Egen II, 31 spricht von deren Einführung durch „Rudolph und Stifel".

***) *De Ioannis Widmanni Egerani ... compendio arithmeticae mercatorum ... Lipsiae* 1840. pag. 20.

schon bei Widman (1489) finden und dass dieser nur im Vorbeigehen davon wie von einer hinlänglich bekannten Sache rede, dass sie also im fünfzehnten Jahrhundert schon bei den Deutschen im Gebrauch gewesen seien. Ich meinerseits finde eine Bestätigung hiefür, Drobisch's Ansicht entgegen, auch bei Peurbach († 1461): wo dieser die Regula Falsi erklärt, verlangt er, dass man eine gewisse Zahl *„cum signo denotante ipsum (numerum) fuisse additum uel diminutum"*, oder an einer andern Stelle, dass man sie anschreiben solle *„cum signo additionis uel diminutionis"*, wobei freilich Peurbach selbst die Zeichen nicht gebraucht; mir scheint es einem Zwange gleichzukommen, wenn man hierin den Gedanken an den Gebrauch der Zeichen $+$ und $-$ nicht annehmen wollte. Eine Bestätigung hiefür gibt das aus der Mitte des 15. Jahrhunderts stammende und von Gerhardt aufgefundene Wiener Manuscript, welches durchgehends jene Zeichen benützt und die bei ihrer Verwendung zum Addiren und Subtrahiren dienlichen Regeln bereits in schematisch übersichtlicher Form enthält. Ueber die Zeit der Einführung dieser Zeichen und über den Mann, welchem diese wesentliche Vereinfachung zu danken ist, lässt sich aber bis jetzt nichts Bestimmtes sagen; vielleicht dass noch weitere dem 15. Jahrhundert und früheren Zeiten angehörigen Manuscripte aufgefunden werden, welche hierüber Aufschluss zu geben vermögen. Dagegen hat es nicht an Hypothesen gefehlt, die Gestalt dieser Zeichen zu erklären; am einfachsten ist die Annahme, sie als weitere Abkürzungen der schon für *Plus* und *Minus* (*p* und *m*, oder *ψ* und *ф*) verwandten Abkürzungen anzusehen.

Gleichwie wir soeben von den Vorzeichen erkannten, dass sie charakteristisch sind für die deutsche Coss, dass aber rücksichtlich der Zeit ihrer Einführung genaue Angaben unmöglich sind, in ganz derselben Weise gilt dies für die Zeichen der Unbekannten, theilweise auch für deren Namen, wie sie bei unseren Cossisten gebräuchlich sind.

Das Bedürfniss nach solchen abkürzenden Bezeichnungen für das Ohr wie für das Auge hatte sich wohl schon seit den frühesten Zeiten der Beschäftigung mit Algebra geltend gemacht. Schon die Inder haben (vgl. Colebrooke S. 11) für die Unbekannte den stehenden Ausdruck *yavat — tavat* (= *quantum — tantum*, *quot — tot*, soviel — als) und für deren zweite, dritte, ... neunte Potenz die folgenden Namen: *varga, ghana, varga-varga, varga-ghana-ghata**), *varga-ghana* (oder *ghana-varga*), *varga-varga-ghana-ghata*, *varga-varga-varga*, *ghana-ghana,* so dass also die Namen der höheren Potenzen durch Potenzirung der niedrigeren gewonnen werden; beim Schreiben wurden aber nur die Anfangsbuchstaben der betreffenden Namen (also *va, gha, va-va*, . . .) dem Zeichen *ya*

*) Nach Colebrooke (S. 5, Anm. 6) hat *ghata* den Sinn von „Produkt".

der Unbekannten beigefügt und bekannte absolute Zahlen stets durch Vorsetzen von *ru* (= *rupa* = bekannte Zahl) kenntlich gemacht.

In ähnlicher Weise nennt auch Diophant die Unbekannte selbst *arithmos* und deren zweite, dritte, . . . sechste Potenz*) der Reihe nach *dynamis, kybos, dynamodynamis, dynamokybos, kybokybos,* so dass er also die Namen der höheren Potenzen im Unterschiede von den Indern durch Multiplikation der niedrigeren bildet; beim Schreiben benützt auch Diophant die Zeichen σ, $\delta^{\bar{\upsilon}}$, $\varkappa^{\bar{\upsilon}}$, $\delta\delta^{\bar{\upsilon}}$, $\delta\varkappa^{\bar{\upsilon}}$, $\varkappa\varkappa^{\bar{\upsilon}}$ als Abkürzungen, zu welchen für die absoluten Zahlen *(monades)* noch das folgende $\mu^{\bar{o}}$ hinzutritt.

Im Vergleiche hiermit muss es, selbst wenn wir mit Hankel annehmen, dass Mohammed ben Musa Alkharezmi nach einer bei Syrern und Persern vorauszusetzenden Tradition sein Werk über Algebra ausarbeitete, selbst dann, sage ich, muss es auffallend erscheinen, dass bei den arabischen Schriftstellern der ersten Jahrhunderte jede durchaus abkürzende Bezeichnung durchaus fehlt; sie stellen den ganzen Verlauf einer Rechnung stets ausführlich in Worten dar, so dass Nesselmann (S. 302) ihre Rechenweise im Gegensatze zur synkopirten und heutigen symbolischen Algebra geradezu als die rhetorische Algebra benennen konnte. Später aber und nach Wöpcke**) erstmals im 13. Jahrhundert sind die Araber dazu übergegangen „einen technischen Gebrauch von Zeichen zu machen, die zugleich für das abstrakte Raisonnement und die sichtbare Repräsentation dienen“.

Und in Anlehnung an die Araber haben dann die Italiener Anfangs (seit 1202) auch die Behandlung der Gleichungen, überhaupt sämmtlicher Rechnungen ausführlich in Worten durchgeführt, indem sie dabei jede absolute Zahl mit dem Namen *numerus*, die Unbekannte und deren Quadrat mit den Namen *radix* und *census* belegten; später aber gingen auch sie zu Abkürzungen über, und so finden wir bei Lucas Pacioli am Ende des 15. Jahrhunderts eine Liste der Namen und Zeichen der 29 ersten Potenzen der Unbekannten, deren Anfang ich hier beifügen will:

numero	*n*°
cosa	*co*
censo	*ce*
cubo	*cu*
censo de censo	*ce·ce*
primo relato	*p*°. *r*°.
censo de cubo	*ce·cu*
secundo relato	2°. *r*°.
censodecenso de censo	*ce·ce·ce*

. . . . .

. . . . .

*) Höhere Potenzen als die sechste finden sich nicht bei Diophant.

**) Wöpcke im *Journal asiatique* 5. *sér.* tome IV. 1854. p. 372.

Dass diese Bezeichnung auch während des sechzehnten Jahrhunderts von den Italienern beibehalten wurde, beweist uns z. B. Cardanus (*opp.* IV, p. 14).

Bei den Deutschen dagegen finden sich von früh ab theilweise anders gestaltete Namen und Zeichen für die gleichen Begriffe. So meldet uns Rudolff, dass „die alten vnser vorfarn (angesehen das | so zalen jn gleicher proportion aufwachsen | wie naturlich vnd gleichförmigklich eine gebeere die andere | Also das die drit nach der vnitet ist ein quadrat | fürbas allmal eine darzwischen | die nehist aber ein quadrat etc. Item die vierde zal ein' Cubic. Darnach allweg nach zweyen darzwischen wiederumb ein Cubic etc.) haben nach ernstlichem vleiss erfunden die Coss | das ist die rechnung von einem Ding | vnd die zalen nach natürlicher ordnung genennet Dragma | Radix | Zensus . . . haben auch je eine von kürtz wegen mit einem charakter: genomen von anfang des worts oder namens verzeychnet", und Riese fügt dem bei, dass diese „Zeichen oder Benennung im gemeinen brauch teglich gehandelt werdenn"; und beide stellen folgende Liste derselben auf:

Dragma	φ
Radix (oder Coss)	ꝛ (ꝝ bei Widman)
Zensus	ȥ
Cubus	c𝓁
Zensus de Zensu (Zensdezens)	ȥȥ
Sursolidum (bei Stifel: *surdesolidum*)	β (ß)
Zensicubus	ȥc𝓁
Bissursolidum (Bsursolidum)	biß (𝔅ß)
Zensus Zensui de Zensu (Zenszensdezens)	ȥȥȥ
Cubus de Cubo	cc𝓁

Obwohl diese Liste von den beiden genannten Cossisten und auch nach ihnen noch — von Apian, Menher u. A. — gewöhnlich nur bis zum Cubusdecubo sich fortgeführt zeigt, ist doch daraus zu ersehen, dass im Allgemeinen die Bezeichnung mit dem oben hervorgehobenen Princip der indischen übereinstimmt, die höheren Potenzen nämlich durch Potenziren der niedrigeren zu gewinnen. Hiermit war es gegeben, die sämmtlichen Potenzen, deren Exponenten Primzahlen sind, mit besonderen Namen und Zeichen zu versehen.

Was nun das Zeichen für die einfache Unbekannte selbst betrifft, für die Radix oder Coss oder, wie Riese sich charakteristisch ausdrückt, für „die wurtzel oder das dingk welches geschwengert etzliche Zal zu tragen", so ist leicht zu erkennen, dass jenes Zeichen einfach eine Abkürzung des Wortes *radix* ist, also ein kleines lateinisches *r* mit einem eben die Abkürzung bezeichnenden angehängten Schnörkelzuge, und wenn noch ein Zweifel hieran bestehen sollte, so wird derselbe gehoben durch einen Einblick in Apian's Rechenbuch (fol. Z. 3): dieser lässt geradezu ein

lateinisches *r* drucken nebst einem Anhängsel, das mit dem beim Zeichen für Cubus (= c𝓁) sich findenden übereinstimmt.

Eine andere Frage aber ist die nach der Zeit der Einführung dieses Zeichens 𝓏. Und in Bezug hierauf muss ich einer, wie ich glaube, verbreiteten Meinung entgegentreten, welche man z. B. freilich schon vor Jahren, in folgender Weise formulirt hat*): „Eine Bezeichnung, deren Einführung mit grösserer Bestimmtheit Stifel zugesprochen werden kann, ist die Darstellung der unbekannten Grösse durch *r* als Anfangsbuchstabe von *radix* (vgl. *Arithm. int.* fol. 228)." Davon abgesehen, dass Stifel an der angegebenen Stelle durchaus nicht den Glauben aufkommen lässt, als sei der erstmalige Gebrauch dieses Zeichens ihm zuzuschreiben, so beweisen schon die der Zeit vor Stifel angehörenden citirten Cossisten den Irrthum jener Meinung. Aber sogar schon lange vor ihnen war jenes Zeichen in Deutschland gebräuchlich: das die Vorzeichen + und — schon früh benützende Buch von Widman (1489) ist das erste gedruckte Schriftwerk, bei dem jenes Zeichen (und zwar in der Form 𝓍) in der Bedeutung für *cosa* vorkommt (ib. fol. 𝔊); aber auch die Mitte des 15. Jahrhunderts benützt schon dieses Zeichen, wie das schon mehrfach erwähnte Wiener Manuscript beweist. Wenn also an der angegebenen Stelle beigefügt wird, dass das *x* erst 80 Jahre nach Stifel durch Harriot eingeführt worden sei, so mag das von dem Namen des Buchstabens *x* richtig sein; das Zeichen selbst nimmt zu Stifel's Lebzeiten schon (z. B. bei Menher) eine Gestalt an, in welche nur der die Entstehung Kennende noch ein *r* hineinzudeuten vermochte.

Das einem *β* ähnliche Zeichen für *sursolidum*, d. i. „für ein taube Zal die kein gemeinschafft weder mit dem quadrat Noch cubo hat", hat mit jenem griechischen Buchstaben durchaus nichts zu thun; es ist die Zusammenstellung eines langen und kurzen lateinischen *s* (= *ſs*), welche dann beim Schreiben in einen einzigen Zug überging und demgemäss gedruckt wurde, während in deutscher Schrift das ß dafür eintrat. Als man weiterhin zur siebenten Potenz der Unbekannten gelangte, welche „kein auszzihung des quadrat noch cubi hat, sonder die im selbest gesetzt ist" (Riese), bildete man den Namen des zweifachen *sursolidum* oder *„bissursolidum"* und bezeichnete diesen Begriff durch *biß* oder *bß* (wohl auch 𝔅ß), welches Zeichen bei Manchen allmählig die Vorstellung erweckte, als sei es, dem einfachen *ß* als gleichsam einem *aß* entsprechend, durch Zusammenstellung des Rangbuchstabens *b* mit *ß* entstanden, so dass es in Folge davon dann auch als *„besursolidum"* gelesen wurde. Dass man die Reihe auch weiter fortsetzte als bis zur neunten Potenz der Unbekannten, und wie, werden wir bald sehen.

---

*) Zeitschrift für Mathematik und Physik, II. Jahrgang v. J. 1857, S. 366.

7. Die älteren Cossisten führen die in der letzten Liste aufgestellten Namen und Zeichen ohne weitere Erläuterung ein, höchstens dass sie davon reden, wie „vnser vorfaren die zalen nach natürlicher ordnung genen̄et", oder wie „die alten weisen | welche dan̄ zu allen zeiten sich haben ernstlich gefliessen | wie sie möchten erfinden einen kurtzen weg zu vnderrichten jre befolhen discipeln oder jünger | in der hochberümbten kunst Arithmetica. Demnach ist durch sie in tag bracht die rechnung gesprochen von einem ding | oder de re | vnd haben in einer ieglichen rechnung anfang gesetzt | es sei ein radix vnd darnach geprocedirt od' fürtgangen nach laut der auffgab" (Grammateus).

Im Unterschiede hiervon stellt es sich als ein Vorzug Stifel's heraus, dass er seine Darstellung der Algebra mit der Angabe der Bedeutung jener Zeichen beginnt, dass er den Lernenden nicht erst aus den Beispielen den Sinn und den innern Zusammenhang jener Symbole errathen lässt. Die ursprüngliche Entstehung des Namens „Wurzel" klarlegend geht er davon aus, dass „bei einer mit der Einheit beginnenden geometrischen Progression als Wurzel bezeichnet wird diejenige Zahl, welche der Einheit unmittelbar folgt und zwar desshalb, weil alle folgenden Glieder jener Progression aus dieser wie aus einer Wurzel hervorwachsen" (*Ar. int.* fol. 31r); er erklärt dann, dass die den Gliedern einer geometrischen Reihe entsprechend benannten und durch 1, 1𝔯, 1ʒ, 1𝔠ℓ, 1ʒʒ, ... angedeuteten Zahlen „Cossische Zahlen" heissen, dass diese „keine bestimmte Zahl bedeuten, noch auch irgend welches bestimmte Verhältniss festsetzen" (ib. fol. 235r), und dass sie nur so lange „unbekannt sind, bis sie durch Auffindung einer Gleichung gelöst werden". Weiter führt er aus, dass die Reihe der cossischen Zahlen sich ins Unendliche erstrecke, wobei jeder einzelnen eine Rangzahl *(„exponens")* zukomme und dass aus eben diesen „Exponenten" die zugehörigen „Cossischen Zeichen" sich bestimmen lassen: man habe nur, falls der Exponent zusammengesetzt ist, diesen in seine Primfaktoren zu zerlegen *(„resolue in partes suas aliquotas incompositas")* und für jeden solchen Faktor das ihm zugehörige Zeichen zu setzen (so findet er z. B. als „das cossische zeichen an der drey hundertesten zal der Cossischen progresz" das folgende: ʒʒ𝔠ℓß̃ß̃); falls aber der Exponent nicht zusammengesetzt, müsse man ausser 𝔯, ʒ, 𝔠ℓ die folgenden Zeichen gebrauchen: *ß*, *bß*, *cß*, *dß*, *eß*, ... Man sieht, wie Stifel hier von der falschen Vorstellung über die Entstehung des *bß* ausgehend oder wenigstens unter Anpassung an dieselbe die übrigen Zeichen gebildet hat. Dagegen macht Stifel einen unleugbaren Schritt zur Vereinfachung, indem er die sonst stets durch ein besonderes Zeichen angedeuteten absoluten Zahlen eben nur nach ihrem Ziffernwerthe ausdrückt, ohne ihnen ein begleitendes Zeichen beizufügen.

Erwähnung verdient es noch, dass Stifel in seiner deutschen Ausgabe

von Rudolff's Coss (fol. 60[r]) „die Cossische progresz“ in folgender Weise aufzeichnete, bezw. fortsetzte:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1 ·	1𝓍 ·	1ʒ ·	1𝔠 ·	1ʒʒ ·	1ß ·	1ʒ𝔠 ·	1𝔅ß ·	1ʒʒʒ ·	1𝔠𝔠 ·	1ʒß ·	1ℭß ·

12	13	14	15	16	17	
1ʒʒ𝔠 ·	1𝔇ß ·	1ʒ𝔅ß ·	1𝔠ß ·	1ʒʒʒʒ ·	1𝔈ß ·	„Vn so fort ahn ohn ende.“

Aber als ob er das Unzulängliche dieser Bezeichnung gefühlt und das Bedürfniss gehabt, im Zeichen selbst den Exponenten der betreffenden Potenz dem Auge vorzuführen, so versucht er auch noch eine andere, weiterhin freilich nicht zur Verwendung gebrachte Bezeichnung. Er führt nämlich weiter mit den Worten (Rud. Coss fol. 61[r]): „Es mag aber die Cossische progresz auch also verzeychnet werden:

0	1	2	3	4	
1 ·	1𝔄 ·	1𝔄𝔄 ·	1𝔄𝔄𝔄 ·	1𝔄𝔄𝔄𝔄 ·	etc.

Item auch also:

0	1	2	3	4	
1 ·	1𝔅 ·	1𝔅𝔅 ·	1𝔅𝔅𝔅 ·	1𝔅𝔅𝔅𝔅 ·	etc.

Item auch also:

0	1	2	3	4	
1 ·	1ℭ ·	1ℭℭ ·	1ℭℭℭ ·	1ℭℭℭℭ ·	etc.

Vnd so fort an von andern Buchstaben.“

Gewiss ist diese Art der Bezeichnung derjenigen vorzuziehen, welche acht Jahre zuvor in seiner „Deutschen Arithmetica. Inhaltend. Die Hauszrechnung. Deutsche Coss. Kirchrechnung“ (1545) zur Verwendung gebracht hatte. In dem Bestreben nämlich, die Coss auch dem gesammten deutschen Publikum zugänglich zu machen, führte er deutsche Benennungen ein, bei denen es uns freilich gewaltig um die Ohren summt: „Der Algorithmus meiner deutschen Coss braucht zum ersten schlecht vnd ledige zalē | wie der gemein Algorithmus | als da sind 1 2 3 4 5 etc. Zum andern braucht er die selbigen zalen vnder disem namen | Sum̄a. Vnd wirt dieser nam Suma | also verzeichnet | Sum̄: Als hie | 1 Sum̄: 2 sum̄ etc. . . . So ich aber 2 sum : Multiplicir mit 3 sum : so kom̄en mir 6 sum : sum : Das mag ich also lesen | 6 summē summarum | wie man den̄ im Deutschē offt findet | sum̄a sum̄arum . . . . Soll ich multipliciren 6 sum : sum : sum : mit 12 sum : sum : sum : So sprich ich | 12 mal 6. macht 72 sum : sum : sum : sum : sum : sum . . .“!!

8. Ausser der zu Anfang des vorletzten Paragraphen dargestellten und weitaus gebräuchlichsten Art die cossischen Zahlen zu nennen und zu schreiben gab es aber in Deutschland noch andere, welche mehr darauf Rücksicht nahmen, die Rangstufe der betreffenden Zahl kenntlich zu machen.

Den Versuch Stifel's haben wir soeben kennen gelernt. Aber auch Grammateus schon, der Vorläufer Rudolff's, spricht sich aus wie folgt: „Wan̄ zalen (wie 1, 2, 4, 8, 16, 32, . . .) sein nach einander geschriben nach Haltung einer proportion | so verzeichne ein iegliche quantitet mit der zal jrer ordnung als inn proportione dupla | setz vber 2 die zal 1 | vber 4 schreib 2 | auch mach auff 8 welche ist die dritt quantitet 3 . . . . .

N.	1	2	3	4	5	6	7	
1	2	4	8	16	32	64	128	. . . .

Darnach sein solche ordentlich zal nach der proportz gesetzt auszzusprechen | als 2 ist die erst quantitet | 4 die ander quantitet | vnd die drit quantitet. Also fürbass 8 etc." Und wird als „anfang gesetzt | es sei ein radix . . . so kom̄en mancherlei namen der quantitet | als | census | cubus | census de cen etc. . . . . Vnd vil andere namen sich noch geben | von welchen ich alhie nit weiter wil meldung thun | sunder meine meynung für mich nemen . . . endtlich sein disz die namen welche man braucht in gegenwertiger rechnung | als numerus also geschriben | N. 1a · pri · 2a · se · 3a · ter · 4a · quar · 5a · quin · 6a · sex . . . ." Demnach stellt sich bei Grammateus in der Form 9 ter + 30 se — 6 pri + 48 N dar, was wir heute durch $9x^3 + 30x^2 - 6x + 48$ bezeichnen.

In einer hiervon etwas verschiedenen, doch gewiss minder guten Weise hat später Scheubel (1551) den Rang der einzelnen Benennungen auch durch die Bezeichnung ausgedrückt. Nachdem er nämlich die gewöhnlichen cossischen Namen und Zeichen angegeben hat, bemerkt er, dass dieselben sich ins Unendliche erstrecken, woraus für die Benennung ein Hinderniss erwachse, dass er also hierfür die ja auch ins Unendliche verlaufende Reihe der natürlichen Zahlen verwerthen wolle: so behält er für *Numerus* das Zeichen φ und für *Radix* das Zeichen *ra.* bei, benennt dann aber weiterhin ʒ, weil durch einmalige Multiplikation von *ra.* mit *ra.* entstanden, als *Prima Quantitas,* und entsprechend ꝯ, . . . *Bſs*, . . . *Tſs (= Tersursolidum)*, . . . als *Secunda*, . . ., *Sexta*, . . ., *Decima Quantitas* . . . und gebraucht für dieselben durchgängig die abkürzenden Zeichen:

pri., *se.*, *ter.*, *quar.*, *quin.*, *sex.*, ..., *dec.*, ...

So entgeht er zwar dem Vorwurfe, welcher später, z. B. von Clavius, gegen diese Bezeichnung erhoben wird, dass nämlich bei etwaiger Verwendung von gewöhnlichen Zahlzeichen zu diesem Zwecke leicht eine Confusion eintreten könne zwischen ihnen und sonst in der Rechnung vorkommenden Zahlen; aber gleichwohl hat die Folgezeit diese Bezeichnung nicht angenommen, sondern ist längere Zeit noch bei der von den ältesten Cossisten gebrauchten stehen geblieben.

Bei Ramus und dessen in Deutschland lehrendem Schüler Salignac macht sich wieder eine andere Art der Benennung und der Bezeichnung

geltend, wobei man, was letztere betrifft, bereits die Vorliebe für das Griechische bemerken kann, die überall schon bei Ramus sich zeigt, weiterhin aber bei Vieta sich gewaltig steigert. Es werden nämlich als Namen für die auf einander folgenden Potenzen der Unbekannten die folgenden gebraucht: *latus* (1), *quadratus* (2), *cubus* (3), *biquadratus* (4), *solidus* (5), *quadraticubus* (6), *secundus solidus* (7), *triquadratus* (8), *bicubus* (9), *solidi quadratus* (10), *tertius solidus* (11), *biquadraticubus* (12), *quartus solidus* (13), *secundi solidi quadratus* (14), *solidi cubus* (15), *quater quadratus* (16), *quintus solidus* (17), *quadrati bicubus* (18), *sextus solidus* (19), *solidi biquadratus* (20). Dabei begründet Salignac das Verfahren, die 7. und 11. Potenz, nicht der 4. und 8. entsprechend als *bisolidum* und *trisolidum*, sondern als *solidum secundum tertiumque* zu benennen, in folgender Weise: „*In biquadrato enim et bicubo latus quadrati aut cubi bis continue, in triquadrato et tricubo latus quadrati et cubi ter continue eodem modo erui potest, at in secundo, tertio quartoque solido latus solidi semel tantum eruitur: et, quod in primis notandum est, alia est analysis primi solidi, alia secundi, alia tertii.*“ — Die Bezeichnungen sind entsprechend gewählt, nämlich:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
l	*q*	*c*	*bq*	*s*	*qc*	*βs*	*tq*	*bc*	*sq*	*γs*	*bqc*	*δs*	*βsq*	*sc*	*qq*	*εs*	*qbc*	*ζs*	*sbq*.

Werden nun diese Zeichen mit Zahlen verbunden, so ist eine Zusammenstellung in doppelter Weise möglich, und in Bezug hierauf gibt Salignac die Regel: „*Si numeri propositis notis praeponuntur, praepositi figuratos numerant; sin postponuntur, postpositi figuratorum valorem explicant.*“ Dem entsprechend liest er $2q$, $3c$, $\frac{3l}{5}$ bzw. als „*duo quadrati, tres cubi, tres quintae lateris seu tria latera diuisa per* 5“ u. s. w., dagegen $l2$, $lc8$, $lbq16$ bezw. als „*latus quadrati* 2, *latus cubi* 8, *latus biquadrati* 16“, so dass ihm die Stellung der Zahlen hinter den Zeichen als Wurzelbezeichnung dient.

Die grösste Annäherung an unsere heutige Bezeichnung der Potenzen scheint sich nach Stifel zuerst bei Bürgi und dessen Schüler Reymers zu finden. Der erstere geht nämlich von der Beobachtung aus, dass der ganze cossische Progress sich auf die geometrische Progression stütze, dass dies aber auch bei der *Logistica astronomica* der Fall sei, d. h. bei der Rechnung mit Graden, Minuten, Secunden, wobei „60 die *progressional*zahl ist“; es sei daher am besten, wenn man auch in der Coss die in der *Logistica astronomica* gebräuchliche Bezeichnung benütze. Bürgi gebraucht deshalb letztere vielfach, so dass er z. B. unser heutiges

$$8x^6 + 12x^5 - 9x^4 + 10x^3 + 3x^2 + 7x - 4$$

durch

$$\begin{matrix} \text{VI} & \text{V} & \text{IV} & \text{III} & \text{II} & \text{I} & 0 \\ 8 & +12 & -9 & +10 & +3 & +7 & -4 \end{matrix}$$

darstellt, und er benennt dabei die übergeschriebenen Zeichen als „*Characteristici*“ oder „*Exponentes*“. Der die Arbeiten von Reymers benützende Faulhaber kehrt aber wieder zu der Stifel'schen Bezeichnung zurück, gebraucht übrigens wie Reymers das Zeichen ÷ statt des Minuszeichens.

II. Vom Algorithmus der Coss.

9. Im einleitenden Ueberblicke habe ich schon erwähnt, dass die im vorigen Abschnitt angegebenen Namen und Zeichen für die Unbekannten und deren Potenzen nur erfunden wurden, um innerhalb der Gleichungen, welche zur Ermittelung des Werthes der Unbekannten dienen, verwendet zu werden. Da aber jede Umformung solcher Gleichungen, wie sie ja behufs Anwendung der „Regeln der Coss“ nöthig wurde, stets schon ein Rechnen mit Ausdrücken war, in welchen die verschiedensten Zusammenstellungen eben jener Symbole vorkamen, so entwickelte sich neben den Regeln der Coss auch der „Algorithmus der Coss“, d. h. die zusammenhängende Darstellung der Lehre, wie die Rechnungsarten der gewöhnlichen Arithmetik auch an den „zalen der coss vnd iren charakteren“ durchzuführen seien. Das Nämliche meint Rudolff, wenn er sagt, dass der „algorithmus der Coss zu latein genen̄t würt | da additis et diminutis integrorum vnd in Brüchen: dz ist von zugesetzten vnd abgezogenen zalen“.

Naturgemäss geht der mehrfach genannte Algorithmus, dessen eigentliche Bestimmung Grammateus z. B. durch die Beifügung „dienend den regeln Cosse“ andeutet, der Angabe dieser letzteren selbst, also der eigentlichen Lösung der Gleichungen voraus: so ist dies in der That bei Grammateus, Rudolff, Stifel, Menher, Scheubel u. A. Und meist werden nur unsere heutigen vier Grundrechnungsarten abgehandelt, seltener wie von Stifel auch das Ausziehen der Wurzeln.

10. Dass beim Addiren und Subtrahiren nur je die „zalen gleicher benen̄ung“, „die quantitet eines namens“ vereinigt werden können, findet sich stets in gleicher Weise ausgesprochen; die Angabe, wie dieses zu geschehen habe, macht regelmässig ein Beachten der Vorzeichen nothwendig. Hierbei werden gewöhnlich die einzelnen möglichen Fälle der Zusammenstellung unterschieden, und zwar entweder so, dass tabellarisch die Verhaltungsmassregeln angegeben werden, wie z. B. von Rudolff, welcher dem Beispiele des aus der Mitte des 15. Jahrhunderts stammenden Wiener Manuscripts folgend vorschreibt:

Wan̄ du sum̄irē wilt { {+, −} mit {+, −} addir vnd schreib {+, −}
{+, −} mit {−, +} Subtrahir ein zal vō d andern | schreib zum übrigē dz zeichē der grössern. }

Oder es werden die Einzelvorschriften auch zu allgemeineren Regeln hierüber zusammengefasst, wie z. B. Grammateus für das Addiren als „gemeynen Beschluss“ gibt: „So die zeichen an einander vngleich sein | subtrahir alle mal das kleine von dem grössern | Vnd zum vbrigen setz der grössern zal zeichen.“

Ebenso wird auch „die species der Subtractio wie die andern geteylet in etliche regel“; so gibt Rudolff z. B., hierin wiederum der vorhin angeführten Quelle folgend, die folgenden:

<table>
<tr><td rowspan="2">Wañ du wilt subtrahirn</td><td rowspan="2">+ von + oder
— von — vnd
die ober zal ist</td><td>grösser dañ die vnter</td><td rowspan="2">subtrahir vnd schrib des übrigen</td><td>zeiche</td></tr>
<tr><td>kleiner dañ die vnter</td><td>gegenzeichē</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="4">+ von — oder widervmb | addier vnd schreib das zeichen der obern zal</td></tr>
</table>

Bei Stifel macht sich wie überhaupt, so auch hier das Bestreben geltend, die nöthigen Vorschriften aufs kürzeste zusammenzudrängen; so gibt er als *Regulae additionis et subtractionis* in seiner *Arithmetica integra* (fol. 122[v] und 238[r]) die folgenden:

1) *Eadem signa idem signum ponunt, nisi in subtractione, ubi numeri praepostere ponuntur (i. e. quando maius ponitur sub minore).*

2) *Diversa signa commutant speciem. Et* **A** *(= Additio) ponit* **M** *(= Majoris numeri signum). Sed* **S** *(= Subtractio) ponit* **S** *(= Superioris numeri signum).*

Bequem für den praktischen Gebrauch lehrt er auch betreffs der Subtraktion kurz die Vorschrift: „Soll ich subtrahiren . . . . setz die angezeygte zal flugs hernach mit disem vorteyl. wo ich + hab | da setze jch —. vnd wo jch — hab | da setz ich +. so ist das subtrahiren geschehen.“

Entsprechend der allgemeinen Sitte der damaligen Zeit*) ist natürlich von einer Begründung der Richtigkeit solcher Rechenvorschriften niemals die Rede.

11. In Bezug auf die Multiplikation unterscheidet man auch dem Ausdrucke nach erst um die Mitte des 16. Jahrhunderts scharf *„signum, numerus, character“* des einzelnen Gliedes (Scheubel) und hebt demnach hervor, dass „wohl zu mercken ist | wie der selbig Algorithmus | in gantzen Cossischen zalen | in sich schleuszt drey Algorithmos. Erstlich den gemeynen Algorithmum von gemeynen zalen. Zum andern | den Algorithmum von Cossischen zeychen. Zum dritten den Algorithmum diser zweyen zeychen + und — ·“ (Stifel). Dass man aber bei Multiplikation von mehrgliedrigen Ausdrücken „alle mal ein iegliche vnder quantitet iñ

*) Vgl. mein „Rechnen im 16. Jahrhundert“, S. 9 u. sonst.

allen obern multipliciren muss", gibt in deutlichen Worten schon Grammateus an. Als Zeichenregel wird überall, jedoch in verschiedener Breite des Ausdruckes, unsere heutige den Indern schon geläufige angegeben, am kürzesten bei Stifel: *„Eadem signa ponunt signum additorum: diuersa uero signa ponunt signum subtractorum"*; dass Scheubel hierbei schon die Ausdrücke *signum affirmatiuum* und *priuatiuum uel negatiuum* gebrauchte, darf wohl besonders erwähnt werden.

Von einer irgendwie auch nur plausibeln Erläuterung des Grundes solcher Zeichenregel ist natürlich nirgends die Rede, und Clavius sagt geradezu, nachdem er die Gleichwerthigkeit von $(-a)\cdot(-a)$ mit $(+a)\cdot(+a)$ hervorgehoben: *„debilitas ingenii humani accusanda, quod capere non potest, quo pacto id uerum esse possit."*

Verhältnissmässig am schwierigsten war es damals, wo jede der Potenzen der Unbekannten meist ihr besonderes Symbol hatte, in Kürze den Namen des Produktes und das zugehörige cossische Zeichen anzugeben. Mehrfach findet sich zu diesem Zwecke, der Einmaleinstabelle entsprechend gebildet, eine vier- oder dreieckige Tafel mit doppeltem Eingange, aus welcher das Gewünschte unmittelbar zu entnehmen war, so bei Grammateus, Rudolff; da aber nach des letzteren Ausdruck „die tafel schwer ist ins hirn zu bringẽ | noch schwerer zu behalten", so war es auch bei denjenigen, welche nicht wie Grammateus oder Scheubel die Reihe der natürlichen Zahlen zur Kennzeichnung der Rangstufe benützten, allgemeiner Brauch, die Reihe der ganzen Zahlen anzuschreiben und darunter je die entsprechenden cossischen Zeichen: „wañ du dañ multiplicirst zusamen zwo quantitet | so entspringet ein quantitet | über welcher steet die zal welche sich erzeygt | wañ du solche obgesatzte zal der zweyer quantitet zusamen zu multipliciren addirst", sagt Grammateus, und Rudolff kürzer schreibt vor: „um zu wissen den nam eines products | addier die zalen so gefundẽ werdẽ über den zweien quantitetn welh du mit einander multiplicirst". Stifel aber, welcher die übergeschriebene Zahl den „Exponenten" der cossischen Zahl nennt, kann in ganz moderner Weise als Multiplikations- und Divisionsregel aufstellen: *„Exponentes signorum, in multiplicatione adde, in diuisione subtrahe, tunc fit exponens signi fiendi"* (*Arithm. int. fol.* 236[v]).

Zur Erläuterung der Schreibweise füge ich die folgenden Exempel bei:

Grammateus:

```
 6 pri. +  8 N
    Durch
 5 pri. —  7 N.
──────────────────────────
30 se. + 40 pri.
       — 42 pri. — 56 N.
──────────────────────────
30 se. —  2 pri. — 56 N.
```

Stifel:

```
 6 ʒ  +  8 𝓍 —  6
 2 ʒ  —  4
─────────────────────────────────
12 ʒʒ + 16 ce — 12 ʒ
             — 24 ʒ — 32 𝓍 + 24
─────────────────────────────────
12 ʒʒ + 16 ce — 36 ʒ — 32 𝓍 + 24
```

Salignac: **Scheubel:**

$$\begin{array}{r}
9q + 8 - 3l \\
7c - 4bq - 8q \\
\hline
-72bq - 64q + 24c \\
-36qc - 32bq + 12s \\
63s + 56c - 21bq \\
\hline
75l + 80c - 36qc - 125bq - 64q
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
9\,pri. + 8N - 3\,ra \\
7\,se. - 4\,ter. - 8\,pri \\
\hline
63\,quar. + 56\,se. - 21\,ter. \\
-36\,qui. - 32\,ter. + 12\,quar. \\
-72\,ter. - 64\,pri. + 24\,se. \\
\hline
75\,quar. + 80\,se. - 36\,qui. - 125\,ter. - 64\,pri.
\end{array}$$

12. Zur Division zunächst der einfachen Potenzen durch einander wird von Grammateus unter offenbarer Anwendung unserer Definition des Dividirens folgende Vorschrift gegeben: „es kumbt ein quantitet | welche zal der ordnung geaddirt zu der zal d' ordnung der quantitet des teilers | gibt die ordenliche zal der quantitet die do geteilt ist worden | Als wañ ich teyle ein oct. durch ein tertz | so ist im quocient ein quint: dañ 3 vnd 5 gebē 8.“ Zuweilen ist auch hierzu eine besondere Tafel beigefügt, wieder mit doppeltem Eingange; häufiger aber findet sich eine Vorschrift wie bei Rudolff: „Subtrahir die zal der kleynern von der zal der grössern quantitet. Durch das übrig wirt kundt der nahm des Quotients.“

Dies konnte sich jedoch nur auf den Fall beziehen, wenn „ein grösser quantitet diuidirt wirt durch ein kleiner“; für den entgegengesetzten Fall aber und wenn zusammengesetzte Ausdrücke als Divisoren auftreten, gelangte man zur Aufstellung eines besonderen Abschnittes „über den algorithmus de additis et diminutis in prüchen“ (= *„De minutiis cossicorum numerorum“* bei Stifel), welcher übrigens leicht abzuhandeln war: denn „allhie ist durch alle species zu thun | wie in gemeynen brüchen gelert ist“. Wie aber hierbei verfahren wurde, habe ich in meiner Abhandlung über „das Rechnen im 16. Jahrhundert“ (S. 78—83) ausführlich dargestellt, so dass ich mich hier kurz fassen kann, wohl am besten, indem ich einige Beispiele vor Augen führe.

Addition und Subtraktion.

(Grammateus): $\frac{3\text{ pri}}{4\text{ se}} + \frac{5\text{ ter}}{6\text{ quar}}$; „multiplicir durch das creutz ··· vnd steht“:

$$\frac{38\text{ quin}}{24\text{ sext}} \text{ oder } \frac{19\text{ N}}{12\text{ pri}}.$$

(Rudolff): $\frac{1\mathfrak{x} - 2}{12}$ von $\frac{12}{1\mathfrak{x} + 2}$ Rest $\frac{148 - 1\mathfrak{z}}{12\mathfrak{x} + 24}$.

(Scheubel): $\frac{48N}{7\,pri} - \frac{48N}{12\,ra - 3\,pri}$ [gesprochen: *duodequinquaginta numeri diuisi in septem primas etc.* . . .] in folgender Ausführung:

$$\cfrac{\cfrac{576\,ra. - 480\,pri}{\cfrac{336\,pri}{\;}\qquad \cfrac{576\,ra - 144\,pri}{\;}}}{\cfrac{48\,N}{12\,ra - 3\,pri}\ de\ \cfrac{48\,N}{7\,pri}} \quad \underset{84\,se. - 21\cdot ter}{} \quad ma(net)\ \frac{576\,ra. - 480\,pri}{84\,se. - 21\,ter.}\,.$$

(Salignac): $\begin{matrix} 6\,tq & & 10\,s \\ \dfrac{2\,\not c}{5\,\not l} & ad & \dfrac{2\,\not b\not q}{3\,\not s} \\ 3\,\not s & & 5\,\not l \\ & \underbrace{\qquad\qquad}_{15\,qc} & \end{matrix}$ *totus est* $\dfrac{6\,tq + 10\,s}{15\,qc}$ *vel* $\dfrac{6\,c + 10}{15\,l}$.

Si notas ante additionem reducas, additio sic erit:

$$\frac{2\,\not c\not q}{5\,\not l}\ ad\ \frac{2\,\not b\not q}{5\,\not s\not l}\ \left|\ \begin{matrix} 6\,c & & 10 \\ \dfrac{2\,\not q}{5} & ad & \dfrac{2}{3\,\not l} \\ 3\,\not l & & 5 \\ & \underbrace{\qquad\qquad}_{15\,l} & \end{matrix}\right.\ totus\ est\ \frac{6\,c + 10}{15\,l}\,.$$

Multiplikation und Division.

Grammateus: $\dfrac{3\cdot \text{ta}}{6\ \text{se}}$ mit $\dfrac{8\ \text{ter}}{10\ \text{quart}}$ gibt $\dfrac{24\ \text{quart}}{60\cdot 6\,\text{a}}$ oder reducirt gibt es $\dfrac{24\ \text{N}}{60\ \text{sec}}$

oder $\dfrac{2\text{N}}{5\ \text{sec}}$.

Rudolff: $1\,\mathfrak{x}$ durch $\dfrac{1\,\mathfrak{x}}{100} + 1\tfrac{1}{2}$ Steht also $\dfrac{1\,\mathfrak{x}}{1} \times \dfrac{2\,\mathfrak{x} + 300}{200}$ fac. $\dfrac{200\,\mathfrak{x}}{2\,\mathfrak{x} + 300}$.

Scheubel: $\dfrac{15\,se\cdot + 20\,ra}{12\,ra}$ zu theilen „in“ $\dfrac{6\,pri + 8\,N}{9\,pri}$ ist gleich

$\dfrac{45\,ter + 60\,pri}{35\,pri}$ „in“ $\dfrac{24\,pri + 32\,N}{36\,pri}$ gibt $\dfrac{45\,ter + 60\,pri}{24\,pri + 32\,N}$.

Bei solchen Rechnungen stellte sich oft genug, sei es um das gewonnene Resultat oder um gegebene Grössen zu vereinfachen, die Aufgabe ein, „zu reducirn brüch in kleynsten namen“. Diese lösen die Meisten ohne weitere Erklärung; Grammateus aber gibt die Vorschrift: „Setz die zwen namen vber einander | das ist den namen den mann teylt | vnd das dardurch dañ solchs würt geteylt | vnd bring einen ieglichen namen einer quantitet in den nechstē vor jm“, und Stifel unterscheidet eine *reductio ad terminos signorum* $\left(\text{z. B. } \dfrac{27\,\beta + 24\,\mathfrak{C}}{12\,\mathfrak{C}}\ \textit{facit}\ \dfrac{27\,\mathfrak{z} + 24}{12}\right)$ und eine *reductio ad terminos numerorum* $\left(\text{z. B. das eben gewonnene } \dfrac{27\,\mathfrak{z} + 24}{12}\right.$ $\left.\textit{facit}\ \dfrac{9\,\mathfrak{z} + 8}{4}\right)$.

13. Dem gewöhnlichen Zahlenrechnen entsprechend wird im Anschlusse an den Vortrag der Grundrechnungsarten zuweilen auch noch die Regel de tri sowohl in „gantzen“ als in „brüchen“ abgehandelt; da aber diese ganze Regel der damaligen Zeit im Sinne der Vorschrift:

„Das mittel mit dem hindern multiplicir
„Dasselbig mit dem vordern diuidier“

nur aus der Durchführung einer Multiplikation und einer Division bestand*), so bedurfte sie für cossische Zahlen nur kurzer Erläuterung; das Wesentlichste war, dass „alhie ist zu merken das mañ hab achtung mit allem fleisz | auff die namen der product in der multiplication vnd diuision.“

14. Auch das Wurzelausziehen machte zur Zeit der Cossisten einen Theil des gewöhnlichen Rechnens aus; allgemein pflegte aber von diesen nur das Wurzelausziehen aus reinen Zahlen gelehrt zu werden und zwar nur das der zweiten und dritten Wurzel, bis Apian und Stifel das gewöhnliche Verfahren auch auf höhere Wurzeln ausdehnten**). Konnten aber die Wurzeln nicht ausgerechnet, sondern nur angedeutet werden, so war man zu Irrationalen gelangt, und dass es für das Arbeiten mit solchen, für die Durchführung der Rechengeschäfte an solchen einen besondern Abschnitt gab, werde ich weiterhin darlegen (s. u. S. 44). Das Ausziehen der Wurzeln aus cossischen Ausdrücken aber, welche vollständige Quadrate, Cuben u. s. w. sind, wurde gewöhnlich übergangen und zwar aus einem Grunde, der leicht errathen werden kann; *„sunt enim exempla ista arte facta“* sagt Stifel in einem ähnlichen Falle und so auch hier: die Anwendung der Coss führte kaum auf solche Beispiele, so dass sie kaum anders als mit Absicht durch vorangehendes Potenziren erhalten werden konnten. So durchgebildet war aber im Allgemeinen der Lehrgang damals nicht, dass man dem Systeme zu Liebe derartige Einschaltungen vorgenommen hätte. Erst Stifel redet hiervon und erst in seiner Ausgabe von Rudolff's Coss (fol. 166ᵛ), wo er sagt: „Ich will aber hie trewlich mitteylen | alles was ich da von hab | das Rudolph nicht gehabt hat | ich auch in meyner latinischen Arithmetica nichts davon gesetzt“, und nun verwendet er sein a. a. O. schon dargestelltes Verfahren auf das „extrahiren der quadrat wurtzeln ausz sollichen Cossischen zalen“

144 ʒ + 288 ꝛ + 144 ,

ebenso auf das „extrahiren der Cubic wurtzeln, der zensizensic wurtzeln vnd der sursoliden wurtzeln vnd der zensicubic wurtzeln . . . .“ aus Ausdrücken wie bezüglich die folgenden:

1 𝔠 + 75 ʒ + 1875 ꝛ + 15625
1 ʒʒ + 100 𝔠 + 3750 ʒ + 62500 ꝛ + 390625
1 ß + 125 ʒʒ + ...

*) „Rechnen im 16. Jahrh.“ S. 77.
**) Vgl. meine Abhandlung über „das Rechnen im 16. Jahrhundert“, S. 85—89.

Er erinnert dabei an die Wichtigkeit der Zahlen, welche später Binominalcoefficienten genannt wurden und fügt auch bei „die tafel sollicher zalen die man brauchet zu solliche͞ extrahiren von allerley wurtzeln“, nämlich:

1 ʒ	2	1					
1 𝔠	3	3	1				
1 ʒʒ	4	6	4	1			
1 ß	5	10	10	5	1		
1 ʒ𝔠	6	15	20	15	6	1	
1 𝔅ß	7	21	35	35	21	7	1

So weyt ist yetzt gnug.

15. War irgend eine der Rechnungsarten durchgeführt, so verlangte die vom gewöhnlichen Rechnen her erworbene und festgewurzelte Gewohnheit, die Richtigkeit des Resultates zu prüfen. So findet sich denn auch meist eine Anleitung zur Anstellung der Probe. Die Umkehrung der Rechnungsart war hier naheliegend und wurde auch empfohlen; allgemeiner aber findet sich der Rath und Befolgung des Rathes „den radix in etlich φ zu resoluiren“, d. h. an Stelle der Unbekannten oder Unbestimmten irgend welchen Zahlenwerth zu setzen und die in der Aufgabe gegebenen „zalen in ire numeros zu resoluiren: multiplicir (bezw. addir u. s. w.) dann ein resolutzen mit der andern | kompt dann die resolution der vnteristen zal | so hast du recht gemultiplicirt“ (Rudolff).

Um solche Probe mit grösserer Bequemlichkeit jedesmal durchführen zu können, bilden sich mehrere der Cossisten ein für allemal eine hiefür geeignete tabellarische Zusammenstellung, wie etwa die folgende:

2	4	8	16	32	64	128
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{243}$		
$3\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{4}$	$42\frac{7}{8}$	$150\frac{1}{16}$			
7	49	343	2401	16807		

Aus dieser entnehmen sie dann zum Zwecke der Probe die verschiedenen Potenzen, setzen dieselben in die Bestandtheile der bei der Aufgabe zur Betrachtung gekommenen Werthe ein und sehen, ob so dasselbe Resultat sich ergibt, wie wenn sie diese Einsetzung in dem Ergebnisse der Aufgabe einsetzen.

III. Von dem Rechnen mit Irrationalen.

16. Gleichwie schon in früher Zeit die Anwendung des pythagoreischen Satzes auf die Irrationalen, zunächst des zweiten Grades, geführt hatte, so ergab die Benützung der algebraischen Kunst zur Lösung geometrischer Aufgaben die Nothwendigkeit, Wurzelgrössen in Betracht zu ziehen, deren Radicanden die Unbekannte allein enthielten oder aus ihr und aus bekannten Grössen zusammengesetzt waren. Mit solchen Ausdrücken musste man zu rechnen verstehen, wenn man Gleichungen lösen wollte; und als gar in Deutschland die Unbekannte und deren Potenzen durch einfache Zeichen ausgedrückt wurden und diesen andere Zeichen wie die für *Plus* und *Minus* und die Wurzelzeichen selbst sich zugesellten, da nahmen jene früher ausführlich mit Worten geschriebenen Ausdrücke mehr und mehr symbolische Gestalt an und es bildete sich, freilich erst spät, ein besonderes Kapitel der Algebra aus, in welchem die Durchführung der Rechnungsoperationen mit solchen Symbolen, also der Algorithmus der cossischen Irrationalen gelehrt wurde.

Es war naturgemäss, dass sich dieses Rechnen auf der Grundlage und nach dem Vorbilde des Algorithmus der numerischen Irrationalen ausbildete; eben deshalb erscheint es mir geboten, zuvor diesem letzteren eine eingehendere Betrachtung zu widmen, um so mehr als uns diese eine gar nicht unbedeutende Leistung der deutschen Cossisten, zumal Stifel's, aufweisen wird, von welcher aus die allgemeine Arithmetik Antrieb zu ihrer weiteren Entwickelung empfing.

Von Alters her war es überkommen, im Wesentlichen nur die zweite, dritte und vierte Wurzel aus Zahlen zu benützen, da diese für die Bedürfnisse der Arithmetik und Geometrie vollständig ausreichten und nur sie einer geometrischen Deutung fähig waren. Auf diesem Standpunkte finden wir auch Rudolff, den ersten unserer Cossisten, welcher den Wurzelgrössen eine besondere Behandlung angedeihen lässt. Aber gleichwohl zeigt schon in seinem Werke die deutsche Coss einen grossen Vorsprung vor der der Italiener, da sie den Begriff der Wurzel bereits durch ein eigenes Zeichen anzudeuten gelernt hatte. Gewöhnlich wird diese Aufstellung des neuen Zeichens $\sqrt{}$ eben dem genannten Rudolff als seine Erfindung zugeschrieben*). Aber davon abgesehen, dass er selbst hievon gar Nichts meldet, findet sich in dem Manuscripte der Coss von Riese, das ja noch vor Veröffentlichung von Rudolff's Buch geschrieben ist**), übrigens nur Anleitung zur Lösung von Gleichungen gibt, in dieser findet sich ebenfalls jenes Zeichen. Dass übrigens auch schon in der Mitte des

---

*) Ich selbst war noch dieser Ansicht in meinem „Rechnen im 16. Jahrhundert".

**) Berlet, S. 15 f. So z. B.: $\sqrt{}$36 ʒ wird citirt als „das punct vor den 36 ʒ".

15. Jahrhunderts ein besonderes Zeichen für die Quadratwurzel gebraucht wird, beweist das mehrfach erwähnte Wiener Manuscript. In diesem schreibt die unten noch anzuführende neunte und zehnte Regel vor, man solle beim Quadriren einer Quadratwurzel den vor der betreffenden Zahl stehenden „Punkt" einfach weglassen. Damals diente also ein einer Zahl vorgesetzter Punkt als Quadratwurzelzeichen, welches beim Schreiben dann wohl in einen Punkt mit angehängtem Strichlein überging. Während dann Riese nur das einfache Zeichen $\sqrt{}$ für die zweite Wurzel gebraucht, bemerken wir, dass Rudolff „vermerckt von kürtz wegen radix quadrata mit solchem charakter $\sqrt{}$. Als $\sqrt{4}$ · bedeutet radicem quadratam ausz 4 · ist 2," „radix cubica würt bedeut durch solchen charakter $\sqrt[3]{}$", und „radicis radix | das ist: radix quadrata ausz der geuirten wurtzl würt vermerkt durch solchen charakter $\sqrt[4]{}$"; dagegen benützt Rudolff für die zuweilen erwähnten höheren Wurzeln, wie für „Radix cubica ausz der radix von radice | oder radicis radix von radice cubica", keine besonderen Zeichen.

Rudolff macht unter den Radicanden „dreierlei vnterscheidt. Die ersten werden gesprochen racionaln | sein wolgeschickte zalen | hat je eine in sunderheit radicem. als in quadratis 4 vnd 9. in cubicis 8 vnd 27 etc. Die andern werden genent cōmunicanten | sein mittermessig zalen. haben nit radicem sunder wañ sie in der proporcion am kleinsten gemacht sein: werdē sie racional. als 8 vñ 18 kleiner gemacht | geben 4 vnd 9. Die dritten heissen irracionaln | sein gantz vngeschickte zalen. haben nit radicem | werden auch nit racional weñ sie in der proporcion am kleinstē gemacht sein | als 14 vnd 12."

Wie nun mit den Wurzeln aus solchen Radicanden die verschiedenen Rechnungsarten durchzuführen seien, lehrt Rudolff im Einzelnen, indem er zuerst den „algorithmum zum latein genent de surdis quadratorum" behandelt. Wie nämlich schon Leonardo Fibonacci (1202) das Wort *surdus*, vermuthlich die Uebersetzung der arabischen Uebersetzung des griechischen Kunstwortes ἄλογος oder ἄῤῥητος gebraucht, so benützen dieses auch seine Landsleute der folgenden Zeit und so auch unser Rudolff. „Numerus surdus heysset nämlich ein zal ausz welcher nicht möglich ist radicem zu extrahiren vñ doch nicht dest weniger solliche radix verzeychnet wirt." Das Addiren und Subtrahiren der Quadratwurzeln lehrt er wie die Jahrhunderte vor ihm in einer Weise, welche wir heute kurz durch die Formel: $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a + b \pm \sqrt{4ab}}$ andeuten können; er aber muss deren Inhalt ausführlich in Worten darstellen: „Thu zusamen die quadrat | das collect behalt | darnach multiplicir ein quadrat mit dem andern | das darausz komen ist | multiplicir mit 4 · Radicem quadratam disz letsten products | thu zum erst behaltnen collect | Radix quadrata diser sum̄ erfüllet deyn

begeren | vnd zeygt an die sūma beyder wurtzeln." Doch lehrt er auch „ein andern wegs wie man Cōmunicanten sūmiren mög": „Reducir sye in die kleynste zalen yhrer proportz | so kōmen zwo quadrat zalen | Deren wurtzeln thu zusamen | das da kōpt das quadrir | Das quadrat multiplicir mit der mensur oder zal | durch welche deyne zalen sind gebracht in die kleinste zalen yhrer proportion. Radix quadrata dises products berichtet dich" — also nach der Formel: $\sqrt{a^2 c} + \sqrt{b^2 c} = \sqrt{(a+b)^2 \cdot c}$.

In einem weiteren besonderen Abschnitte von dem „Algorithmus zu Latin gesprochen de surdis cubicorum" behandelt dann Rudolff das Rechnen mit Cubikwurzeln. Rücksichtlich des Addirens unterscheidet er die vorhin schon angegebenen drei Fälle: „Sind die cubic wurtzeln racional | extrahir die wurtzeln | addir eine zur andern"; „sind sye jrrational vnd sind nicht cōmunicanten | addir sye durch das zeychen +"; „sind sye aber cōmunicanten | so reducir sye | das yhr proportio stehe in den kleynsten zalen darīnen sye razional werden. Da addir dan̄ ein wurtzel zur andern | das collect multiplicir in sich selbst cubica | den Cub multiplicir weyter | mit der gröszten mensur | durch welch die cōmunicanten sind in das kleynst gebracht | Radix cubica dises letsten products zeygt an die sūma beider wurtzeln. Als Ich wil addiren ɰ√16 zu ɰ√54 ist die gröste mensura ɰ√2 kōmen ɰ√8 vnd ɰ√27. Das ist 2 vnd 3. sūma beyder | thut 5. Die multiplicir in sich selbs cnbica | macht ɰ√125. die multiplicir mit ɰ√2 | der grösten mensur kōmen ɰ√250. Beschleusset beyde wurtzeln ɰ√16 vn̄ ɰ√54."

Aber Rudolff lehrt auch noch „Ein andere weyse zu Addiren, welche wir in dem Bilde: $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a + b + 3(\sqrt[3]{a})^2 \cdot \sqrt[3]{b} + 3 \cdot \sqrt[3]{a} \cdot (\sqrt[3]{b})^2}$ vorführen; er schreibt auch wieder ausführlich vor: „Thu zusamen die Cubic | behalt das Collect. Darnach schreyb die wurtzeln neben einander. Vnd vber yede yhre quadratzal | Triplum yedes quadrats | multiplicir creutzweys mit der anderen wurtzel | die zwey product addir zum erstbehaltenen collect | Radix cubica dieser letsten suma zeygt ahn beyde wurtzeln" — sagt dann freilich hievon: „will dir sollichen weg nicht mehr den angezeygt | vnd dich da mit gar nichts beladen haben", oder, wie Stifel später (Ausg. von Rud. Coss fol. 103ʳ) erläuterte, „das er selbs nicht darzu rath".

Seine Anleitung zur Multiplikation und Division enthalten unsere heutigen Formeln: $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \cdot b}$ und $\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a : b}$.

In entsprechender Weise handelt dann ein weiteres Kapitel von dem „Algorithmus zu latin genen̄et de surdis quadratorum de quadratis"; ein Uebergreifen in die früheren wird höchstens nöthig, wenn nicht „gleichförmigklich denominirte zalen" multiplicirt oder dividirt werden sollen: dann sind dieselben „vnter gleiche benen̄ung zu bringen", zu welchem Zweck das bekannte Verfahren gelehrt wird.

Eingehender als seine Vorgänger behandelt Rudolff auch den „algo-

rithmum zu latein genennt de binomiis et residuis", indem er Euklid folgend unter Binomium ein „zwinämig zal | fürend mit ir das zeichen + Als $5+\sqrt{7}$", unter Residuum aber „auch ein zwinämig zal gebunden mit dem zeichen — Als $5-\sqrt{7}$" versteht. Solche durch die Rechnungsarten zu verbinden, bedarf es zunächst der Kenntniss der Regeln von den Zeichen, welche ich oben (S. 38) mitgetheilt habe: im Einzelnen ist beim Addiren und Subtrahiren zu beachten, dass „die absoluten zalen zu einander vnd darnach die denominirten zalen" für sich addirt werden, beim Dividiren aber „mustu merckē auff dreierley vnterscheidt der teiler. Nemlich ob der teiler ist ein eintzige denominirte zal oder ein eintziges absolut oder ob er ist ein binomium oder residuum." Im letzten Falle soll man „die zal so geteilt werdē sol vn̄ auch den teiler" mit dem Residuum bezw. Binonium multipliciren, wodurch der Theiler zu einem „absolutischen" werde (nach Eucl. VII, 17), d. h. es sei die Formel anzuwenden:

$$\frac{x}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\frac{x\cdot(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}{a-b}.$$

Alle diese Vorschriften werden jedoch von Rudolff durchaus ohne Beweise mitgetheilt, höchstens einmal mit einem Hinweise auf Euklid begleitet. Dem beim Zahlenrechnen gebräuchlichen Verfahren entsprechend *) gibt er aber zum Schlusse stets eine „Gemein prob über alle species" und es besteht diese darin, die Wurzeln wirklich auszurechnen und so die Richtigkeit des erlangten Resultates zu bestätigen; obwohl nun aber „in com̄unicanten vnd irraconaln nit möglich ist | dz man die wurtzl volkumlich ausziehe | jedoch mag die radix so gnaw gesucht werden | das sie allen zweifl hinwegneme".

Ich hob hervor, dass Rudolff jeder der von ihm betrachteten drei Arten von surdischen Grössen eine besondere Behandlung zu Theil werden lässt; doch hat er selbst die Bemerkung gemacht (Fol. F[v]), „das nit hoch von nötē wer gewesen | die species jedes algorithmi in sunderheit zu erklären", er fühlte also wohl die Gleichartigkeit des Inhaltes, offenbar aber fehlte ihm die Form, derselben vermittelst einer allgemeineren Bezeichnung Ausdruck zu geben.

Es sollte noch lange dauern, bis diese gewonnen war; doch Stufe um Stufe sieht man in den folgenden Zeiten die Annäherung sich vollziehen. Und gerade um diesen stufenweisen Fortschritt beurtheilen zu können, wäre uns Apian's Darstellung der Coss von grosser Wichtigkeit; denn der Gehalt seines Rechenbuches überhaupt, insbesondere sein neues Verfahren, die fünfte und höhere Wurzeln auszuziehen **), geben uns die Be-

---

*) Vgl. mein „Rechnen im 16. Jahrhundert", S. 57.

**) Vgl. mein „Rechnen im 16. Jahrhundert", S. 77 f.

rechtigung zu der Annahme, dass seine Coss uns manches Neue geboten haben würde.

17. So sind wir genöthigt, nach dem Erscheinen von Rudolff's grundlegendem Buche über die Coss volle drei Jahrzehnte unmittelbar zu überschlagen, da meines Wissens kein Schriftwerk existirt, welches in dieser Zwischenzeit die Algebra behandelte. Wir wenden uns sofort zu dem bedeutendsten deutschen Cossisten des 16. Jahrhunderts, zu Michael Stifel.

Im zweiten Buche seiner *Arithmetica integra* und später nochmals in seiner Ausgabe von Rudolff's Coss hat Stifel die Lehre von den Irrationalgrössen ausführlich bearbeitet und in mehrfacher Weise gefördert. Zunächst machte er durch seine Art der Bezeichnung den ersten Schritt zu einer allgemeineren Auffassung der Wurzelgrössen und zu mehr gleichförmiger Behandlung derselben in der Rechnung. In seiner „deutschen Arithmetica" und zwar in dem „angehenkten zusatz | von erdichten zalē | die man neñet Irrationales" gebraucht er zwar im Anschlusse an Rudolff für die 2., 3., 4. Wurzel bezw. die Zeichen ʒ/ ʒ/ ʒ/ , welche stets den betreffenden Zahlen vorgesetzt werden; aber in der ein Jahr früheren *Arithmetica integra* war er schon über Rudolff's Bezeichnung hinausgegangen. Während nämlich Rudolff, wie wir sahen, das vor ihm schon vorhandene einfache Wurzelzeichen durch Vorsetzen eines oder zweier Striche geeignet machte, auch die vierte, bezw. dritte Wurzel anzudeuten, zur Rechnung mit höheren Wurzeln aber nicht aufstieg, konnte sich Stifel bei seinem Streben, auch höhere Wurzeln in ähnlicher Weise symbolisch zu bezeichnen, hieran nicht genügen lassen: er behielt nur das überkommene einfache Wurzelzeichen bei, fügte aber demselben unmittelbar rechts nachfolgend eines derjenigen Symbole zu, welche nach allgemeiner Uebung die verschiedenen Potenzen der Unbekannten bezeichneten, so dass √ʒ, √𝔠𝔢, √ʒʒ, √ß, ... seine Zeichen für die 2., 3., 4., 5., . . . Wurzel sind (fol. 109 der *Ar. int.*), „doch werde ich" — sagt er in seiner Ausgabe von Rudolff's Coss, fol. 82[v] — „dises zeychen √. auch offt brauchen für dises zeychen √ʒ. vmb kurtze willen". Ja der Gleichförmigkeit wegen stellt er zuweilen selbst gewöhnliche rationale Zahlen in Gestalt von Wurzelgrössen dar und gebraucht dabei √0 als Zeichen, so dass, was wir heute $\sqrt[1]{6}$ schreiben würden, bei ihm sich in der Form √0 6 darstellt, *„quod signat nullam esse faciendam multiplicationem"* (*Ar. int.* fol. 115[r]). Und dass er selbst diese neue Bezeichnung erdacht und dass er sich des hohen Werths derselben wohl bewusst war, geht aus seinen Worten hervor, wenn er sagt: *„Neque enim ego talia legendo didici, sed sola obsueratione rerum intellexi, et signorum beneficio (quae in hunc usum mihi adauxi) memoriae commendaui, ita ut in omnibus calculationibus meis, signa mihi ubique sint regulae* (*Ar. int.* fol. 246[v]). Und später (Rud. Coss fol. 83[r]) rühmt er mit Recht von sei-

ner Bezeichnung: „Nu sind meyne zeychen vil bequemlicher vnd bedeutlicher denn desz Christophori. Sind auch vollkom̄ener den̄ sye begreyffen allerley zalen surdischer rechnungen | Als da sind √ß12 · √𝔷𝔠𝔢13 · √𝔅ß14. √𝔷𝔷𝔷15 vnd so fort ahn ohn ende“, und er hebt es rühmend hervor, dass „sollicher surdischer zalen verzeychnisz erreychen desz Christophori zeychen nicht | vnd gehören sye doch auch in dise handlung“.

Und Solches leistete Stifel zu einer Zeit, als die sonst so sehr vorangeschrittenen Italiener noch auf derselben Stufe sich befanden, welche schon das vorangegangene Jahrhundert erreicht hatte, ja zu einer Zeit, wo einer der berühmtesten italienischen Algebristen, Cardanus, noch Bedenken trug den Begriff der Wurzel über den der dritten Wurzel hinaus auszudehnen *).

Eben durch diese unbeschränkte Ausdehnung des Begriffes, welche in seiner vortheilhaften und verhältnissmässig bequemen Bezeichnungsart sich deutlich genug ausspricht, hat Stifel weiterhin wesentlich die allgemeine Arithmetik gefördert. Er sagt selbst (Rud. Coss fol. 83[r]): „So sind auch dise meyne zeychen geschickt | der sach zu helffen | damit aus so vilerley Algorithmis ein einiger vnd richtiger Algorithmus gestellet werde“, und dieses sei möglich, weil „erstlich zeygen dir die zeychen selbs | wie du die surdische zalen nen̄en oder auszsprechen söllest. Als √ß6 heysset Radix sursolida ausz 6. etc. Nachmals zeygen sye dir wie du sye söllest reduciren | durch welchs reduciren | solliche gemeldete vereynigung viler (ja aller sollicher) Algorithmorum entsteht vnd kom̄et“; und ein weiterer Vortheil bestehe darin, dass, „wenn du das surdisch zeychen hast abgethon oder auszgeleschet | so hast du dein surdische zal multiplicirt nach anzeygung deines auszgeleschten zeychens. Als √ß6 · Lesch das zeychen √ß ausz | so bleybt 6. Vnd hast also √ß6 multiplicirt sursolide etc.“, und „also auch so du wilt extrahiren radicem | sye hab eynen nahmen wie sye wölle | das ist | sye heisse Radix quadrata | oder Cubica etc. So die zal dieselbige radicem nicht in sich hat | so setze das surdische zeychen der selbigen benen̄ung für die selbige zal | so ists gemacht. Als radix sursolida ausz 6 ist √ß6. etc.“

Eben deshalb finden sich bei Stifel auch nicht mehr besondere Abschnitte, welche den Irrationalen des zweiten und besondere, welche denen des dritten oder des vierten Grades gewidmet wären; er kennt nur Irrationalen überhaupt und als einfachste derselben die Medialen, d. h. die einfachen Wurzelgrössen, deren Verbindung durch die vier Grundrechnungsarten er übersichtlich und zusammenhängend behandelt, sogar so, dass er dabei selbst die Rationalen in der Form von Wurzelgrössen auffasst. Hierin lag unzweifelhaft ein wesentlicher Fortschritt zur vereinfachten Gestaltung der Arithmetik und zum tieferen Eindringen und klareren Durchschauen des ganzen Gebietes derselben **).

*) „Rechnen im 16. Jahrh.“, S. 63, Anm.

**) Im Allgemeinen hat man nach Stifel dessen Bezeichnung noch lange bei-

Stifel ist aber wohl auch der erste unter den Deutschen, welcher das Irrationale nicht einfach hinnimmt, sondern bestrebt ist, das Wesen und die Berechtigung desselben sich klar zu machen. „*An ueri sint numeri an ficti*" — ist die scharf ausgesprochene Frage, welche er betreffs der Irrationalzahlen sofort zu Anfang des zweiten Buches seiner *Arithmetica integra* aufwirft; und wenn er auch findet, dass sie „*praecisione careant*" und dass sie „*lateant sub quadam infinitatis nebula*", dass sie also keine wahren Zahlen sein können, da sie ja sonst auch entweder ganze oder gebrochene Zahlen sein müssten, so weiss er deren Bedeutung gleichwohl zu würdigen und hebt hervor (z. B. *Ar. int.* fol. 116^r), dass man mit ihrer Hülfe oftmals zu genauen Ergebnissen gelange, während sie doch selbst keinen ganz genauen Werth enthalten („*Et est satis miranda res, calculationem fieri praecisam, in iis quae praecisam quantitatem in seipsis non habent*"). Die Analogie mit den späteren imaginären Zahlen liegt hier auf der Hand.

18. Wir dürfen aber auch ein anderes Verdienst nicht übergehen, welches Stifel ob seiner Behandlung der Lehre vom Irrationalen gebührt. Ihm war es nicht genügend, das Wenige, was seine Zeit hierüber wusste, sich anzueignen; er wollte auf Euklid zurückgehen und damit an der Quelle selbst schöpfen, auf welche so Vieles hinwies, und so las er mit Freunden, welche des Griechischen kundig waren, des alten Meisters grosses Werk: „*cum enim illi uoces intellegerent graecas propositionum et ego rem ipsam, factum est ut iucundissima conuersatione et communicatione nos mutuo iuuaremus* (*Ar. int. fol.* 143^v). Wenige seiner Mitlebenden werden gleich ihm so tief eingedrungen sein in des Werkes Inhalt, zumal in den des zehnten Buches der Elemente, welches in ächt griechischer Weise, d. i. in geometrischem Gewande, die Lehre von den Irrationalgrössen behandelt und stets und überall als schwer und dunkel verrufen war. Stifel hat sich die Aufgabe gestellt, dieses zehnte Buch und was Theon (4. Jhdt. n. Chr.) und Campanus (um 1200 n. Chr.) Geometrisches darüber geschrieben, auf rein arithmetischem Wege darzustellen und — man muss es ihm nachrühmen — er hat dies in glänzender Weise durchgeführt. Am besten findet dieses Urtheil seine Bestätigung, wenn ein Vergleich angestellt wird zwischen seiner Leistung und der das Nämliche erstrebenden des Italieners Lucas Pacioli, welcher 50 Jahre vor Stifel zum ersten Male wieder der Theorie

---

behalten; doch kann hier nochmals derjenigen Art Erwähnung geschehen, welche Salignac anwandte, um die Irrationalen zu bezeichnen. Oben schon (S. 36) sahen wir, dass derselbe seine eigenthümlichen cossischen Zeichen den Zahlen, mit welchen sie zu verbinden sind, bald vor-, bald nachsetzt, so dass $7qc$ und $qc7$ bezüglich das bedeutet, was wir heute durch $7x^6$ und durch $\sqrt[6]{7}$ andeuten. Er benennt diese beiden Arten der Verbindung als *Numeratio prima* und *Numeratio secunda* und erläutert dann mit seiner Bezeichnung die elementaren Sätze des Wurzelrechnens.

der Irrationalgrössen sich angenommen hatte, nachdem sie beinahe 18 Jahrhunderte brach gelegen. Pacioli gibt so wenig als Euklid selbst Aufschluss über den Weg, auf welchem letzterer zu seinen 13 Arten der Irrationalen gekommen war; dagegen führt uns Stifel ein in den Gedankengang des griechischen Geometers und zeigt, wie derselbe durch geometrische Forderungen zu seinen merkwürdigen Eintheilungen gekommen. Pacioli folgt treulich den Spuren Euklid's und führt in arithmetischer Form dessen Ergebnisse vor, sich strenge an das haltend, was der Meister gelehrt; Stifel aber erhebt sich frei über Euklid und vervollständigt dessen Aufzählungen, wo sie Lücken zeigen. Pacioli's Darstellung bleibt dem Inhalte nach stehen auf der Stufe Euklid's; Stifel aber giesst, seine eigene vorgeschrittene Kenntniss und allgemeinere Auffassung verwerthend, jenen Inhalt in neue Form und vereinfacht die Behandlung.

Er unterscheidet sofort zwei Gattungen von irrationalen Ausdrücken: Hauptarten *(species principales)* und Nebenarten *(species minus principales)*. Zu den ersteren rechnet er fünf verschiedene Arten: 1) die einfachen Irrationalen oder die Medialen *(Numeri irrationales simplices, Mediales)*, deren es eine unendliche Menge verschiedener gibt, wie die quadratisch Medialen, die cubisch, die zensizensisch . . . . Medialen; diese bezeichnet er in der vorhin angegebenen Weise; 2) die zusammengesetzten Irrationalen *(N. i. compositi)*, welche entweder eine Summe von zwei Medialen derselben Art sind und dann Bimediale heissen (wie $\surd\mathfrak{zz}\,18 + \surd\mathfrak{zz}\,6$) oder eine Summe aus einer Rationalen und einer Medialen oder aus zwei Medialen verschiedener Art und dann Binomiale heissen (wie $6 + \surd\mathfrak{z}\,12$ oder $\surd\mathfrak{z}\,12 + \surd\mathfrak{c}\ell\,12$, das erstere z. B. lateinisch gelesen als *„Sex plus radice zensica de 12“*); die zusammengesetzten Radicale *(N. i. radicales compositi)*, d. i. Quadratwurzeln aus zusammengesetzten Irrationalen, welche Stifel in folgender Weise bezeichnet: $\surd\mathfrak{z} \cdot \surd\mathfrak{z}\,12 + \surd\mathfrak{z}\,8$ oder $\surd\mathfrak{z} \cdot 6 + \surd\mathfrak{z}\,12$; 4) die gleichsam zusammengesetzten Irrationalen *(N. i. tanquam compositi)*, welche den unter No. 2 aufgezählten entsprechen, jedoch durch das Subtraktionszeichen zusammengefügt sind, also ebenfalls in zwei Unterarten getheilt werden können: in bimediale Residuale und in binomiale Residuale; 5) die gleichsam zusammengesetzten Radicale *(N. i. r. tanquam compositi)*, wie z. B. $\surd\mathfrak{z} \cdot 6 - \surd\mathfrak{z}\,12$ u. s. w.

Zu den Nebenarten der Irrationalen rechnet er aus mehreren Gliedern zusammengesetzte Ausdrücke, wie $\surd\mathfrak{z}\,23 + \surd\mathfrak{z}\,12 + \surd\mathfrak{z}\,8$ oder $\surd\mathfrak{zz}\,200 + \surd\beta\,1000 + \surd\mathfrak{z}\mathfrak{c}\ell\,10 + \surd b\beta\,2$, welche man als Trimediale, ..., Quadrinomiale u. s. w. bezeichnen könnte. Eben dahin gehören auch Formen wie die, welche wir heute durch $\sqrt[4]{\sqrt{6} + 2} - \sqrt[6]{\sqrt[3]{8} + \sqrt[4]{12}}$ bezeichnen würden, und die ich nur anführe, um Stifel's Bezeichnung deutlich zu machen; er schreibt dies in folgender Weise: $\surd\mathfrak{zz} \cdot \surd\mathfrak{z}\,6 + 2 \cdot - \cdot \surd\mathfrak{z}\mathfrak{c}\ell \cdot \surd\mathfrak{c}\ell\,8 + \surd\mathfrak{zz}\,12$.

Die Kunst, mit all diesen verschiedenartigen Irrationalgrössen zu rechnen, gründet sich auf das Verständniss des „Algorithmus der Medialen", d. h. auf das Verständniss der Regeln, an den einfachen Wurzelgrössen die vier Rechnungsarten durchzuführen.

In Bezug auf deren Durchführung stimmt nun Stifel vollständig mit Rudolff überein, nur dass er, wie schon hervorgehoben, unterschiedslos zweite, dritte, vierte, . . . Wurzeln als Beispiele benutzt und dass er in seinen Erläuterungen viel klarer und verständnisserweckender ist: so, wenn z. B. $\sqrt{\mathfrak{z}}\,18$ zu $\sqrt{\mathfrak{z}}\,8$ addirt werden soll, beachtet Stifel, dass deren Verhältniss wie 3 zu 2 ist und sagt sich dann, dass, wie $(3+2)$ zu 1, so auch $(\sqrt{\mathfrak{z}}\,18 + \sqrt{\mathfrak{z}}\,8)$ zur Hälfte von $\sqrt{\mathfrak{z}}\,8$, d. h. zu $\sqrt{\mathfrak{z}}\,2$ sich verhalten müsse, d. h. die Summe müsse 5 mal $\sqrt{\mathfrak{z}}\,2$ oder $\sqrt{\mathfrak{z}}\,50$ sein.

Eine hübsche Anwendung der Medialen, deren Euklid nicht Erwähnung thue, macht Stifel zur Berechnung der geometrischen Mittel *(media proportionalia)*, welche zwischen zwei beliebig gegebenen Grössen eingeschaltet werden sollen (*Ar. int.* fol. 118^r ff.). Sind z. B. zwischen 6 und 18 deren 5 einzuschalten, so bilde man den Quotienten $\frac{18}{6} = 3$ und mit diesem als Quotienten eine mit 1 beginnende geometrische Reihe von 7 Gliedern: 1 3 9 27 81 243 729,
setze diesen das Zeichen $\sqrt{\mathfrak{zc}}$ vor, also

$$\sqrt{\mathfrak{zc}}\,1 \quad \sqrt{\mathfrak{zc}}\,3 \quad \sqrt{\mathfrak{zc}}\,9 \quad \sqrt{\mathfrak{zc}}\,27 \quad \sqrt{\mathfrak{zc}}\,81 \quad \sqrt{\mathfrak{zc}}\,243 \quad \sqrt{\mathfrak{zc}}\,729$$

oder

$$1 \quad \sqrt{\mathfrak{zc}}\,3 \quad \sqrt{\mathfrak{c}}\,3 \quad \sqrt{\mathfrak{z}}\,3 \quad \sqrt{\mathfrak{c}}\,9 \quad \sqrt{\mathfrak{zc}}\,243 \quad 3$$

und multiplicire die einzelnen Glieder mit 6; die entstehende Reihe

$$6 \quad \sqrt{\mathfrak{zc}}\,139968 \quad \sqrt{\mathfrak{c}}\,148 \quad \sqrt{\mathfrak{c}}\,108 \quad \sqrt{\mathfrak{c}}\,1944 \quad \sqrt{\mathfrak{zc}}\,11337408 \quad 18$$

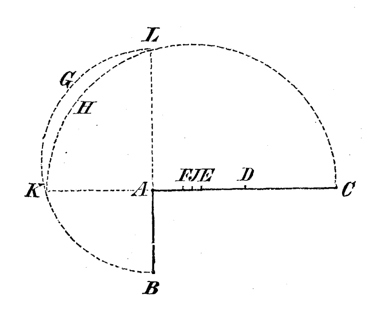
enthält dann die gegebenen und gesuchten Grössen.

So — schreibt Stifel vor — bilde man stets eine mit 1 beginnende geometrische Reihe, deren Gliederzahl die der einzuschaltenden Grössen um 2 übertreffe und deren Quotient gleich dem der gegebenen Grössen sei, dann setze man den Gliedern der Reihe, falls 1, 2, 3, . . . Grössen einzuschalten sind, bezüglich das Zeichen $\sqrt{\mathfrak{z}}$, $\sqrt{\mathfrak{c}}$, $\sqrt{\mathfrak{zz}}$, $\sqrt{\mathfrak{zc}}$, . . . vor, führe wo möglich die angedeuteten Wurzelausdrücke auf einfachere zurück und multiplicire dann sämmtliche Glieder der Reihe durch die erste der gegebenen Grössen.

Die praktische Verwendbarkeit seiner Vorschrift zeigt Stifel an der berühmten Aufgabe von der Würfelverdoppelung *„quam (quaestionem) uideo a quibusdam anxie et laboriose esse tractatam, magnis de ea re uoluminibus conscriptis"*. Es sei die Seite des Würfels = 6, so bilde man deren Doppeltes = 12 und schiebe zwei geometrische Mittel (*„duas alias lineas quae proportionaliter medient inter eas"*) zwischen 6 und 12 ein 6 $\sqrt{\mathfrak{c}}\,432$ $\sqrt{\mathfrak{c}}\,864$ 12,
bilde deren Cuben: 216 432 864 1728,

so sei der zweite offenbar das Doppelte von 216, folglich sei $\sqrt{\mathfrak{c}\!\!\!\!\mathfrak{c}}\,432$ die Seitenlänge des gesuchten Würfels.

Auffallender Weise gibt nun Stifel selbst eine durch Lineal und Zirkel auszuführende geometrische Contruktion der Seitenlänge. Er trägt auf zwei Senkrechten von deren Schnittpunkt aus $AB = 6$ und $AC = 12$ auf, macht folgeweise $AD = \frac{1}{2}AC$, $AE = \frac{1}{2}AD$, $AF = \frac{1}{2}AE$, $FJ = \frac{1}{2}FE$ und beschreibt aus J mit JC als Radius den Halbkreis CLK, so behauptet er, es sei dann AK das erste, AL das zweite Mittel zwischen 6 und 12. Indem er zufügt „*et ea causa (videlicet causa probationis) descripsi semicirculum supra lineam* LB, *videlicet* $LGKB$“, zeigt er, dass ihm seine Construktion nicht als Näherungsconstruktion erschien. In der That aber ist sie nichts Anderes: wird nämlich $AB = a$,



also $AC = 2a$ gesetzt, so wird $JC = JK = \frac{13a}{8}$, folglich

$$AK = \frac{5a}{4} \qquad = \frac{a}{4} \cdot \sqrt[3]{125} \quad = 1{,}25 \cdot a,$$

und es wird $\quad AL = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{10} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt[6]{1000} = 1{,}5811 \ldots \cdot a.$

Dagegen sollte als erstes geometrisches Mittel $\quad AK = a \cdot \sqrt[3]{2} = \frac{a}{4} \cdot \sqrt[3]{128} = 1{,}2599 \ldots \cdot a$

und es sollte als zweites geometrisches Mittel $\quad AL = a \cdot \sqrt[3]{4} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt[6]{1024} = 1{,}5874 \ldots \cdot a$

sein, so dass der Fehler für AK etwa 1, für AL etwa $\frac{6}{10}$ Procent beträgt.

19. Die Rechnung mit zusammengesetzten Irrationalen gründet sich naturgemäss auf den Algorithmus der Medialen und auf den der Vorzeichen — wie wir heute sagen — oder auf den *Algorithmus signorum additorum et subtractorum*, wie sich Stifel ausdrückt. Wir sahen, dass auch Rudolff diesen Abschnitt zwar kurz aber ziemlich vollständig behandelt hatte; Stifel erläutert die Verfahrungsweisen durch manchfaltige Beispiele, spricht übrigens in Betreff der Proben auf die Richtigkeit die Ansicht aus (*Ar. int.* fol. 133ʳ), man solle bezüglich gleichlautende Beispiele mit rationalen Zahlen wählen, diese letzteren dann als Wurzelgrössen darstellen und nach nochmaliger Durchrechnung von der Richtigkeit des Ergebnisses sich überzeugen.

Besondere Hervorhebung verdient Stifel's Art, aus Bimedialen oder Binomialen die Quadratwurzel auszuziehen. Während des ganzen Mittelalters hatte man dies für besonders wichtig gehalten, und begreiflich: die

ganze Eintheilung, welche Euklid *) den Irrationalgrössen angedeihen liess, beruhte ja darauf, ob sich dieselben überhaupt und also insbesondere, ob sich die Binomien und Recisen (Residuen) als solche Zahlen darstellen lassen, dass sie die Fläche eines Quadrates darstellen oder nicht, d. h. ob sich aus ihnen die Quadratwurzel ausziehen lässt oder nicht.

Nun hatte Rudolff betreffs der Form solcher, bei denen ersteres der Fall ist, seine Ansicht dahin ausgesprochen, dass „Ein yedes solches Binomium | wird geschribē mit einer gemeynen | oder rational | zal | vn̄ mit einer surdischen zal | ist die rational zal alweg grösser den̄ die surdische. Auch wen̄ man eins quadrat | vō desz andere subtrahirt | so bleibt vbrig ein rational quadrat. Als $7 + \sqrt{48}$ erwechst von $2 + \sqrt{3}$. Itē $5 + \sqrt{24}$ erwechst von $\sqrt{3} + \sqrt{2}$“. Betreffs der Art aber, wie „nu zu extrahiren Radicem“ hatte er kurz die aus alten Zeiten überkommene Vorschrift gegeben: „Subtrahir der teyl quadrata von einander. Radicem quadratā desz vbrigē addir zū vordern teyl deynes Binomij. Radix quadrata desz halben collects | ist der erste teyl deyner gesuchten wurtzeln. Darnach subtrahir das quadrat desz yetzt gefundnen teyls | vom ersten (vorderm | oder grössern) teyl deines Binomij | Radix quadrata desz Rests | ist der ander teyl deyner gesuchten wurtzel“, d. h. zur Auffindung des Werthes von $\sqrt{A + B}$ gab er die Vorschrift:

$$\sqrt{A + B} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B^2}}{2}} + \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B^2}}{2}},$$

redet aber nach dem Gebrauche seiner Zeit nicht von einer Entwickelung seiner Vorschrift, sondern fügt nur einfach bei als „Proba. Multiplicir die wurtzel quadrate. so kompt das ober binomium.“

Stifel lässt nun in seiner Ausgabe von Rudolff's Coss (fol. 121r) dessen Vorschrift durchaus gelten, macht aber sofort die Zufügung, dass sie „vil besser den̄ er selbs hat gewusst. Den̄ wie er sich mercken lasset | hat er nicht anderst gewusst den̄ das dise seyne Regel allein diene für die Binomia | da der grösser teyl ist ein rational zal | Vnd ausz subtrahiren | der teylen | quadrat kom̄e ein quadrat zal. Solliche Binomia werden genen̄et Prima | das ist | die ersten Binomia | hat auch nicht anderst gewusst (wie seine Wort lauten) den̄ das man nur von den selbigen könne extrahiren radicem quadratam | so man doch ausz allen Binomijs kan radicem quadratam extrahiren . . . ye doch dienet desz Christoffs obengesetzte Regel genugsam für alle Binomia.“

Also Stifel dehnt Rudolff's Regel aus, und gibt hiefür eine Reihe von Beispielen, versäumt aber auch nicht (fol. 130v sq.) anzugeben „den grund der Regel Christophori vom extrahiren der quadratwurtzeln ausz binomi-

*) In seinem berühmten zehnten Buche.

schen vnd resuidischen zalen." In unsere heutige Zeichensprache übersetzt sagt sich nämlich Stifel, dass, wenn $\sqrt{A+B}$ gefunden werden soll und etwa gleich $x+y$ gesetzt wird und mindestens B und x oder y Quadratwurzelgrössen sind, dass dann: $A+B=x^2+y^2+2xy$, und dass dabei „allweg die zwei quadrata komen zusamen in den grössern teyl", d. h. dass

$$A=x^2+y^2 \quad \text{und} \quad B=2xy.$$

Dann aber müsse $A^2-B^2=(x^2+y^2)^2-(2xy)^2=(x^2-y^2)^2$

oder es müsse $\sqrt{A^2-B^2}=x^2-y^2$

sein, was mit $A=x^2+y^2$

verbunden zu der „Cossischen vergleychung" $A+\sqrt{A^2-B^2}=2x^2$ führe, ebenso auch zu der anderen . . . . . . $A-\sqrt{A^2-B^2}=2y^2$; „was mir nu hie zu thun sey | lehret mich die Cosz .... wer die Cosz kan | wird finden vn klarlich sehen | wie es gerad vñ eben sind die stuck welche vns lehret die Regel Christophori | Also das es keinen zweyfel haben mag | deñ das disz sey der grund der selbigen regel." Für das Beispiel $\sqrt{\mathfrak{z}}\cdot 147+\sqrt{\mathfrak{z}}\ 1728$ etwa „magstu die selbige regel nu leychtlich in gedechtnisz behaltē bey disen zweyen cossischen vergleychungen

$$2\mathfrak{z}-141 \text{ gleych } 147.$$
$$2\mathfrak{z}+141 \text{ gleych } 147\text{"}.$$

Stifel hatte aber auch schon früher, vor seiner Bearbeitung von Rudolff's Coss, jene Anleitung zur Quadratwurzel-Ausziehung mitgetheilt und dabei eine Begründung derselben vorgetragen. In seiner *Arithmetica integra* nämlich (fol. 129[v]) sagt er sich, wenn wiederum die Binomiale $A\pm B$ das Quadrat eines Ausdruckes $(x\pm y)$ sei, dass sie dann die Form $(x^2+y^2)\pm 2xy$ haben müsse, dass deshalb $A+B$ beziehungsweise die Form (x^2+y^2) und $2xy$ haben, dass also, um x und y aufzufinden, A in zwei Theile zerlegt werden müsse (nämlich x^2 und y^2), zwischen welchen $\frac{B}{2}=xy$ die mittlere Proportionale sei: *„respexi ad particulas talis compositionis, sciens eas esse oportere etiam resolutionis particulas easque posse sic proportionaliter poni, ut dimidium partis minoris de binomio (aut residuo) semper sit medium proportionale inter partes duas particulae maioris, de binomio, aut residuo. Vidi igitur nihil esse opus, nisi regula tali, qua quilibet numerus rationalis aut medialis posset diuidi in duas partes, inter quas constitui possit numerus aliquis propositus.... Quia autem admodum facile est, huiusmodi regulas formare, per Algebram (quae fertilissima est regularum formandarum) contuli me ad illam, atque illius usu composui regulam, quam hoc capite posui."* Mit Hülfe der Algebra löste also Stifel jene Bestimmung, indem er eben aus der Proportion: $x^2:\frac{B}{2}=\frac{B}{2}:(A-x^2)$ die Gleichung ableitete: $(x^2)^2-A\cdot x^2=-\left(\frac{B}{2}\right)^2$; so fand er für jene zwei Theile von A die Werthe

$$= \frac{A}{2} + \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - \left(\frac{B}{2}\right)^2} \text{ und } = \frac{A}{2} - \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - \left(\frac{B}{2}\right)^2}, \text{ so dass}$$

$$\sqrt{A+B} = \sqrt{\frac{A}{2} + \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - \left(\frac{B}{2}\right)^2}} + \sqrt{\frac{A}{2} - \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - \left(\frac{B}{2}\right)^2}}.$$

Wenn nun die in dieser Formel enthaltene Vorschrift zur Auffindung der Quadratwurzel aus einem irrationalen Binome auch schon lange vor Stifel vorhanden war, so war sie doch stets wie eine Regel des Zunfthandwerkes überliefert worden; Stifel zum ersten Male, wie es scheint, auf deutschem Boden, hat auch den Beweis dazu gegeben, und denselben sogar in doppelter Betrachtung durchgeführt.

Die Selbständigkeit seines Denkens hierin tritt um so mehr hervor, als er sofort (*Ar. int.* fol. 130) sein Verfahren auch auszudehnen sucht auf die Ausziehung der Cubikwurzel aus einem irrationalen Binom; er präcisirt auch die die Lösung bewirkende algebraische Aufgabe. Diese selbst aber zu lösen, überstieg seine Kräfte; denn hierzu war nichts weniger erforderlich als die Lösung cubischer Gleichungen. Als ihm diese durch die Lektüre von Cardanus' Werk bekannt geworden war, da verfolgt er auch jene Aufgabe bis zum Ziel; die Besprechung seiner Methode versparen wir aber auf den späteren Abschnitt, wo von der Lösung der Gleichungen im Speciellen die Rede sein wird.

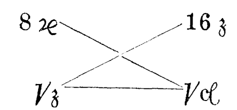
20. Mit dem Vorstehenden glaube ich in genügender Ausführlichkeit Theorie und Praxis unserer alten Cossisten in Bezug auf das Rechnen mit surdischen oder irrationalen Zahlgrössen dargelegt zu haben; es erübrigt noch, nun auch deren Verfahren bei Verwerthung von cossischen Irrationalen zu besprechen.

Da ist nun sofort zu erwähnen, dass die Vorgänger von Stifel den letztgenannten Grössen nicht eine derartige Aufmerksamkeit schenkten, dass sie ihnen jeweils einen besonderen Abschnitt gewidmet hätten, wenn sie auch gelegentlich der Behandlung von Aufgaben von ihnen Anwendung machen, wie z. B. Rudolff. Erst Stifel mit seinem scharf sondernden Geiste und seiner nach völliger Klarheit strebenden Darstellung überschreibt das 5. Kapitel im 3. Buche seines grossen Werkes *„De numeris cossicis irrationalibus et eorum Algorithmo"*. Dass diese cossischen Irrationalen manchfache Anwendung finden können, zumal bei der Lösung von geometrischen Aufgaben, zeigt er später im 11. Kapitel, wo er deren zehn ausführlich behandelt; im fünften aber erläutert er, dass Manche die absoluten Irrationalzahlen überhaupt als cossische bezeichnen, während er selbst diesen Namen nur denjenigen beilegen wolle, welche noch mit irgend welcher cossischen Benennung versehen sind; cossische Irrationalen seien ihm also diejenigen, welche das Ansehen von Irrationalen darbieten verbunden

mit irgend einer cossischen Benennung, und dies auch dann, wenn nach Einsetzung des Werthes für 1 ꝛ rationale Zahlen gefunden werden. So z. B. $\sqrt{ʒ}\;20\;ꝛ$ oder $\sqrt{ʒ}\;20\;ʒ + \sqrt{ʒ}\;20\;ꝛ$ oder $\sqrt{ʒ}\;\frac{20\;ꝛ}{7}$, welche Werthe Stifel bezüglich liest als *„Radix quadrata de uiginti radicibus“* oder *„Radix quadrata de uiginti ʒ plus radice quadrata de uiginti radicibus“* oder *„Radix quadrata de uiginti radicibus diuisis per radicem quadratam de septenario“*.

Da nun jede solche cossische Irrationale ein doppeltes Zeichen besitze, nämlich das eine, das sog. Wurzelzeichen, links, und das andere, das sog. cossische, rechts, so folge daraus, dass der Algorithmus der cossischen Irrationalen aus einem dreifachen Algorithmus sich zusammensetze: aus dem gewöhnlichen der Zahlen, aus dem der Irrationalen und aus dem der cossischen Zahlen. Dem entsprechend müsse man auch sehr auf die Zeichen achten; und hier ist es, wo Stifel die oben schon citirten Worte ausspricht: *„Neque enim ego talia legendo didici, sed sola obseruatione rerum intellexi et signorum beneficio (quae in hunc usum mihi adauxi) memoriae commendaui, ita ut in omnibus calculationibus meis, signa mihi ubique sint regulae.“*

Stifel zeigt dann an einzelnen Beispielen, wie mit cossischen Irrationalen die vier Grundrechnungsarten durchzuführen seien. So ergibt die Addition von $\sqrt{ʒ}\;36\;ꝛ$ zu $\sqrt{ʒ}\;12\;ʒ$ den Werth $= \sqrt{ʒ}\;12\;ʒ + \sqrt{ʒ}\;36\;ꝛ$, die Subtraktion von $\sqrt{ʒ}\;8\;ꝛ$ von $\sqrt{ʒ}\;18\;ꝛ$ den Werth $= \sqrt{ʒ}\;2\;ꝛ$; um $\sqrt{ʒ}\;8\;ꝛ$ mit $\sqrt{ℭ}\;16\;ʒ$ zu multipliciren, führt er beide Grössen in dasselbe Wurzelzeichen über und schreibt hierzu die Anordnung:



und bildet nach dem durch die Striche angedeuteten Schema*) aus den gegebenen Grössen die folgenden $\sqrt{ʒℭ}\;512\;ℭ$ und $\sqrt{ʒ\,ℭ}\;256\;ʒʒ$, deren Produkt sich findet $= \sqrt{ʒ\,ℭ}\;131072\;bß$. Zur Probe auf die Richtigkeit des Verfahrens wählt hier z. B. Stifel 2 als Werth von ꝛ, dann ist $8\;ꝛ = 16$, $\sqrt{ʒ}\;8\;ꝛ = 4$; ebenso ist $16\;ʒ = 64$, $\sqrt{ℭ}\;16\;ʒ = 4$, folglich das Produkt beider $= 4 \cdot 4 = 16$; anderseits ist $1\,bß = 128$, $131072\;bß = 16777216$ und $\sqrt{ʒ\,ℭ}$ dieser Zahl ist ebenfalls $= 16$.

Zum Zwecke der Division wird in entsprechender Weise verfahren und dabei darauf hingewiesen, dass *„signa radicalia in multiplicatione et diuisione sunt indeclinabilia, sed signa cossica declinantur“*.

---

*) Vgl. mein Rechnen im 16. Jahrh., S. 80.

IV. Von den Regeln der Coss.

(Auflösung der Gleichungen.)

21. Die ausführlichere Besprechung der Lehren, welche das Thema der drei vorangehenden Abschnitte ausmachen und welche unter den den letzteren gegebenen Ueberschriften in der That gut zusammengefasst werden können, war aus verschiedenen Gründen nothwendig: einmal weil nur so die geschichtliche Bedeutung der alten Coss und ihr Verhältniss zu der durch Vieta nachmals geschaffenen Buchstabenrechnung und die Wichtigkeit dieser letzteren selbst deutlich erkannt werden kann; dann aber auch weil die bei den Cossisten gebräuchliche Art der Behandlung und Lösung von Gleichungen jene Vorbesprechung durchaus erforderte. Denn wie ich früher schon hervorhob, immer war, bis auf Stifel wenigstens, das Lösen der Gleichungen und die Uebermittelung der hierzu dienenden Vorschriften für unsere Cossisten die Hauptsache, „aus welcher dan entspringet ein grosser verstandt viler subtiler rechnung" (Grammateus); dass bis zur Mitte des 16. Jahrhunderts hierbei nur an Gleichungen des ersten und zweiten Grades gedacht werden kann, ist ja bekannt.

Und so einfach uns heutzutage gerade die Auflösung von Gleichungen des ersten und zweiten Grades erscheint, so wird uns eben deren geschichtliche Entwickelung in Deutschland recht sehr zeigen, wie manchfaltig die Vorstufen sind, welche überstiegen werden mussten, um zu der Höhe zu gelangen, welche den richtigen Ueberblick über das ganze Gebiet gewährte und dadurch erst eine systematische Behandlung ermöglichte. Und eben unsere Darstellung des geschichtlichen Verlaufes wird auch einer verbreiteten falschen Meinung entgegentreten, sie wird zeigen, dass die deutschen Cossisten die Algebra nicht in völlig fertiger Behandlung von ihren Vorgängern übernahmen, sondern dass sie in selbstthätiger Weise sich des bei ihnen Anfangs Gebräuchlichen annahmen, um es allmählig aus ungeordnetem Zustande in den eines Wissenschaftszweiges überzuführen.

22. Die erste Erwähnung der Algebra findet sich auf deutschem Boden, soweit bis jetzt bekannt ist, in einer der Münchener Bibliothek gehörigen Handschrift (Nr. 14908), welche aus der Benediktiner-Abtei St. Emmeran stammt und welche im Grossen und Ganzen das gesammte mathematische Wissen um die Mitte des 15. Jahrhunderts in Deutschland enthält*). In dieser Handschrift findet sich das aus dem Jahre 1461 stammende Bruchstück eines Auszuges aus der Algebra des Mohammed ben Musa in deutscher Uebersetzung. Dasselbe beginnt wie folgt:

*) Nach Gerhardt: Monatsber. d. K. Preuss. Akademie zu Berlin. Aus dem Jahre 1870. Seite 141 f.

„Machmet in dem puech algebra vñ almalcobula hat gepruchet dise wort census, radix, numerus. Census ist ayn yede zal die in sich selb multiplicirt wirt, das ist numerus quadratus. Radix ist die wurtz der zal oder des zins. Numerus ist ain zal für sich selb gemercket, nit alz sie ain zins oder ain wurtz ist. Aus den dingen merckt er 6 ding: das erst wann der census sich gelichet den wurtzen, daz ander so der census sich gelichet der zal, daz drit so sich dye zal gelichet den wurzen, das 4 so sich der census vnd die wurtzen gelichent der zal . . . daz fünft ist so sich der zensus vnd die zal gelichent den wurtzen, das sechst so sich die wurtzen vnd die zal gelichent dem census.“ — Es werden hier also, wenn wir von unserer heutigen Bezeichnung Gebrauch machen, die folgenden Gleichungsformen zusammengestellt:

$$ax^2 = bx\,,\quad ax^2 = b\,,\quad ax = b\,,\quad ax^2 + bx = c\,,\quad ax^2 + c = bx\,,\quad ax^2 = bx + c\,,$$

d. h. die Gleichungen des ersten und zweiten Grades, denen wir im Folgenden der Hauptsache nach stets wieder begegnen werden.

Von einem angefügten Beispiele (nämlich $x + \sqrt{x^2 - x} = 2$) abgesehen gibt die erwähnte Handschrift weiter Nichts, lässt uns aber jedenfalls die interessante und wichtige Thatsache entnehmen, dass die ersten Anfänge deutscher Algebra sich recht wohl an die Leistungen der Araber anlehnen konnten.

23. In letzterer Beziehung nicht so unmittelbar lehrreich, für die folgende Entwickelung aber von grosser Wichtigkeit ist ein anderes Manuscript, welches ebenfalls*) Gerhardt in Wien auffand (Nr. 5277) und welches, Gerhardt zufolge, für die Mitte des 15. Jahrhunderts anzusetzen, aus dem Nachlasse von Stöberl (Stiborius) stammt, der im J. 1497 aus Ingolstadt nach Wien berufen wurde und daselbst als Professor der Mathematik i. J. 1515 starb. Jenes Manuscript hat die Aufschrift: *Regule Cose vel Algobre* und „enthält im Anfang eine übersichtliche Zusammenstellung der Regeln über die algebraische Addition, Subtraktion und Multiplikation. Von der letzteren geht es weiter zu den Potenzen und deren Bezeichnung, so dass die Regeln der Division ganz fehlen. Darauf folgen die Regeln über das Rechnen mit algebraischen Summen, wobei für jede Operation mehrere Beispiele beigebracht sind, deren Resultate durch eine '*Probatio*' als richtig dargethan werden. Nächstdem kommt Bruchrechnung und Regula de tri. Hieran schliessen sich: *Regule equationum Introductorie in omnia que deinceps sequuntur dogmata*“ (d. i. Beispiele). Die erste derselben ist z. B. folgendermassen ausgesprochen: „. . . *prima est quando-*

*) Nach Gerhardt: Monatsber. d. K. Preuss. Akademie zu Berlin. Aus dem Jahre 1870. S. 143 ff.

cunque duc denominationes coequantur, quarum una naturali serie aliam sequitur, tunc prima per secundam diuidatur, et quotiens ostendit quesitum.

Exempla

3 ꝛ 4 ʒ 5 *ce* 6 ʒʒ 7 *alt* 8 ʒ + *ce*	*sunt aequales*	6 Φ 8 ꝛ 10 ʒ 12 *ce* 14 ʒʒ 16 *alt*	*facit* 1 ꝛ 2 Φ	“

In ähnlicher Weise werden im Ganzen acht Regeln behandelt, welche sich auf die folgenden Formen von Gleichungen beziehen:

$$\begin{array}{ll} ax = b & ax^2 + bx = c \\ ax^2 = b & ax^2 + c = bx \\ ax^3 = b & bx + c = ax^2 \\ ax^4 = b & ax^4 + bx^2 = c \end{array}$$

„Nachdem für eine jede dieser acht Hauptregeln eine Anzahl Beispiele, die Mehrzahl lateinisch, andere in deutscher Sprache, mit ihren Lösungen beigebracht sind, folgen noch eine neunte und zehnte Regel, nämlich: *Nona regula: Quum* ʒ *assimilatur* ꝛ *de* ꝛ, *punctus de* ꝛ *deleatur,* ʒ *in se ducatur, et remanent adhuc inter se aequalia. — Decima regula: Quum assimilatur* ꝛ *de* ʒ, *tunc punctus de* ʒ *deleatur,* ʒ *ex altera parte in se ducatur, et remanent adhuc inter se aequalia.*“

Es drängen sich hier verschiedene Bemerkungen auf. Was zunächst die Form der Regeln und auch des Schemas von Beispielen betrifft, so macht es sich deutlich genug bemerklich, wie man noch in der „rhetorischen Algebra“ befangen war. Das Gleichheitszeichen z. B. kommt ja erst um die Mitte des 17. Jahrhunderts zu allgemeinerem Gebrauche, und so wird hier, aber auch bei allen den Cossisten, welche wir noch zu betrachten haben, das Gleichsein von Grössen oder der dieselben vertretenden Zeichen stets ausführlich in Worten geschrieben: „wañ der zensus sich gelichet den wurtzen“ — „es werden zwey Zeichen oder zwu benenung einander vorgleicht“ — „3 ʒʒ sei gleich 24 ꝛ“ — „zwen namen vergleichen sich zusamen“ — „5 *ce sunt aequales* 10 ʒ“ — „12 ꝛ *aequantur* 6 fl.“ — „1 ʒ *aequatus* 72 — 6 ꝛ“ u. s. w.

*) In einem interessanten Werkchen vom J. 1614, welches das ganze Gebiet der reinen und angewandten Mathematik auf 110 fein gezeichneten Kupfertafeln vorführt, finde ich gelegentlich der Behandlung der „cossischen Gleichungen“ ein besonderes Zeichen der Gleichheit, nämlich ʒ (aus „*aequalis*“ wohl entstanden?). Der Titel jenes Werkes ist: *Ioannis Valentini Andreae Collectaneorum mathematicorum decades XI. Centum et decem tabulis Aeneis exhibitae. Tubingae. Typis Iohan. Alexandri Cellii.* 1614.

Weiter erkennt man, dass in den auf die quadratischen Gleichungen bezüglichen Regeln strenge der Standpunkt der Araber und der Italiener, kurz der des ganzen Mittelalters eingehalten bleibt, dass nämlich durchaus nur positive Glieder geschrieben und demnach die drei Hauptformen:

$$x^2 + ax = b\,, \qquad x^2 + b = ax\,, \qquad x^2 = ax + b$$

genau unterschieden werden.

Dass ausserdem auch eine Form einer biquadratischen Gleichung gegeben wird, welche auf eine vom zweiten Grade rückführbar ist, entspricht der aus den obigen Beispielen ersichtlichen Thatsache, dass man auch Gleichungen noch höherer Grade löste, welche auf solche des ersten Grades oder auf reine Wurzelausziehungen zurückgeführt werden konnten. In Bezug hierauf ist besonders hervorzuheben, dass vom Verfasser unseres Manuscriptes die Exempla der ersten und zweiten Regel*) als Specialisirungen aufgefasst sind, welche sich den allgemeinen Formen $ax = b$ und $ax^2 = b$ unterordnen.

Diese deutliche Unterordnung erscheint verlassen in dem Tableau von 24 Gleichungsformen, welches in unserem Wiener Manuscripte auf dem vorletzten Blatte desselben unter der Aufschrift *„Regule Cosse"* zusammengestellt ist. In die jetzige Zeichensprache übersetzt mögen dieselben hier eine Stelle finden.

1.	$b = ax$	9.	$c = bx + ax^2$	18.	$c = bx^2 + ax^4$
2.	$bx = ax^2$	10.	$cx = bx^2 + ax^3$	19.	$ax^4 = bx^2 + c$
3.	$bx^2 = ax^3$	11.	$cx^2 = bx^3 + ax^4$	20.	$bx^2 = ax^4 + c$
4.	$bx^3 = ax^4$	12.	$ax^2 = bx + c$	21.	$b = ax^3$
5.	$b = ax^2$	13.	$ax^3 = bx^2 + cx$	22.	$bx = ax^4$
6.	$bx = ax^3$	14.	$ax^4 = bx^3 + cx^2$	23**).	$ax^2 = \sqrt{bx}$
7.	$bx^2 = ax^4$	15.	$bx = ax^2 + c$	24**).	$ax^2 = \sqrt{bx^2}$
8.	$b = ax^4$	16.	$bx^2 = ax^3 + cx$		
		17.	$bx^3 = ax^4 + cx^2$		

Wie gesagt, es erscheinen hier 24 Formen statt der im Verlaufe des Textes vorkommenden 8, so dass es in der That erwünscht wäre ausdrücklich bestätigt zu erhalten, dass die tabellarische Zusammenstellung und der Text wirklich aus der gleichen Zeit stammen. Denn mehr als ein halbes Jahrhundert später werden noch, wie wir im weiteren Verlaufe sehen werden, den 24 Regeln deutlich die „acht Equacionen" gegenüber-

*) Ob auch der folgenden Regeln, lässt sich aus Gerhardt's Bericht (l. c. S. 144) nicht erkennen.

**) Mit vollem Recht kann man, wie sich weiterhin herausstellen wird, sagen, dass die im Tableau enthaltenen Formen 23) $ax^2 = bx$ und 24) $ax^2 = bx^2$ durch ein Versehen des Wurzelzeichens entbehren und in die oben gegebenen umzuändern sind.

gestellt, ja die Mitte des 16. Jahrhunderts hält die letzteren fälschlicherweise sogar für eine Erfindung der ihr kurz vorangegangenen Zeit.

24. Das im Vorstehenden zur Besprechung gekommene Wiener Manuscript enthält, soweit mir bekannt, die einzige zusammenhängende Darstellung der algebraischen Lehren aus dem 15. Jahrhundert. Denn was wir sonst noch aus jener Zeit besitzen, sind nur einzelne zerstreute Aeusserungen, wie uns solche von dem berühmten Regiomontan († 1476) aufbewahrt sind. Gelegentlich der Lösung einer geometrischen Aufgabe nämlich lässt er sich auf eine weitläufigere Auseinandersetzung nicht ein: „*longum esset enarrare; et fortasse obscurum uideretur, paucis enim admodum artem Algebrae, siue rei et census, satis cognitam scio, qua quidem arte hoc in negotio usus sum*“*); also selbst Mathematikern fürchtet er undeutlich zu werden, wenn er die Algebra anwendet. Mit Recht schliessen wir hieraus erstens auf die Thatsache, dass die letztere zu Regiomontan's Zeiten sehr wenig bekannt war, und zweitens auf die Ursache dieser nichts weniger als auffallenden Thatsache: die Regeln der Coss hatten eben bis dahin nur zu vereinzelt Bearbeiter gefunden, deren Werke auf passende Weise in die Geheimnisse der Kunst einzuführen vermochten: „*Quod restat, praecepta artis edocebunt*“, lässt sich Regiomontan an einer anderen Stelle vernehmen**), wo er wiederum eine geometrische Aufgabe bis zu der die Lösung gewährenden Gleichung verfolgt hat — und auch dieses Wort erlaubt uns auf die Art, wie die Coss gelehrt und betrieben wurde, einen Rückschluss zu machen: entsprechend dem ganzen Geiste, welcher in dem elementaren Rechnen jener Zeit sich ausspricht, übermittelte man auch auf dem Gebiete der Algebra nicht eine Rechenkunde, verbunden mit Einsicht in die Entstehung und Durchführung der Operationen, sondern eine Rechenkunst; eine Summe von „Vorschriften“ wurde in lange fast gleichbleibenden Ausdrücken gelehrt, geübt und wie die Regeln des Zunfthandwerkes zunftmässig überliefert.

25. In vollständiger Uebereinstimmung hiermit steht, was wir in Widman's Rechenbuch vom Jahre 1489 wahrnehmen. Zwar beklagt er, dass die „aldē meister der kunst der Rechnūg Irenn nach komendē schwere Regeln̄ tzuuornemen vn̄ muesam tzuuerfuren gelassen haben“, und er will deshalb „fur den gemeinen nutz . leichtuerstendiger Regeln̄ . lusparlicher rechnūg tzu machē vn kurtz geben vn̄ offenwarē. Weliche auch leute geringer vernunfft leichtliche (alsz wol not ist) mochten lernē vn begreiffen“, und er sagt, er habe sich deshalb „gemuet vn̄ mit sūdern̄ vleysz tzusam geklaubet vn̄ gelesen leichte vn nicht so geringe alsz nutzpar Regeln̄ der Rechnung“; aber gleichwohl muss ich mit Drobisch's Urtheil übereinstimmen, dass die von Widmann gegebenen Regeln meistens an grosser Dunkelheit

*) Nach Nesselmann, Die Algebra der Griechen, S. 56.

**) Vgl. ebenda S. 56.

leiden, so dass sie auch jetzt noch, wenn nicht Beispiele beigefügt wären, zuweilen kaum verstanden werden könnten. Zur Erläuterung gebe ich in der Anmerkung*) einige Beispiele solcher Regeln; unter diesen für Zins-, Gewinn- und Verlust-, Theilungs-, Gesellschafts- und ähnliche Rechnungsaufgaben gültigen und mit den verschiedensten Namen bezeichneten Regeln**) kommen auch, jedoch ohne dass dabei irgend welche Trennung gemacht würde, solche Regeln vor, welche die Lösung von rein und von gemischt quadratischen Gleichungen enthalten. So löst Widman die Aufgabe: „Such mir eyn zal wan ich do von nym $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{9}$ vnd das vbrig in sich selbst multiplicir. das wider kum die selbige zal“ — nach der Regula Reciprocationis, welche folgendermassen lautet: „Such eyn zal. Dar ynnen du haben magst die nenner Darnach dye selbigen teyl der zal. addir zu-

---

*) So ist schon die gewöhnlich einfach ausgedrückte Regel de tri hier ziemlich dunkel. Sie lautet (fol. 72[r]): „Regula Detri nicht anders ist dañ drey dingk die du seczt vnter welichen das erste vnd das leczte almol muss gleich sein Weliches leczte du solt multipliciren mit dem mittelsten das dann gleich ist dem vierden vnd vnbekanntñ. dz erwechst aus solcher multiplicatio. vnd der teylūg dasz product mit dem ersten. vnd also soltu albeg das selbige vnbekant dz du dan wissen wilt vnd darnach die frage ist. hindē seczen. vnd mit dem ersten multipliciren. Und darnach das erwachsen product durch das erst teylen. vnd was dā ausz solcher teylung kumpt das ist die vierde vnd vnbekante zal gewesen vnd bericht die frage.“

Für die Aufgaben, wo aus zwei verschieden theuren Arten von Wein z. B. eine Mittelsorte gemischt werden soll und nach der Anzahl je der zu nehmenden Masseinheiten gefragt ist, gibt er folgende Regula Legis: „Subtrahir dasz kleynst von dem mittelstñ vnd das mittelst von dem grostñ. vnd die vberigñ addir zusam̄en vnnd behaldsz fur deynen teyler. mit welichñ dan die selbign vb'gepliben zal itliche mit verkerūg in sūderheyt szolt teylñ vnd ist sach das der selbigñ furgelegtñ zalñ vil wurdē seyn. als wen der kleinstñ zwu ader drey weren. so mustu dz mittel duplirn ader triplirn Und von dem selbigñ product die zwu ader drey kleyner zal zusam geaddirt subtrahirn Und also soltu ym auch thu so der grossern vil wern als drey ader vier.“

Für Aufgaben wie die folgende: Jemand hat Geld und kauft eine Waare; kostet 1 ℔ = 12 ₰, so behält er 37 ₰ übrig; kostet aber 1 ℔ = 15 ₰, so hat er 44 ₰ zu wenig, wie gross ist die Geld- und Waarenmenge? — für solche Aufgaben gibt Widman seine Regula augmenti + decrementi: „Subtrahir die kleyner zal von d' grosserñ Und das vberige teyl mit der minnerung vnd merung zusam geaddiret vñ der selbigen teylung quocient saget dye zal der person weliche zal szo sy gemultiplicirt wirt mit der kleynern anzal vñ die grosser mynnerung von dem product subtrahirt wirt Ader widerumb. das darnoch vberpleybet bericht die ander frag.“

**) So kommen bei Widman z. B. vor: Regula Residui, Reciprocationis, Excessus, Divisionis, Quadrata, Inventionis, Fusti, Transversa, Ligar, Equalitatis, Legis, Augmenti, Augmenti + Decrementi, Sententiarum, Suppositionis, Collectionis, Cubica, Lucri, Pagamenti, Alligationis, Falsi. — Stifel hat später seine Ansicht über diese Regeln ausgesprochen (*Arithm. int.* fol. 22[v]), indem er sie „*regulas ridicula ferentes nomina*“ nennt.

sammē. vñ das aggregat subtrahir von den gemeyn nenner. Und das vberige multiplicir yn sich selbst. vnd darnach das der nenner gewesen ist secz den zeler. vnnd widerumb das der zeler geweszen ist secz den nenner.“

Wenn Widman aber auch einmal, gelegentlich der Behandlung einer geometrischen Aufgabe (fol. 215r), die Entstehungsweise, Umformung und Lösung einer rein quadratischen Gleichung ausführlicher darlegt, so ist das eine vereinzelte Ausnahme; — die Regel ist bei ihm, nur zur Lösung führende Rechenvorschriften zu geben, und zwar so, dass dieselben meist nur für eine bestimmte Einkleidung der Aufgabe passend sind. Es zeigt sich dies besonders gut an seiner Behandlung der einen Form gemischt quadratischer Gleichungen.

Die Aufgabe nämlich (fol. 125r): „Eyner leycht dem Andern 25 fl. 2 Jar vmb gwin Und gwinsz gwin. Nu wē die 2 iar vergāgñ seȳ szo giebt yenner dem wider seyn hauptsum vñ furgwin vnd gwinsz giebt er ym 24 fl. Nu ist die frag Wie vil habñ die 25 fl gewunnē in dem ersten iar“ — diese auf die Gleichung $x + \frac{x \cdot (25 + x)}{25} = 24$ oder auf $x^2 + 2 \cdot 25x = 24 \cdot 25$ führende Aufgabe löst er nach seiner „Regula lucri“: „Multiplicir die hauptsum yn den gewin Darnach Multiplicir dy hauptsum in sich selbst quadrate Und addir das product zu dem ersten product Und die wurtzel der gantzen sum so du da von subtrahirest dy hauptsum. bericht den gewin der hauptsum Und Ist Recht.“

Dabei ist aber wohl zu beachten, dass er an einer anderen Stelle (fol. 51r und 115v) dieselbe bei ähnlichem Anlass entstandene Gleichung von der Form $x^2 + ax = b$ nach einer Regel zu lösen vorschreibt, welcher er den Namen „Regula Excessus“ beilegt: „Also soltu procedirn in dieser Regl. Multiplicir der vbertretung das halbe teyl $\left(\text{also } \frac{a}{2}\right)$ ynn sich selbst vnd das product addir zu der hauptsum Darnach nym radicem quadratam des selbigñ aggregates vnnd da von subtrahir das halbe teyl der vntterscheyd ader vbertretung vnd das vberig ist die kleyner zal. zu welicher so du addirest die vbertretung erwechst auch die grosser.“

Also dieselbe Sache unter zwei ganz verschiedenen Namen! Leicht lässt sich hiernach ermessen, wie schwer auch dem Strebsamsten das Erlernen der Algebra werden musste, wo so ohne jegliche Unterweisung, ohne jede methodische Behandlung, ohne jede Disposition nur einfach handwerksmässige Regeln überliefert wurden, wo nicht an den Verstand, wo rein und allein nur an das Gedächtniss eine Appellation statthatte!

So erklärt sich auch die drei Jahrzehnte nachher niedergeschriebene Klage Riese's, „wie etlich vil geschriebnn vnd so schwere vnderweisung gebenn, sondernn im anfangk, Das viel Zu lern abgelaszen, auch ir wenigk

mit geschafft . . . wie stilschweigent die Rechenmeister In Nurmbergk auch anderszwo zu ercleren ire exempel setzen, Welchen ich keynen glauben geben woltt, sondern hab es personlich geszenn vnd von iren schulernn glaubwirdig erfarnn, Die zu zweyen Jaren gelernt. Vnd so sie alle fragstuck Im buchlein gewist vnd machn habn mugenn, Nach dem sie auszgelerntt, begibt sich so ein kleine Zeit vorgehet, sie ir buchlein Zuhanden Nemen wenigk exempel machen ader rechn mugenn. Dan keynem exempel Ist vnderrichtung zu geschriebnn . . ."

26. So wenig uns auch Widman's Buch in Bezug auf die Behandlung der Gleichungen zu bieten vermag, so interessant und charakteristisch ist dieses Wenige für eine richtige Beurtheilung des Standes der deutschen Algebra am Ende des fünfzehnten Jahrhunderts. Es ist nach Kenntnissnahme dieses auch in anderer Beziehung noch, wie wir sehen werden, wichtigen Zeugen leicht verständlich, wie sich am Anfange des sechzehnten Jahrhunderts allmählig eine Reihe von Regeln festgesetzt hatte, welche die Einzelvorschriften enthielten, wie bei den verschiedenartigsten Formen von Gleichungen des ersten und zweiten Grades zu verfahren sei, um deren Auflösung zu finden.

So werden bei verschiedenen Cossisten jener Zeit besonders häufig jene vierundzwanzig Regeln erwähnt, welchen wir vorhin schon begegnet sind. Von ihnen wurde „grosz geschrey" gemacht und offenbar betrachteten sie Viele als den Inbegriff der Algebra. Es gebührt Berlet*) Dank, dass er diese 24 Regeln zum Abdruck gebracht hat; ich kann mich nicht enthalten, im Interesse an der Entwickelung der Coss dieselben auch hier anzugeben und seitwärts in unserer heutigen Bezeichnungsweise die Gleichungen beizufügen, auf welche sie sich beziehen.

Die erste Regell Ist wann Radix vorgleicht wird Numero ader Dragma genant, sol numerus in radicem geteyl werden, was dan ausz solcher teylung komen wirtt, musz berichten die Frag.

$$ax = b$$

Die ander Ist so φ vorgleicht wirt dem ʒ, sol numerus in censum geteilt werden vnd radix quadrata thut berichten die frag.

$$ax^2 = b$$

Die dritt Ist Wan radix vorgleicht wirt dem ʒ, sol ꝛ in ʒ geteylt werden vnd was daraus komet thut berichten die frag.

$$ax^2 = bx$$

Die vierdt Ist wan φ vorgleicht wirt dem ꝛ + ʒ, so sol φ + ꝛ durch ʒ geteylt werden. Darnach medir ꝛ, fur den halben teyl in sich, addir zum φ vnd radix quadrata der

$$ax^2 + bx = c$$

$$\left(\begin{array}{l} x^2 + \alpha x = \beta \\ x = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \beta} - \frac{\alpha}{2} \end{array} \right)$$

*) Abdruck von Riese's Coss a. a. O. S. 14—16.

gantzen sum weniger der halbe teyl ꝛ thut berichten die frag.

Die funfft regell Ist so ꝛ vorgleicht wird dem φ + ℨ, soll φ + ℨ Durch denn ℨ geteylt werden, Alsz dan medir radicem fure den halben teyl in sich vnd nim von solchen den φ, von pleibenden extrahir radicez quadrati, Nim vom radix den halben teyl ꝛ ader gib dem radix quadrata Zu den halbenn teyl ꝛ, so du nicht nemen magst, was dan kommt, bericht di frag.

$$ax^2 + c = bx$$

$$\left(\begin{array}{l} x^2 + \beta = \alpha x \\ x = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \beta} \mp \frac{\alpha}{2} \end{array}\right)$$

Die sechste Regel ist so φ + ꝛ vorgleicht seint dem ℨ, so teyl φ + ꝛ in ℨ, Den ꝛ medir, Den halben teyl multiplicir in sich, Darzu addir φ vnd radix quadrata von der gantzen sum, hinzugethan der halbe teyl ꝛ erewget die frag.

$$ax^2 = bx + c$$

$$\left(\begin{array}{l} x^2 = \alpha x + \beta \\ x = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \beta} + \frac{\alpha}{2} \end{array}\right)$$

Die sibend ist So ℭ vorgleicht wirt dem ℨ, so teyl den ℨ in den ℭ was do komet bericht die frag.

$$ax^3 = bx^2$$

Die acht Regel ist Wan ℭ vorgleicht wirt dem ꝛ, sol ꝛ in ℭ geteilt werden, vom quocienten wird radix quadrata die frag berichten.

$$ax^3 = bx$$

Die Neundt Regel ist Wan ℭ vorgleicht wirt dem φ, szo teyl φ in ℭ, von dem das do komet Nim radicez cubicam, so hastu berichtigung der frag.

$$ax^3 = b$$

Die Zehendt Regel ist wann ꝛ vorgleicht wirt dem ℨ + ℭ, sol ꝛ vnd ℨ durch ℭ geteilt werden, der ℨ medirt, der halbe teyl in sich gefurt Zum ꝛ addirt werdenn. Darnach sol berichten radix quadrata weniger der halbe deil des Zensz die frag.

$$ax^3 + bx^2 = cx$$

Die Eilfft Regel Ist szo ℨ vorgleicht wirt den ꝛ vnd ℭ, sol ꝛ + ℨ durch ℭ geteylt werden Darnach fure den halben teyl des ℨ in sich, Nim daruon ꝛ, vom pleibenden extrahir radicez quadrati, Nim vom radix den halbenn teyl des ℨ, so du magst Wu nicht addir im den halben teyl des ℨ, so hastu berichtigung der frag.

$$ax^3 + cx = bx^2$$

Die Zwelffte Regel So 𝔠 Vorgleicht wirtt dem ʒ vnd 𝔯, so teyl ʒ + 𝔯 durch den 𝔠 Darnach multiplicir den halbenn teyl des ʒ in sich Darzu addir 𝔯, von dem das do komet extrahir radicez alszdan addir denn halben teyl des ʒ zum radix, so hastu berichtigung der frag.

$$a x^3 = b x^2 + c x$$

Die Dreizehendt Regel Ist so ʒʒ vorgleicht wirtt dem 𝔠, sol ʒʒ durch 𝔠 geteilt werden was dan komen wirtt musz berichtenn die frag.

$$a x^4 = b x^3$$

Die vierzehendt Ist so ʒʒ vorgleicht wird dem ʒ, soll ʒʒ den ʒ teyln vnd radix quadrata von der teylung wirtt berichtenn die frag.

$$a x^4 = b x^2$$

Die Funffzehendt Regel Wann ʒʒ dem 𝔯 vorgleicht wirt, soll 𝔯 durch ʒʒ geteylt werden Darnach sol berichten radix cubica von der teylung die frag.

$$a x^4 = b x$$

Die Sechzehende Regel Ist so vorgleicht wirt, ʒ dem 𝔠 vnd ʒʒ, so teyl ab die minstenn Zwey durch ʒʒ alsz ʒ vnd 𝔠 Darnach medir 𝔠, fure denn halben teyl in sich, das product addir zum ʒ, extrahir radicem quadrati Vnd nim von solchm den halbenn teyl des 𝔠, so hastu berichtigung der frag.

$$a x^4 + b x^3 = c x^2$$

Die sibentzehende Ist, so 𝔠 vorgleicht wirt dem ʒ vnd ʒʒ, so teyl 𝔠 vnd ʒ In den ʒʒ Darnach fure den halbenteyl des 𝔠 in sich, Nim von dem das do komet den ʒ, vom vbrigen extrahir radicez quadrati Nim von selbigenn den halben teyl des 𝔠 so du magst, Wu nicht addir den halben teyl des 𝔠 dazu, so hastu berichtigung der frag.

$$a x^4 + c x^2 = b x^3$$

Die Achtzehendt Wan ʒʒ vorgleicht wirt dem 𝔠 vnd ʒ, so teyl 𝔠 vnd ʒ in ʒʒ Darnach medir 𝔠 Den halben teyl multiplicir in sich, addir darzu den ʒ, extrahir ausz dem komenden radicez quadrati Alszdan addir Zum radix den halben teyl 𝔠, so hastu den werd des fragenden dinges.

$$a x^4 + b x^3 = c x^2$$

Die Neuntzehendt Regel Ist, so ʒ vorgleicht wirt √ vom radix, sol man den ʒ in sich multipliciren vnnd das punct vor dem Radix auszleschn. Alsz ich setz 1 ʒ ist gleich dem √ von 8 𝔯, Wisz darnebenn das dise Regel vnd die neheste nachuolgend nicht ehr sich in die vorgleichung algebre geben dan die Zeichen komen zu gantzer irer macht, fure derhalbenn 1 ʒ in sich komet 1 ʒʒ, lesche ausz das punct pey dem 𝔯, komen

$$a x^2 = \sqrt{b x}$$

1 ʒʒ gleich 8 ꝣ. Teyl 8 ꝣ in 1 ʒ komen 8, Daruon radix cubica als 2 bericht die frag.

Die Zwenzigiste Regel ist, szo ʒ vorgleicht wirt dem √ von ʒ, szo multiplicir den ʒ in sich Darnach lesche ausz den punct fur dem ʒ, so komstu in die vorgleichung das ʒʒ gleich wird dem ʒ, teyl ʒ in ʒʒ so beweyst alszdan radix quadrata die frag. $ax^2 = \sqrt{bx^2}$

Die einundzwenzigiste Regel Ist wan ʒʒ vorgleicht wirt dem φ, so teyl φ in ʒʒ Alszdan wirt radix quadrata von dem radix quadrata berichten die frag. $ax^4 = b$

Die Zweyundzwenzigist Regel Ist, wan̄ φ vorgleicht wirt dem ʒ vnd ʒʒ, so teyl φ + ʒ in den ʒʒ, Den ʒ medir, das halbteil multiplicir in sich darzu addir den φ Nim darnach hinwegk den halben teyl des ʒ so radix quadrata auszgezogen ist, so wirt dir alszdann Radix quadrata vom vbrigen die frag eroffnen. $ax^4 + bx^2 = c$

Die dreiundzwentzigist Regel ist, Wan̄ ʒ vorgleicht Wirt dem φ vnd ʒʒ so soltu φ + ʒ mit dem ʒʒ teylenn, Denn halben teyl des ʒ in sich furn Vnd den φ dauon subtrahiren, Vom pleibenden radicez quadrati extrahire Den halben teyl des ʒ daruon nemen ader darzu thun, so wirt alszdan Radix quadrata die frag erewgen. $ax^4 + c = bx^2$

Die Vierundzwenzigist Regel ist, So ʒʒ vorgleicht wirt dem ʒ + φ sollen die minsten Zwey durch meyst das ist denn ʒʒ getheilt werdenn, Darnach der halbe teyl des Zensz in sich gefurt Zum φ addirtt, von solchen radix quadrata gezogen, Zum radix der halbe teyl des ʒ gethan werdenn, so wirt alszdann Radix quadrata die frag berichtenn. $ax^4 = bx^2 + c$

27. Auch wenn nicht ursprünglich eine geringere Zahl von Vorschriften vorhanden gewesen und wenn auch alle Erinnerung an dieselben verloren gegangen wäre, so hätte ein aufmerksames Betrachten der Einzelfälle trotzdem allmählig zu einem Zusammenfassen derselben hinführen müssen, wie denn z. B. die Gleichartigkeit des ganzen Verlaufes bei der Auflösung nach der 3. oder 7. Regel mit dem nach der ersten gewiss in die Augen fiel. So führt denn auch Riese selbst jene 24 Regeln mehr aus Rücksicht auf geschichtliche Ueberlieferung an und berichtet dabei, dass „unter ihnen die erstenn sechs genant wurden die furnemesten". Er hat aber auch in Worten den Schritt ausgesprochen, welcher zur Vereinfachung hätte führen müssen. Er beginnt nämlich seine Coss sofort mit der Vorschrift: „Ist erstlich zu mergkenn, so zwey Zeichen ader (= oder) zwu

benenung proporcionalistischer ordenung ane (= ohne) mittel einander nachuolgent vorgleicht werdenn, ader mittel darzwischenn . . .“; im ersten Falle „saltu dich bevleisigen Dieselbigen alleweg In die kleinsten proportz zusetzenn“ (— so z. B. 9 ℨ = 3 cꝯ gibt 9 φ = 3 𝔯; 16 ℨcꝯ = 2 ccꝯ gibt 16 φ = 2 cꝯ; ebenso 65 ℨ = 3 cꝯ + 2 ℨℨ gibt 65 φ = 3 𝔯 + 2 ℨ); im zweiten Falle aber „so in eyner vorgleichung dir furkomet Das Zwey signa eynem ader eynes Zweyen, Die nit einander alszbalde nachvolgen sonder ein mittel dar Zwischen gehaltenn, soltu wissen, das das mittelste Zeichen von eynem gleich soweit sam vom anderenn stehen sol, setz in die ersten Zeichen ader kleinste ordenung“ (— so z. B. 𝔯, cꝯ, ß gibt φ, ℨ, ℨℨ).

Unter Anwendung dieser Vorschrift konnte man bei den berühmten 24 Regeln aus der 1., 3., 7., 13., ebenso aus der 2., 8., 14., 20., dann aus der 9., 15., 19. je eine Regel bilden, und in gleicher Weise liessen sich auch die Regeln Nr. 4, 10, 16, (20) und 5, 11, 17, (23) und 6, 12, 18, (24) je eine zusammenziehen. Dem entsprechend unterscheidet Riese nicht mehr 24 einzelne Regeln, sondern er kehrt zurück zu den überlieferten 8 und so wie er, so preist auch die folgende Zeit bis zur Mitte des Jahrhunderts als die Hauptsache der Coss in sich begreifend „die acht equaciones Algebre In welchn zwey Zeichenn in den ersten viern einander vorgleicht werden vnnd in den andern vieren drey Zeichen vnder welchen

Die erste. So zwey signa ader Zwu benenung ane mittel in proporcionalistischer ordenung einander vorgleicht werden, sol das wenigste signum am namen durch das groser nachvolgend geteylt werden vnd was ausz solch teylung kompt, wirt berichten den werdt fragenden Dinges.

Die ander. So zwey Zeichenn einander nachvolgendt vnd eynes darzwischen ausgelasen, sol das minste am namen Das ist, welches weniger ductiones hat, Durchs meist geteylt werden, vnd radix quadrata desselbigen thut auszweisen was 𝔯 werd ist.

Die dritte. So zwey signa einander in gesatzter proporcionalistischer ordenung vorgleicht werdenn vnd zwey signa in der mitt auszgelasen, sol das minste der benenung, durchs meiste geteylt werdenn Vnd derselbenn quocienten cubicistische seitenn ader radix cubica wirdt zelenn ader aufflоesen die frag.

Die Vierdt. So zwey signa in proporcionalistischer ordenung werdenn aneinander vorgleicht Zwischen welchen drey signa nach berurter proporcionalistischer ordenung vbergangen, soll das minste am namen Durchs meiste geteilt werdenn vnd radix quadrata von dem radix quadrata bericht die frag.

Die fünfftt. So drey Signa ane mittel einander nachuolgen, das erste den letztenn Zweyen vorgleicht wirtt, solln die Zwey minsten, Nemlich das erst vnd mittelst Durchs letzt vnd meyst geteylt werden.

Alszdan soll das mittelste Zeichen werden halbirt, vnd den halben teyl sol man sich quadrats furenn, darnach zum ersten Zeichen addirn vnd radix quadrata von solcher heuffelung weniger der halbe teil des mittelsten Zeichenns eroffentt die frag.

Die sechste. Wan drey signa einander an mittel vorgleicht werden, Also die euserstenn Zwey den mittelsten, soll man die wenigsten Zwey durch das meyst teyln, Darnach den halbenn teyl des mittelstenn Zeichensz in sich furenn, von solchm product das erste Zeichenn subtrahiren, Alszdan wirt auszweyszen vom vberigen, radix quadrata, hinzugethan ader hinwegkgenomen der halbe teyl des mittelsten Zeichens Denn werd des fragenden Dinges.

Die siebende. Ist von dreyen Zeichen die ersten Zwey dem letztenn, solln die ersten Zwey durchs letzt geteilt werden, das mittelste halbirtt, in sich gefurtt dem ersten addirt werden vnnd radix quadrata von solch Zwsamenfugung mit dem halben teyl des mittelstenn Zeichensz hinzugethan, wirtt alszdan eroffenn den werd des begerenden dinges.

Die Achte. Ist nichts andersz dan̄ die nehestenn drey itzt gesatztt, Musz vnd kann auch nicht emperen solcher, Dan sie ist, wue drey Zeichen in gleichen mitteln proporcionalistischer ordenung einander vorgleicht, ein Zeichen, Zwey ader drey auszgelasen. Wirtt 1 auszgelasen vnd die letzten Zwey dem erstenn vorgleicht werden, so halte dich nach vnderrichtung der funfften equacion. Wue die eusersten Zwey dem mitteln, so gebrauch der sechsten, seint aber die ersten zwey dem letztenn vorgleicht, so nim für dich die sibende equacion. Ist solches volfurtt, so wirtt dich alszdann radix quadrata ferner die frag auszzuortern vnderweisenn. Seint zwey Zeichen auszgelasenn, so gebrauch Zum letzten die wurtzel des cubics. Wu drey in der mitt vorlasen, so gebrauch nach gehabter muhe die wurtzel des quadraten vom quadratenn."

28. Der doppelte Vorzug, welcher diese acht Equationen vor den am Anfang des 16. Jahrhunderts, wie es scheint, fast allgemein gebräuchlichen 24 Regeln auszeichnet, ist unmittelbar ersichtlich: einmal werden in der That, wie vorher angegeben, die gleichartigen Fälle zusammengefasst, so dass die ganze Theorie wesentlich an Einfachheit und Klarheit, auch schon an Allgemeinheit gewinnt; dann aber ist es, zumal rücksichtlich der letzteren, von nicht geringer Bedeutung, dass die Regeln nun auch dauernd als für diejenigen Gleichungen gültig erklärt werden, welche höhere als die vier ersten Potenzen der Unbekannten enthalten, wenn deren Unbekannten nur eine gewisse „proporcionalistische ordenung" einhalten.

Werden sie „in die kleinste proportz gesetzt", so können wir die Fälle, auf welche sich die acht Equationen beziehen, durch unsere Bezeichnung leicht folgendermassen ausdrücken:

I) $\cdots ax = b$ V) $x^2 + ax = b$ VIII) $\begin{cases} x^4 + ax^2 = b \\ x^6 + ax^3 = b \\ x^8 + ax^4 = b \end{cases}$
II) $\cdots ax^2 = b$ VI) $x^2 + b = ax$
III) $\cdots ax^3 = b$ VII) $x^2 = ax + b$
IV) $\cdots ax^4 = b$

wobei wir freilich nicht ausser Acht lassen dürfen, dass als Coefficienten a und b damals nur ganz bestimmte Zahlen gewählt wurden.

Auch jetzt noch werden bei den quadratischen Gleichungen, um nur positive Glieder zu berücksichtigen, stets die drei Hauptformen V, VI und VII unterschieden; und auch hier finden sich, während für V und VII nur je eine Lösung zugelassen wird, für die Gleichungsform VI zwei Lösungen angegeben, freilich ebenfalls (wie bei der fünften unter den 24 Regeln) in der nicht richtigen Form:

$$x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \pm \frac{a}{2}\,.$$

Wie wenig klar das Bewusstsein von der Doppeldeutigkeit des Werthes gewesen ist, beweisen die Worte, mit welchen Riese die Lösungen zweier diesem Falle angehöriger Gleichungen begleitet.

Für die Gleichung $x^2 + 7 = 8x$, deren richtige Lösungen 7 und 1 sind, müsste er nach seiner Regel 3 ± 4, also 7 und -1 finden; er bemerkt aber: „Von 3 kanstu nicht nemen den halben teyl des mittelsten Zeichen alsz 4, sonder gib 4 dem radix zw, komen dir 7 souil ist valor radicis.“ Er lässt also in diesem Falle nur einen Werth zu.

Für die Gleichung $x^2 + 21 = 10x$ aber, deren richtige Lösungen 7 und 3 sind, müsste er nach seiner Regel 2 ± 5, also 7 und -3 finden; durch einen kühnen Sprung weiss er sich aber zu helfen: „radix quadrata 2 Nim vom halben teil des mitlern Zeichn alsz 5 pleiben 3. Das ist der werdt radicis. Ader gib den radix 2 Zu dem halben teil des mitlern quocient als 5 wirt 7. Ist auch der werdt radicis“, so dass hier Riese trotz einem im Sinne seiner Vorschrift falschen Verfahren dennoch zu zwei richtigen Lösungen gelangt.

29. Unzweifelhaft richtiger als Riese, wenn auch nicht unbedingt richtig, hat sein Zeitgenosse Grammateus den zuletzt besprochenen Fall einer quadratischen Gleichung behandelt. Dessen Rechenbüchleln ist zwar, wie ich früher (S. 13) erwähnte, schon im Jahre 1518 erschienen, und es hätte demgemäss die Darstellung von Grammateus vielleicht ihren Platz vor der von Riese finden sollen; allein die grössere Ausführlichkeit Riese's und die Beachtung, dass letzterer schon im Jahre 1515 eifrigst mit der Coss beschäftigt war*), also vielleicht damals schon mit der Ausarbeitung seines

*) Bei Berlet a. a. O. S. 27 (Anm.) liest man folgende Stelle von Riese: „hab die (Exempel) gerechent vnd durch die ℭ volfurt In beisein Hansen Conrads anno 1515, so dise Zeit auff S. Añabergk Probirer was.“

Lehrbuches begonnen hatte, bestimmten mich, erst an dieser Stelle von des Grammateus' algebraischen Bestrebungen und Erfolgen zu reden.

Da springt nun sofort in die Augen, dass auch Grammateus, ohne weiter einen Grund anzugeben, die überkommenen 24 Regeln bei Seite lässt, ja ihrer nicht einmal Erwähnung thut und dafür vorzieht, die Lehre von den Gleichungen mit sieben Regeln abzuthun, welche mit den Riese-schen Equationen I—VII im Wesentlichen übereinstimmen. Grammateus zeichnet sich nun aber dadurch aus, dass er die Zahlen-Coefficienten der Gleichungen schon mit Buchstaben benennt; um diese seine Eigenthümlichkeit, zugleich auch seine von der Riese's abweichende Vorschrift betreffs der Lösung der Gleichung (VI): $x^2 + b = ax$ vorzuführen, setze ich seine fünfte Regel wörtlich hier bei. Dieselbe lautet:

„So aber in proportionirten ordnung werden gesatzt nach einand' die quantitet | vnd die eussere zwo geaddirt sich vergleichen mit der mittel | so sollen die ersten zwo quantitet | ein iegliche besonder durch die dritte geteylt werden | vnd der quocient | welcher ist komen ausz der teylung der ersten zal durch die drit sei a | also auch was entspringt ausz der teylung der mittel zal | durch die dritt | sei b multiplicire das halb teyl b in sich | vnd von dem product subtrahir a | vnd des ubrigen radix quadrata sol addirt werden zum halben teyl b | so kompt valor 1 pri. Auch begibt es sich das solchs vnder zeiten wirt subtrahirt vom halben teyl b."

Grammateus gibt also als Lösung der Gleichung VI:

$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$ und „vnder zeiten" auch: $x = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$;

er unterlässt es also ebenfalls darauf hinzuweisen, dass jene Gleichungsform stets zwei (positive, natürlich reelle) Lösungen habe, aber jede einzelne, welche er gibt, ist immerhin richtig. Er gibt auch ein

„Erst Exempel. 2 se. + 18 · N · sein gleich 15 · pri.",

d. h. $2x^2 + 18 = 15x$,

wofür er nur $\frac{15 + 9}{4} = 6$ als Lösung gibt, während auch $\frac{15 - 9}{4} = \frac{3}{2}$ richtig wäre; sein

„Ander Exempel. 2 se. + 500 · N · sein gleich $95\frac{1}{3}$ pri."

d. h. $2x^2 + 500 = 95\frac{1}{3}x$

wählt er, um dafür $\frac{143 - 107}{6} = 6$ als einzige Lösung zu finden, während $\frac{143 + 107}{6} = \frac{125}{3}$ ebenfalls eine Lösung gewesen wäre.

30. Dass Grammateus die beiden Lösungen $\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$ nicht als gleichzeitig gültig erklärt hat, werden wir ihm nicht so hoch anrechnen

dürfen. Um so auffallender bleibt es, dass Riese geradezu falsche Werthe gegeben hat, da er doch die richtigen in der Quelle angegeben fand, aus welcher er nach eigener Angabe schöpfte und auf die wir im nächsten Abschnitte noch zu sprechen kommen werden. Doch schon hier muss der falschen Meinung, welche vielleicht auch heute noch ihre Anhänger hat, jedenfalls aber im 16. Jahrhundert Glauben fand, entgegengetreten werden, als ob einer unserer schon so manchmal genannten Cossisten die angeführten acht Equationen erfunden, auf sie die früheren 24 Regeln reducirt habe. Nichts ist falscher als das! Wenn so bald nachher Stifel bereits die Meinung aufkommen lässt (Ausg. von Rud. Coss fol. 147), als ob Rudolff jene acht Regeln erfunden habe, so steht dem schon gegenüber, dass Rudolff selbst, was offenbar Stifel übersah, in seiner Coss (fol. CC III[r]) das Gegentheil sagt in den Worten: „Will hiemit von den acht regeln der Coss | so von den alten gesetzt vn̄ demonstrirt | nach notturfft geschriben . . . haben.“ Aber wir sahen ja dieselben schon lange vor Rudolff in Deutschland bekannt, und zum Ueberfluss bezeugt Riese ausdrücklich, dass er selbst die „acht equaciones“ aus einem alten Buch entnommen habe und dass „solich vierundzwenzigk beschriebenn Regel haben vnsere vorfaren gezogenn ausz denn acht equacionibus Algebre.“

Riese selbst ist aber offenbar im Zweifel gewesen, in welcher Beziehung die 24 und die 8 Regeln zu einander stehen, insbesondere welche von beiden früher vorhanden gewesen. Denn wenn er nach dem vorhin angegebenen Ausspruche unmittelbar weiterfährt: „villeicht der (= deren) souil beschriben das die anhebendenn destermehr eynen pessern vorstant schopfenn mugen“ — so liegt doch in dem Aufstellen dieses pädagogischen Gesichtspunktes die Annahme, dass eigentlich acht Regeln im Unterrichte zu übermitteln gewesen seien und man erst nachträglich 24 daraus gebildet habe. Aber Riese selbst führt auch wieder einen Zweifel an solcher Auffassung vor, indem er unmittelbar weiterfährt: „Ader (= oder, sc. sie haben) die gesetzt, Die weyl si gebruch vnd mangel an den achten auch am gantzen buch Algebre (worin sie nämlich enthalten) gehabt habenn. Dan an Zweyffel, so si Die acht vorgleichung wie beschriebenn gehabt hetten wurden nicht ferner vmbschweiff gemacht habenn Ader hettenngewisszlich beschriebenn alle modos equandi, Darzu der Regeln vberflussig vnd vnnotig gemachtt. Dan in der erstenn equacion proporcionalistischer ordenung der signa pisz vff den cc𝒸 hetten sie 9 regeln gemacht, auff die ander 8, auff die dritten 7, auff die vierden 6, Auff die funftenn 8, Auff die sechsten 8 desgleichen auff die sibendenn 8, Vnd auff die achte equacion wurden sie nicht vnderlasen haben 36 regelnn Zuschreyben, Welch in summa machen wurden 90. Und wurden dem gemeynen mann schwer im sin zu behalten. Derhalben Algebras wol Zw hertzen genomen proporcionalistische ordenung, vns vorlasenn seine acht equaciones. . . . .“ Riese meint also doch, dass die

Regeln in grösserer Anzahl früher ausgebildet worden seien und dass erst nachträglich irgend ein Mathematiker, von Riese als „Algebras“ benannt, das Wesentliche derselben zusammenfassend deren Zahl auf die berühmten acht reducirt habe.

31. Während Riese die 24 Regeln zur Lösung von Gleichungen immerhin noch der Aufzeichnung für werth erachtete, ja sie noch als für den Unterricht vielleicht nutzbringend zu halten scheint, schweigt Grammateus dieselben völlig todt. Beider nächster Nachfolger aber, der berühmte Rudolff, der nach eigener Aussage „von meister Heinrichen | so gramateus genent | der Coss anfengklichen bericht empfangen“, folgt nicht dem Beispiele seines „preceptors“. Schon im Titel seines Werkes spricht er es aus, dass er „die meinug aller dere | so biszher vil vngegründten regeln angehangen“ hintanzusetzen gedenke, und in dem an den Bischof von Brixen gerichteten Schluss- und Widmungsbriefe betont er nicht minder seinen Standpunkt in den Worten: „Wir sein biszher allein den hepfen | den vngegründten hirnbrechenden regeln angehangen | der wolgegründten | gewissen vnd demonstrirten kunst | gar kein acht gehabt.“ Es überrascht uns daher nicht, dass er den den Gleichungen gewidmeten Theil seines Buches sofort mit der Ansprache an den Leser eröffnet: „Lasz dich nit irren | das etlich biszher vnd noch | von 24 regeln der cosz grosz geschrey machen. Dan angesehen ire meinung | vnd die cauteln will ich ausz den 8 regln nit 24 | sunder etlich vn̄ hundert machē. Ist nemlich ein verdrüszlicher überflusz | von einer kunst grosz geschwetz treiben | so mit eim wenigern nit allein ördentlicher sunder auch verstentlicher vn̄ volkumlicher mag dargebē werdē.“

Dem entsprechend gibt auch Rudolff alsbald die „8 Regel der Cosz mit gemeynen Exempeln“ und zwar in einer mit Riese übereinstimmenden Darstellung, und deutet dabei die Möglichkeit, mehr Regeln zu bilden, dadurch an, dass er jeder einzelnen eine Anzahl Beispiele nachfolgen lässt und zwar jeweils so viele von je anderer Art, als Riese als möglich angegeben hatte (vgl. vor. S.). So illustrirt er z. B. die auf $ax^4 = b$ sich beziehende „vierde equation“ durch folgende Beispiele:

2 ʒʒ		32 φ	
3 ß		48 𝓇	
4 ʒcl	Gleych	64 ʒ	Facit 1 𝓇 2 φ.
5 𝔅ß		80 cl	
6 ʒʒʒ		96 ʒʒ	
7 ccl		112 ß	

Dem Inhalte wie der Form nach sehen wir hier ein deutliches Anlehnen an das in § 23 besprochene Wiener Manuscript, welches Stöberl nach Wien gebracht hatte: Stöberl's Schüler, Tanstetter, war aber der Lehrer von Rudolff's Lehrer Grammateus.

Rudolff hat übrigens in Uebereinstimmung mit seinen vorhin angeführten Worten selbst schon zur Vereinfachung beigetragen, indem er die vier ersten Equationen zusammenfasst in eine einzige Regel. Nachdem er nämlich seine jene vier Equationen illustrirenden (nachher noch zu besprechenden 310) Beispiele abgehandelt, wendet er sich (fol. X^{r}_{II}) „Zum leser" mit den Worten: „Auff das | die obemelten 4 regln: von der vile wegē: dir nit leichtlich ausz gedechtnusz abfallen | magstu sie vnter ein regl zihen | mit sölchen worten. Werden einander vergleicht zwo quantitete | diuidir die grösser in die kleiner. Ist kein andere quantitet: natürlicher ordnung nach: zwischen jene auszgelassen | nim den quocient. Ist eine auszgelassen | nim radicem quadratam des quocients. Sein zwo auszgelassen | nim des quocients radicem cubicam. Sein drei auszgelassen | nim radicis radicem des quociēts so wirstu bericht was 1 ϰ bedeute. Hab ich im besten vnangezeigt nit lassen wellen."

In Bezug auf die vier letzten Equationen stimmt Rudolff mit Riese überein, nur dass auch er wie dieser und wie Grammateus seine Eigenthümlichkeit hat in der Lösung der VI. Equation $x^2 + b = ax$. Rudolff gibt nämlich richtig deren Lösung an als

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\,,$$

indem er sagt: „ . . . Radicem quadratam des übrigē gib oder nim dem halbenteil des mittlern quocients | das collect oder rest | zeigt an den werdt 1 ϰ"; aber er entstellt seine richtige Lösung durch eine falsche Einschränkung, indem er beifügt: „Bei diser equation soltu merckē | wan die grösser quantitet mehr inhelt dañ die kleiner (d. h. wenn in der vorigen Gleichung $a > b$) so musz radix quadrata addirt werdē. bedeut aber die grösser minder dañ die kleiner (d. h. wenn $a < b$) so musz sie subtrahirt werden von $\frac{1}{2}$ des mittlern quocients."

Demgemäss gibt Rudolff für folgende Beispiele, in welchen $a > b$ ist:

4 ʒ + 8 φ Gleych 12 ϰ
5 cϵ + 9 φ Gleych $14\frac{1}{2}$ ϰ

ebenso auch für die folgenden, in welchen $a < b$ ist:

2 ʒ + 30 φ Gleych 19 ϰ
3 cϵ + 31 φ Gleych $21\frac{1}{2}$ ϰ
. . . .

in gleicher Weise 2 als einziges Facit für ϰ, während doch für die ersteren noch $\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$ bezw. $= 1,\ \frac{9}{10},\ \cdots$ und für die letzteren noch $\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$ bezw. $= 7\frac{1}{2},\ 5\frac{1}{6},\ \ldots$ richtige Lösungen gewesen wären.

Uebrigens hat Rudolph selbst jene Zufügung als falsch zurückgenommen, wie dies Stifel ausdrücklich bezeugt (Ausg. von Rud. Coss fol. 143[v]).

32. Obwohl die ganze Lehre von den Gleichungen auf wenigen Seiten in Rudolff's Buche abgemacht wird, muss dem letzteren dennoch eine sehr grosse Bedeutung zugesprochen werden, wie ich dies schon oben (S. 16) hervorhob und begründete: es wurde unzweifelhaft sehr viel benützt und gewiss aus dem Grunde, weil Rudolff durch Beifügung „vil schöner Exempeln von zal suchen vñ kauffmans hendln" (im Ganzen 428) die Anwendungsfähigkeit und die Art der Anwendung seiner 8 Regeln erläuterte. Ganz besonders ist dabei die erste Regel mit Beispielen bedacht; es sind für sie allein deren 240. Rudolff begründet dies auch damit, dass „durch dise erst equation werdẽ entricht vnd auffgelöst alle exempl vnnd fragen | so durch die Regel de tre vnd durch die regel falsi practicirt werden", und es ist seine ausgesprochene Absicht bei der Bearbeitung der „vil gemeinen exempl . . . dass dadurch ein neuw anfahender schüler zu nachuolgendẽ schwerere frage vñ auffgaben mer geschicklichkeit erlange. Auch dabey erkeñt werde die weitlauffige nutzbarkeit diser kunst | dz nit allein verborgne frage | sunder auch gemeine exempl | mit grösser behẽdigkeit vñ weniger verletzung des hirns | durch sie auszgericht werden."

Weil es sich aber „offt in practicirung der exempl vnd fragen begibt, dafür: das zwo ordnung der quantitete einander vergleicht | vnd doch keiner obemelter equation vnterworffen", d. h. weil die bei Lösung von Aufgaben sich ergebenden Gleichungen oftmals keineswegs eine solche Gestalt haben, dass eine der überkommenen acht Regeln unmittelbar zur Anwendung gebracht werden könnte, so trifft Rudolff auch für diesen Fall Vorkehrung: er stellt nämlich vier Cautelen auf, durch welche die Rückführung auf eine der 8 Equationen ermöglicht wird. Er spricht dieselben in folgender Weise aus:

„Die erst cautel. Wañ in vergleichung zweier zalen | bey der einen gefunden würt ein quantitet | bey der andern auch eine der vorigen im namen gleich. Alszdañ (angesehen die zeichen + vn —) musz eine | ausz den gleich benenten quantitetn | addirt oder subtrahirt werdẽ von je einer der vergleichten zalen in sunderheit . . . Das zu volbringen hab achtung das + zu subtrahiren vnd das — zu addieren.

„Die ander cautel. Wañ es sich begeben würt in vergleichung zweier zalen | das bey der einen gefunden wurt ein quantitet | vermerckt mit dem zeichen — Bey der andern keine der vorigen im namen gleich | so addier die gefundẽ quantitet zu jeder zal | das ist: wisch sie ab bey der zalen da sie steet. thu sie zur andere durch das zeichen + (So z. B. aus 40 φ — 8 ℨ gleich 6 ʒ folgt 6 ʒ + 8 ℨ gleich 40 φ).

„Die dritt cautel. Wan ein absolut vergleicht wirt einer denominirten zal (verstee wañ ein zal würt gleich gesprochen der wurtzl einer

andern zal) so musz dz absolut auch zugleich denominirt werden. (So z. B. aus $1\frac{2}{3}$ ꝝ gleich $\sqrt{}$ 1 ꝝ folgt $\frac{25}{9}$ 𝔷 gleich 1 ꝝ.)

„Die vierd cautel. Wañ in vergleichung zweier zalen | eine oder sie peide | pruchweisz mit zeler vnnd neñer geschriben werden: wil offt von nöten sein die gebrochne zalen ins gantz zu reduciren | geschieht also. Multiplicir kreutzweisz den zeler der ersten | mit dem neñer der andern zal | dz product werd gesprochē α. Darnach multiplicir auch den zeler der andern mit dem neñer der erstn zal | das da kompt ist dem α gleich.“

In solcher Gestalt erscheinen in Deutschland beim erstmaligen Auftreten die Umänderungen von Gleichungen, welche wir heute als die vom Versetzen eines Gliedes auf die andere Seite der Gleichung mit Umkehrung des Vorzeichens, vom Vereinigen aller die Unbekannte enthaltenden Glieder auf einer Seite, vom Wegbringen der Wurzeln und Brüche zur Anwendung bringen — ebenfalls ein deutliches Zeichen dafür, wie allmählig nur und wie langsam jeder Schritt zum Besseren gemacht wird.

33. Wiederholt schon hob ich das manchfache Verdienst hervor, welches sich Rudolff um die Entwickelung der Mathematik in Deutschland erworben hat. Nicht der geringste Theil desselben ist die Anregung, die er durch sein Buch, wie wir wohl nicht mit Unrecht vermuthen dürfen*), auf den Wittenberger Professor Milich und sowohl mittelbar durch diesen als auch unmittelbar eben durch seine Coss auf dessen Freund und Nachfolger im Lehramt Stifel ausgeübt hat. Schon in seiner *Arithmetica integra* bezeugt dieser in aller Kürze (fol. 226v), „*Christophorum mihi tradidisse hunc librum tertium reputo*“, und später, in seiner Ausgabe der Coss von Rudolff, rühmt er, dass letzterer „die wunderbarliche vnd gantz Philosophische Kunst desz rechnens | genennet Die Cosz | in deutsche sprach durch den Truck gebracht | so gantz getrewlich vnd so klar vnd deutlich | das ich die selbige | Kunst ohn allen mündtlichen vnderricht | verstanden hab (mit Gottes hülff) vnd gelernet. Welchs ich zu Ehren seiner getrewen mitteylung gern bekenne.“

Aber freilich, durch Stifel's Thätigkeit hat jene Kunst ein in mehrfacher Beziehung verändertes Aussehen angenommen, wie schon nach dem in den vorigen Abschnitten Besprochenen zu erwarten ist. Hatte schon Riese die Bedeutung der überkommenen 24 Regeln herabgemindert und Rudolff dieselben ganz weggelassen, um allen Nachdruck auf die bewussten 8 Regeln zu legen oder zum mindesten auf deren vier letzte, da er ja schon den Versuch gemacht, die ersten vier in eine zusammenzufassen, so möchte es Rudolff doch kaum geglaubt haben, dass auch seinen vier noch

*) Stifel gebraucht in einem Briefe an Milich folgende Worte (*Arithm. int.* fol. 226v): „. . . *maxima uero pars eorum (exemplorum) sit Christophori Rudolphi quem te amare mecum noui, etiam iam in Christo quiescentem, ob egregiam fidelemque Algebrae publicationem* . . . .“

übrigen Equationen bald ein gleiches Loos bereitet werden würde. In der That ist die Vereinfachung der Lehre von den Gleichungen, die Rückführung der stets getrennt betrachteten acht Gleichungsformen und Lösungsvorschriften auf eine einzige mit in erster Linie zu nennen, wenn von Stifel's Verdiensten um die Algebra die Rede ist. Die Voraussetzung zu einer solchen zusammenfassenden Betrachtung war, dass er auch die Gleichungen vom zweiten Grade so anschrieb, dass x^2 für sich allein die eine Seite der Gleichung bildete und dass er das Auffinden des Werthes von x auf diese Weise als Ausziehen der Wurzel auffasste. In diesem Sinne konnte er sofort am Anfange des den Gleichungen gewidmeten dritten Buches seiner *Arithmetica integra* (fol. 227^{v}) die überkommenen mehrfachen Regeln durch eine einzige mit folgendem Wortlaut ersetzen:

> „*Inuenturus numerum inueniendum absconditum, ponat loco illius* 1 *Coss. (nos autem ponimus* 1 ꝛc *) et inuenta aequatione aliqua, reducat eam, si reducenda sit. Deinde per numerum signi cossici maioris, diuidat reliquum aequationis, eidem diuisori aequatum, sed denominato tamen. Et sic semper proueniet numerus ille absconditus qui inquirebatur, uel in quotiente, uel in aliqua eius radice. Radix autem si qua fuerit extrahenda, pulchre hoc atque sufficienter signabit diuisor suo cossico signo*" —

und neun Jahre später gibt er dieselbe in deutscher Sprache, aber auch „an wortē verkürtzt | also:

> „für das facit deiner auffgab setz 1 ꝛc. Handle da mit nach der auffgab | bis du kom̄est auf ein equatz. Die selbige reducir | so lang bis du sihest das 1 ꝛc resoluirt ist."

Mit vollem Bewusstsein seiner Neuerung *) und in richtiger Erkenntniss von der Tragweite bezeichnet Stifel selbst seine Regel als „*famosissima illa regula Algebrae, reducta ad suam simplicitatem germanam*"; er sagt, sie sei „*simplex atque facilis*", und er rühmt von ihr, dass sie eine unendliche Fülle der Anwendung enthalte und dass er glaube, durch deren Einführung „*praestitisse abunde omnia illa, quae Christophorus per octo regulas praestitit et alii per 24 regulas*"; er sagt: er „hab auch desz nicht zweyfel | so Rudolff noch lebete | jhm würde meyn meynung gefallen. Den̄ wie er verwirfft die Menge der 24 Regeln un̄ setzet dafür 8 Regel der Cosz | Also setze ich fur dieselbige 8 Regeln | ein einige Regel | mit der ich alles auszricht | das er mit seynē 8 Regeln hat auszgericht".

*) In der *Arithm. int.* fol. 250^{v} z. B. heisst es: „*An uero prius aliquando (regula mea) sit sub tali simplicitate inuenta, mihi non constat, nisi quod coniectura appellationis adducor ad huius quaestionis affirmatiuam. Saepius enim singulare consueuimus uoce quam plurali regulam Algebrae vocare. Mihi uero uox haec displicebat: maluissem enim rem hanc artem dici quam regulam, ut quam multis uariisque regulis constare uidebam. Sed nunc nihil moror, utcunque appelletur. Ego mea haec aequis iudicibus libens resigno iudicanda.*"

34. Im Einzelnen unterscheidet Stifel an seiner Regel vier Theile: die Auffindung der Gleichung und die Division (derselben durch den Coefficienten der höchsten Potenz der Unbekannten = *diuisio per numerum signi cossici maioris)* bezeichnet er als Hauptheile, die Reduktion der Gleichung und die Wurzelausziehung als Nebentheile. Unter Reduktion versteht aber Stifel im Wesentlichen dasselbe, was Rudolff bei Aufstellung seiner 4 Cautelen im Auge gehabt hatte, die Umänderung einer Gleichung nämlich bis dahin, wo die mit dem Coefficienten 1 behaftete höchste Potenz der Unbekannten allein die eine Seite bildet. Die hiezu nöthigen „sechs principia", welche wir heute als die Axiome bezeichnen vom Gleichbleiben gleicher Grössen, falls gleiche Veränderungen mit ihnen vorgenommen werden, führt Stifel ausführlich an, und er sagt, dass sie zwar „wol so schlecht vnd einfältig sind | das sye einem kind mögen bekant seyn", gleichwohl aber „haben sye in der Cosz so hohen brauch | das keyn menschliche vernunfft | den selbigen | allenthalben | mag erlangen. Denn wa man nach disen principiis allenthalben könte furüber kommen | so were die Cosz in yhrer gantzen volkomenheyt".

Dass zur Lösung der Gleichungen ersten Grades nur die genannten Hauptheile und etwa noch die Reduktion*) nöthig sind, ist unmittelbar ersichtlich; die Quadratcoss aber erfordert auch das Ausziehen der Quadratwurzel, da ja Stifel, wie vorhin bemerkt, bei den quadratischen Gleichungen das quadratische Glied der Unbekannten allein auf die eine Seite setzt und nun den Werth der letzteren zu finden als die besondere Aufgabe auffasst, aus der anderen Seite die Quadratwurzel auszuziehen.

Seine Methode dies durchzuführen knüpft er in seinem lateinischen Werke an das dem Gedächtniss zu Hülfe kommende Wort *AMASIAS* an und lehrt sie mit folgenden Worten (*Ar. int.* fol. 240[v]):

„*Primo.* ***A*** *numero radicum incipe, eumque dimidiatum, loco eius pone dimidium illius, quod in loco suo stet, donec consumata sit tota operatio.*

Secundo. ***M****ultiplica dimidium illud positum quadrate.*

Tertio. ***A****dde uel* ***S****ubtrahe iuxta signi additorum, aut signi subtractorum exigentiam.*

Quarto. ***I****nuenienda est radix quadrata, ex summa additionis, uel ex substractionis tuae relicto.*

Quinto. ***A****dde aut* ***S****ubtrahe iuxta signi aut exempli tui exigentiam.*"

Stifel ersetzt also die von seinen Vorgängern benutzten Gleichnngsformen:

$$x^2 = ax + b \qquad x^2 + ax = b \qquad x^2 + b = ax$$

bezüglich durch die folgenden:

---

*) „Da wirt offt ein vergleychūg gebracht bis in die 8 oder zehēde veränderūg jrer verzeychnissen un̄ zalē. Vn̄ ist ein wunder schöne Philosophische handlung . . . . . ." (Ausg. von Rud. Coss. fol. 151[v]).

$$x^2 = ax + b \qquad x^2 = b - ax \qquad x^2 = ax - b$$

und gibt, in Worten ausgedrückt, als deren Lösungen an:

$$x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} + \frac{a}{2} \quad x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} - \frac{a}{2} \quad x = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}.$$

Er zuerst unter den deutschen Cossisten bricht also den Bann, welcher bis zu seiner Zeit über den quadratischen Gleichungen gewaltet hatte, den Bann der Meinung nämlich, als ob das Minuszeichen nicht in der Gleichung vorkommen dürfe, als ob sie stets zuvor so umgewandelt werden müsste, dass nur positive Vorzeichen in ihr vorhanden sind. Man sollte meinen, dass hierdurch und im Verein hiermit durch die in Deutschland erstmals eben durch Stifel zum Ausdruck gelangte *) Bildung und Verwerthung der negativen Zahlen *(„Numeri ficti infra nihil")* ein kräftiger Anstoss zur Weiterentwickelung gegeben worden sei; dass dem nicht so ist, wird der weitere Bericht zeigen.

Weiter aber ersieht man aus Stifel's Lösung der quadratischen Gleichungen, dass er zwar noch nicht jeder quadratischen Gleichung zwei Werthe zuschreibt, wohl aber, dass er dies wie Rudolff für die Form $x^2 = ax - b$ thut **). Aber wir hörten, dass gelegentlich der Ausrechnung von Beispielen Rudolff zuweilen wohl von seiner richtigen Regel abweicht; Stifel niemals, und auch hierdurch ist es wieder charakterisirt, dass er im Vergleich zu seinen Vorgängern einen höheren Standpunkt erreicht hat.

Zwar ist man versucht, an Stifel's richtiger Auffassung der Doppellösung von $x^2 = ax - b$ zu zweifeln, wenn man in seiner Ausgabe von Rudolff's Coss (fol. 163[v]) liest: „Drumb mag ich nu die gefundne zal võ 10 (als vom halbteyl der zal so das zeychẽ 𝔵 hatte) subtrahiren oder mags zu 10 addiren | Nemlich nach gelegenheyt desz Exempels in welchem solliche vergleychung (zwifeltiger wurzeln) furfallen· Deñ es kom̄en wohl exempla da man beydes thun mag"; dass hierin aber höchstens eine Lässigkeit des Ausdrucks gefunden werden kann, beweist die Stelle seiner um 9 Jahre früher veröffentlichten *Arithmetica integra*, wo er (fol. 243[v]) für die genannte Gleichungsform *(„quoties* 1𝔷 *aequatur numero radicum, posito cum numero absoluto, mediante signo subtractorum")* den unzweideutigen Ausspruch thut: *„tunc semper habebit ipsa aequatio duplicem radicem"*.

Den Fall aber, wenn in der zuletzt genannten Form im Besonderen $b = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ ist, oder wie Stifel sagt *„quoties fuerit absolutus ille numerus*

*) *Arithmetica integra* fol. 249[r] sq. — Uebrigens haben schon die Inder absolut negative Glieder auf einer Seite einer Gleichung verwendet: vgl. z. B. Hankel, Zur Gesch. d. Math. S. 193.

**) Stifel sagt in seiner *Arithm. int.* fol. 243[v] wörtlich: *„Aliis uero casibus, impossibile est unam aequationem continere plures radices quam unam."*

aequalis quadrato dimidii numeri radicum", diesen Fall betrachtet er als Ausnahme, wobei die Gleichung statt zweier Lösungen nur eine habe.

Dass übrigens jede quadratische Gleichung nie mehr als zwei Lösungen haben könne, ist Stifel's ausgesprochene Ansicht *).

Auch denjenigen Gleichungen, welche nach Art der quadratischen lösbar sind, widmet Stifel eine kurze Besprechung, wie ja auch Riese den Fall, „wue drey Zeychen in gleichen mitteln proporcionalistischer ordenung einander vorgleycht" werden, in seiner achten Equation besonders behandelt hatte. Nur kann Stifel jene Gleichungen vermöge seines Namens „Exponenten" kürzer charakterisiren: „*quando fuerint tres partes aequationis, quarum duae cossice sint denominatae, ita ut exponentes denominationum seruent leges progressionis Arithmeticae cum exponente partis non denominatae (qualem constat esse 0) tunc potest fieri extractio radicis quadratae*". So seien für die Gleichung

2 ʒʒ *aequati* 1450 — 8 ʒ die Zeichen ʒʒ · ʒ · 0, die Exponenten der Zeichen aber 4 · 2 · 0; ebenso in:

1 ʒ𝒸𝓁 *aequatus* 5120 — 16 𝒸𝓁 die Zeichen ʒ𝒸𝓁 · 𝒸𝓁 . 0, die Exponenten der Zeichen aber 6 · 3 · 0, und in:

1 ʒβ *aequatum* 7424 — 200β die Zeichen ʒβ · β · 0, die Exponenten der Zeichen aber 10 · 5 · 0.

Die Auflösungsvorschrift stimmt natürlich mit der in Riese's Achter Equation gegebenen überein.

35. In meiner ganzen bis hierher geführten Darstellung der Lehre vom Lösen der Gleichungen war stets nur von den dazu dienlichen Vorschriften die Rede, von den 24 und von den 8 und von den 7 Equationen und von der einzigen Regel, welche Stifel aufstellte; mit welchem Rechte man aber jenen Vorschriften Zutrauen schenkte, ob sie denn in der That stets richtige Resultate gaben, ob sie solche geben mussten, und wie man zur Aufstellung jener Vorschriften gelangt war, diese Fragen blieben bis jetzt unerörtert.

Aber es durfte dies auch füglich geschehen: denn wenn es auch Jedem, der nur einen oberflächlichen Blick in die Geschichte der Mathematik des 15. und 16. Jahrhunderts gethan hat, eine bekannte Thatsache ist und demnach kaum erwähnenswerth scheint, so ist und bleibt es eben doch auffallend, dass jene Zeit bei Behauptungen, welche auf Geometrie Bezug hatten, meistens sofort auch den geometrischen Beweis erbracht wünschte, aber bei allem auf Arithmetik Bezüglichem jenes Wunsches sich durchaus entschlug, dass bis zur Mitte des 16. Jahrhunderts Fragen der vorerwähnten Art nicht oder nur höchst vereinzelt aufgeworfen wurden. Schon

---

*) *Ar. int.* fol. 244ᵛ: „... *plures (radices) autem duabus nulla aequatio habebit*".

mehrfach habe ich erwähnt, und habe es in meiner Geschichte des „Rechnens im 16. Jahrhundert" ausführlich behandelt, und die seitherige Darstellung des gegenwärtigen vierten Abschnittes zeigt es, dass man damals für das ganze Gebiet der Arithmetik und auch der höheren Arithmetik, der Algebra, eine Reihe von Regeln, von Vorschriften aufstellte, welche als richtig angenommen und an Zahlenbeispielen erprobt sich wie die Aufstellungen des Zunfthandwerkes zunftmässig überlieferten, bei welchen kritische Prüfungen und Fragen nach der inneren Berechtigung wie ganz ungehörig ausgeschlossen waren.

Es ist wiederum ein Zeichen des wissenschaftlichen Geistes unseres Stifel, zugleich auch ein ganz hervorragendes Verdienst um die nachfolgende Entwickelung der deutschen Mathematik, ja bei seinem Einflusse selbst der Mathematik überhaupt, dass er sich nicht beruhigen kann bei der einfachen beweislosen Hinnahme der überlieferten Regeln der algebraischen Kunst und dass er sich nicht wie Andere *) bescheidet mit der Klage über mangelnde Beweise: er findet sie selbst und veröffentlicht sie. Denn seinem eigenen Bericht zufolge (Ausg. von Rud. Coss, fol. 171v) hat Stifel die in seiner *Arithmetica* vom Jahre 1544 gegebenen Beweise selbst gefunden, „vermeynet Christoff Rudolff hette von diser sach nichts gewuszt. Ich aber hett ein gut begnügen daran | das er andere ding so getrewlich hett dar gegeben | das ich dadurch zu sollichem demonstriren | vnd anderen dingen mehr | kommen war". Erst „als Johann Newdorffer der Meyster viler berümbter Schrifften | vnd Rechēmeyster zu Nürnberg durch meyn̄ schreiben | an jhn | erfur | was ich furhanden hette (nämlich Rudolff's Coss neu bearbeitet herauszugeben) hat er mir herein in Preussen geschickt | desz Christoffs Rudolffs demonstrationes | Wie er sye selbs mit seyner eygnen hand geschriben | doch mit wenig worten | denn die figuren waren an ihnen selbs klar", und diese mit seinen eigenen früheren übereinstimmenden Demonstrationen hat dann Stifel in seiner Ausgabe von Rudolff's Coss mitgetheilt.

Jene Beweise sind aber beidemal nur im Anschluss an bestimmte Zahlenbeispiele durchgeführt, während ich vorziehe, dieselben hier allgemein zu geben; eine Rückübersetzung in die Rudolff-Stifel'sche Weise ist ja unmittelbar daraus abzulesen.

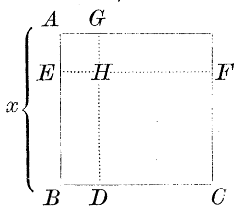
Man hat sich dabei den Werth von 1 ℛ stets als eine Strecke von gewisser vorerst noch unbestimmter Grösse zu denken **), so dass 1 ʒ ($=x^2$)

*) Ausg. v. Rud. Coss, fol. 171v: „Dieweyl eine grosse klag vber den frommen Christoff Rudolff vorzeyten ist gegangen das er seyne Regeln der Cosz nicht hatte demonstriret . . ."

**) So sagt Stifel z. B. in seiner *Ar. int.* fol. 231r: „*Quemadmodum uero sub unitate ista cossice denominata (id est, sub 1* ℛ *comprehenditur tota uniuersitas numerorum indeterminate, cum nullus sit numerus qui quaesitus ex isto sacco copiae non prodeat, ita* . . . ."

eine quadratische Fläche bedeutet; die geometrische Versinnlichung der vier ersten Equationen ist dann leicht durchzuführen. „Nu folgen aber die Künstliche demonstrationes“, die der siebenten, fünften und sechsten Equation.

α) $x^2 = ax + b$. — Es sei hier AB die Grösse der zu findenden Strecke x, so ist das Quadrat über AB, nämlich $AC = x^2$. Soll dieses aus zwei Theilen (nämlich aus ax und b) zusammengesetzt sein, so mache man zunächst $BD = AE = \frac{a}{2}$, so ist das Rechteck $AD =$ Rechteck $AF = \frac{a}{2} \cdot x$ und die Summe beider Rechtecke wäre $= ax$. Wird also das Rechteck AD und noch ein Flächenstück $= AF$, d. h. das Rechteck GF und vom dann zurückbleibenden Quadrate HC noch ein Stück $= AH$ weggenommen, so wird der Rest $= b$ sein. Deshalb ist das Quadrat $HC = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b$ und dessen Seite HD oder EB ist $= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}$, so dass die gesuchte Seite $AB = x = EB + AE = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} + \frac{a}{2}$ wird.



β) $x^2 + ax = b$. — Wird hier $AB = x$ gewählt, also $AC = x^2$, so wird, wenn man noch $AE = CD = \frac{a}{2}$ anfügt, die Fläche $AF = CG = \frac{a}{2} \cdot x$ und das Sechseck $BEFIGDB = x^2 + ax$ oder $= b$. Wird also noch das Quadrat $FG = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ zugefügt, so entsteht das Quadrat $BH = b + \left(\frac{a}{2}\right)^2$; demnach wird dessen Seite $EB = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}$, folglich $AB = x = EB - EA = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} - \frac{a}{2}$.

γ) $x^2 + b = ax$. — Wird hier $AB = x$, also $AC = x^2$ gewählt und will man wiederum ax als $2 \cdot \frac{a}{2} \cdot x$ darstellen, so muss man $\frac{a}{2} > \frac{x}{2}$ wählen, da ja der Anblick der Gleichung lehrt, dass $ax > xx$ sein soll. Es sei demnach $AE = BD = \frac{a}{2}$, so ist $AF = \frac{a}{2} \cdot x = BG$, also $ax = AF + BG = AF + BH + AH = AF + BH + HL$, wenn $HM = AE$ gemacht wird. Somit übertrifft ax das Quadrat AC ($= x^2$) in der That um den

Gnomon $FCDML$, so dass dieser $= b$ sein muss. Dann aber ist das Quadrat $HC = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b$, also $HD = EB = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$, daher muss $AB = x = AE + EB = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$ sein.

Dass aber zweitens x auch $= \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$, d. h. $= HM - HD = DM$ sein könne, beweist sich leicht: dann ist nämlich $CL = x^2$, und hierzu $b = FCDML$ addirt gibt $FL + DL = \frac{a}{2} \cdot x + \frac{a}{2} \cdot x = ax$, was in der That die gegebene Gleichung erfüllt.

36. Gleichungen mit mehreren Unbekannten. — Wie langsam die Fortschritte in der richtigen und systematischen Behandlung der Gleichungen zweiten Grades gewesen sind, hat die seitherige Darstellung zur Genüge gezeigt, und es wird sich dies später noch mehr herausstellen, wenn von den auch nach Stifel noch vorkommenden Rückfällen in die frühere Behandlung die Rede sein wird. Dieselbe Wahrnehmung macht man aber auch, wenn man dem Verfahren nachspürt, welches zur Lösung von Gleichungen mit mehreren Unbekannten angewandt wurde.

Von den ältesten unserer Cossisten noch todtgeschwiegen *), finden sich dieselben, wie wenigstens meine Nachforschungen lehren, zuerst bei Rudolff, aber freilich nicht, wie es heute üblich, in besonderem Kapitel, sondern nur gelegentlich der Besprechung von besonderen Beispielen. Nachdem er nämlich 187 Aufgaben, welche zur ersten Regel der Coss gehören, gelöst hat, kommt er auch **) auf die „Regula quantitatis" zu sprechen, d. h. auf das Verfahren, welches einzuschlagen, wenn mehr als eine Unbekannte zur Lösung einer Aufgabe erforderlich sei. Rudolff sagt hierüber: „Dise regl lernt wie man sich halten sol bey etlichen exempeln | so über den gesetzten radix (wie dañ der brauch ist) auch andere position oder satzungen erfordern. Dañ so 1 𝓍 einem ding gesetzt oder zugebē ist | mag er in dem selbigen procesz (confusion oder irrsal zu vermeiden) keinem andern ding zugestelt werden. Laut also.

„Wañ nach setzung 1 𝓍 | ein ding vorhanden ist welchem du (ausz

*) Die *Summa* des Italieners Luca del Borgo (1494) erwähnt im 6. Tractat der 8. Distinction (fol. 148v) als „*Quartum essentiale notandum*" die Benützung einer zweiten Unbekannten, nachdem die erste durch 1*co* bezeichnet sei; „*ma laltra sira detta semplicimente . 1 . quantita . E dipegnise cosi. 1. qa . . . . e questa tal qa sorda ne li libri pratichi antichi e stata chiamata cosa seconda. Ma li moderni la nominano qa simpliciter*".

**) Rudolff's Coss, fol. 𝔓. VIv; Ausgabe von Stifel fol. 307r.

vorgethaner vnderweysung) mit der position nit magst zukommē. Setz dasselbig ding sei 1 quantitet | vnd procedir nach laut der auffgab | so lang bisz zwo ordnung der zalen einander gleich werden . . . Ist weiter etwas vorhanden. Nim war der vorigen satzungen | gib dem selbigen ding 1 quantitet | vnd procedir nach vorgemelter instruction."

Um zu zeigen, wie Rudolff veranlasst ist „1 quantitet" einzuführen, seien von seinen Beispielen zwei ausgewählt, zunächst das 188ste. Dasselbe legt die unbestimmte Aufgabe vor: „Diuidir 1 ϰ + 14 φ in zwen teil. Wañ ich vom andern teil subtrahier 8 | gibs dem ersten | das das collect 2 mer dañ 3 mal souil anzeige als dz rest des andern teils". Hier beginnt die Lösung sofort wie folgt: „Setz der erst teil sei 1 quantitet | so musz der ander sein 1 ϰ + 14 φ — 1 quantitet. dauon subtrahir 8 | Rest: 1 ϰ + 6 φ — 1 quantitet u. s. w."

Als zweites Beispiel sei das 191ste Exemplum Rudolff's angeführt. Darin heisst die Aufgabe: „Drei haben gelt | kauffen ein rosz zu 34 flo: Begert der erst vom andern vñ dritten $\frac{1}{2}$ irs gelts | zu dem das er hatt. Der ander wil haben $\frac{1}{3}$ alles gelts seiner gesellen. Der drit $\frac{1}{4}$ ires gelts zu dem seinen | so hab je einer dz rosz zu zalen. Ist die frag wieuil jeder gelts hab?"

Zur Lösung setzt Rudolff den Besitz des ersten = 1 ϰ, so mangeln ihm = 34 φ — 1 ϰ, also haben die beiden andern 68 φ — 2 ϰ, alle drei haben 68 φ — 1 ϰ. „Nun setz der ander hab 1 quantitet | so volgen dem ersten vnd dritten 68 φ — 1 ϰ — 1 quantitet . . . .; dann findet sich 1 quantitet gleich $\frac{1}{2}$ ϰ + 17 φ. Indem dann Rudolff fortfährt: „Weiter | setz dem dritten 1 quantitet | so volgen dem ersten vnd andern 68 φ — 1 ϰ — 1 quant | . . . ", findet er schliesslich als Antheil des dritten = $\frac{1}{3}$ ϰ + 22$\frac{2}{3}$ φ und hieraus die Gleichung:

1$\frac{5}{6}$ ϰ + 39$\frac{2}{3}$ φ gleich 68 φ — 1 ϰ,

woraus sich 1 ϰ gleich 10 φ ergibt.

Recht deutlich zeigt das letztere Beispiel, wie man sich, auch wenn die gleichzeitige Benützung mehrerer Unbekannten nahe genug lag, dennoch mit nur einer einzigen behalf; erst Stifel fand es zweckdienlich, gleichzeitig mehrere Unbekannte in die Rechnung einzuführen und sie dementsprechend durch besondere Zeichen anzudeuten, „*ut in operatione exempli radices non confundantur, nec una pro altera recipiatur.*" Er bezeichnet (*Ar. int.* fol. 251v) die erste nach 1 ϰ noch zu benützende Unbekannte durch 1 *A*, die nächsten durch 1 *B*, 1 *C*, 1 *D*, ... und will, dass unter 1 *A* verstanden werde „*nihil aliud quam* 1 ϰ *secunda, distincta ab* 1 ϰ *prima seu prius posita*", und er fasst die weiteren Unbekannten unter einem Namen als *secundae radices* zusammen. Stifel gibt aber sofort auch Aufklärung über die bei gleichzeitigem Vorkommen von 1 *A*, 1 *B*, . . . nothwendig werdenden Bezeichnungen: das Produkt von 2 ϰ in 4 *A* z. B.

heisst $8\,\mathfrak{ze}A$, das Quadrat von $1\,A$ ist $1\,A_{\mathfrak{z}}$, das Produkt von $2\,\mathfrak{ce}$ in $4\,A_{\mathfrak{z}}$ heisst $8\,\mathfrak{ce}A_{\mathfrak{z}}$, das Produkt von $1\,A\mathfrak{ce}$ in $1\,\mathfrak{z}A$ heisst $1\,\mathfrak{z}A_{\mathfrak{zz}}$ (nach unserer heutigen Bezeichnung $y^3 \cdot x^2 y = x^2 y^4$) u. s. w.

37. Anwendung auf Geometrie. — Da das Verfahren bei der Verwerthung dieser „zweiten Wurzeln“ mit unserm heutigen durchaus übereinstimmt, so könnte ich die Anführung von Beispielen unterlassen; gleichwohl will ich wenigstens einem einzigen Raum verstatten, da ich dabei zugleich auch das Nöthigste über die Anwendung der Coss auf die Geometrie besprechen möchte.

Dass sich die Spuren einer solchen Anwendung in der Mitte des 15. Jahrhunderts zeigen, haben wir gelegentlich der Erwähnung von Regiomontan kennen gelernt; wir würden aber glauben müssen, sie sei in Deutschland fast ein volles Jahrhundert vergessen worden oder wenigstens unbenützt geblieben, wenn wir nicht im dritten, geometrischen Theile von Widman's Rechenbuch wieder einem freilich schwachen Versuche einer Verwerthung der Algebra für die Geometrie begegnen würden. Nach der Bestimmung des einem Kreise eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks aus gegebenem Radius, nach der Berechnung des einem rechtwinkeligen Dreieck eingeschriebenen Kreises und ähnlichen einfachen Aufgaben kommt Widman (fol. 215^r) auch an die Aufgabe, „die Seite des einem Halbkreise eingeschriebenen Quadrates zu finden“: er meint nun, man solle die gesuchte Seite als „eyn cossa seczē“, das Quadrat in den andern Halbkreis verlängern, so sei die Seite des Rechtecks „zweyer cossa langk. mltiplicir 1 ℞· durch 1 ℞ wirt 1 zēss vn̄ multiplicir 2 ℞· durch 2 ℞· werdē 4 zēss addirsz zusammen wern̄ 5 ℞ . . . Un̄ ist oben berurt das der dyameter der rotūd sey 12 darumb quadrir 12 werden 144 dz teyl durch zēss als 5 so kumē $28\frac{4}{5}$ vnd szo uil ist . . . eyn seyten . . .“.

So eifrig wie um die gleiche Zeit Pacioli in Italien hat sich in Deutschland Niemand um die Verwerthung der Algebra für Geometrie angenommen. Während jener z. B. in einem besonderen Abschnitte seiner Geometrie nicht weniger denn 100 geometrische Aufgaben algebraisch löst (fol. 52^v—68^v) und zuvor auch schon die Verwendungsfähigkeit der algebraischen Regeln zu diesem Zwecke hervorhebt („. . . *queste regole si possano infinite questioni soluere: o sieno arithmetice o sieno geometrice*“, fol. 147^v), gibt Riese und ebenso auch Rudolff nicht ein einziges Beispiel der Art, und letzterer verlegt auch nach seinem eigenen Ausspruche die Bedeutung der Algebra (fol. H VI^v) in die Lösung der „exempln von zal suchen und kauffmans hendln“. Einen richtigeren Blick zeigt auch in dieser Beziehung Stifel, da er hervorhebt (*Ar. int.* fol. 229^r), „*quantum ornatus et gratiae conferat Geometriae haec Gebri regula prorsus philosophica*“; aber sein Werk ist ja wesentlich der Arithmetik gewidmet, und so ist wohl begreiflich, dass wir in demselben nicht mehr Geometrisches finden, als in der That der

Fall ist. Stifel behandelt u. A. im zweiten Buche nach Ptolemäus die Aufgabe, aus dem gegebenen Durchmesser eines Kreises die Grösse der Seite des eingeschriebenen regelmässigen Zehn-, Sechs-, Fünf-, Vier-, Acht- und Dreieckes zu finden, aber es ist ihm dabei wesentlich um die möglichst angenäherte Auswerthung der betreffenden Irrationalen und darum zu thun, zu zeigen, wie Ptolemäus wohl zu seinen Werthen gekommen. Im dritten Buche (fol. 286 ff.) kommt er dann wieder auf verwandte Aufgaben zurück und behandelt nachher auch eine, bei welcher er von seinen „zweiten Wurzeln" Gebrauch macht und die ich hier der Probe wegen mittheilen will. Es sei — so lautet die Aufgabe (fol. 300^{v}) — ein Rechteck mit den Seiten 12 und 14 gegeben, und es werde durch eine Senkrechte zu den grösseren Seiten so in zwei Rechtecke getheilt, dass die Summe von deren Diagonalen doppelt so gross als die grössere Seite, also $= 28$ sei. Wie hat die Theilung zu geschehen? Die getheilte Seite bestehe aus den Stücken $1\,\varkappa$ und $14 - 1\,\varkappa$ und von den betreffenden Diagonalen sei die erstere $1\,A$, also die zweite $28 - 1\,A$; dann muss

$$1\,\mathfrak{z} + 144 = 1\,A\,\mathfrak{z}$$

und ebenso $\quad 340 - 28\,\varkappa + 1\,\mathfrak{z} = 784 - 56\,A + 1\,A\,\mathfrak{z}\quad$ sein,

folglich $\quad 1\,A\,\mathfrak{z} = 1\,\mathfrak{z} + 144 = 56\,A + 1\,\mathfrak{z} - 28\,\varkappa - 444\,,$

woraus $\quad 56\,A = 28\,\varkappa + 588\,,\quad$ somit $\quad 1\,A = \frac{1\,\varkappa + 21}{2}\,.\quad$ Die Einsetzung dieses Werthes in die erste der vorigen Gleichungen gibt dann $\varkappa = 5$.

38. Gleichungen von höherem als dem zweiten Grade. — Der Anblick der zu Riese's Zeiten gebräuchlichen und von ihm überlieferten „24 Regeln", die oben (S. 65 ff.) angeführt wurden, und noch allgemeiner der Wortlaut von Rudolff's „acht Equacionen" zeigt unmittelbar, dass unsere alten Cossisten, ihren Vorbildern entsprechend, sich nicht auf solche Gleichungen beschränkten, welche nur die erste und zweite Potenz der Unbekannten enthalten, sondern dass sie auch höhere Gleichungen in Betracht zogen, jedoch nur solche, welche nach Art derer des ersten oder zweiten Grades sich lösen liessen. Und Grammateus und Riese haben auch deutlich die Bedingung dafür ausgesprochen, dass letzteres möglich sei: so unterscheidet Riese z. B. den Fall, wo „zwey Zeichen ader zwu benenung proporcionalistischer ordenung ane (= ohne) mittel einander nachuolgent vorgleicht werdenn" und den Fall, wo „mittel darzwischen", und er betont, dass im letzteren Falle „das mittelste Zeichen von eynem gleich soweit sam vom anderenn stehen sol".

Wie aber zu verfahren sei, wenn die zuletzt angegebene Bedingung nicht erfüllt ist, hat vor dem in genanntem Punkt aus fremder Quelle schöpfenden Stifel keiner der deutschen Cossisten gelehrt: es war den Italienern des 16. Jahrhunderts vorbehalten, die Kluft, welche stets die

Gleichungen zweiten und dritten Grades getrennt hatte, zu überbrücken und gerade die Lösung der cubischen und biquadratischen Gleichungen bildet ja bekanntlich den Glanzpunkt der italienischen Algebra des 16. Jahrhunderts.

Dass den ersten deutschen Cossisten Gleichungen der zuletzt genannten Art nicht vorgekommen seien, wird man wohl nicht behaupten dürfen; aber sie haben derselben keine Erwähnung gethan, da sie das Mittel zu deren Lösung nicht anzugeben verstanden. Erst Rudolff kommt darauf zu sprechen, aber freilich eben nur, um „anzvzeygen | wie noch vil rechnung vnd Exempla zu finden seyen | die seynen 8 Regeln zu hoch seyen | Vnd durch sie nicht mügen erlangt werden“.

Er stellt die eine Aufgabe: „Ich hab 10 diuidirt in zwen ungleyche teyl. weñ ich den kleynern teyl in sich quadrate multiplicir | vñ das quadrat multiplicir in den grössern teyl | so kommen 63. Welche teyl sinds?“ — und die andere: „Es sind etliche Burger | hat yeder so vil knecht als der Burger sind. Gibt yeder burger yedem knecht halb so vil fl (fur jarlohn) als er knecht hat | weniger $\frac{1}{2}$ fl. Thut aller knecht Jarlohn zusamen 605 fl. Wie vil sind der Burger?“ — diese Aufgaben führen bezw. auf die Gleichungen:

$$10\,x^2 - x^3 = 63\,,$$
$$\frac{x^3 - x^2}{2} = 605$$

und Rudolff fügt freilich ihre Lösungen ($x = 3$ und $x = 11$) bei, kennt aber natürlich kein allgemeines Verfahren zu deren Auffindung.

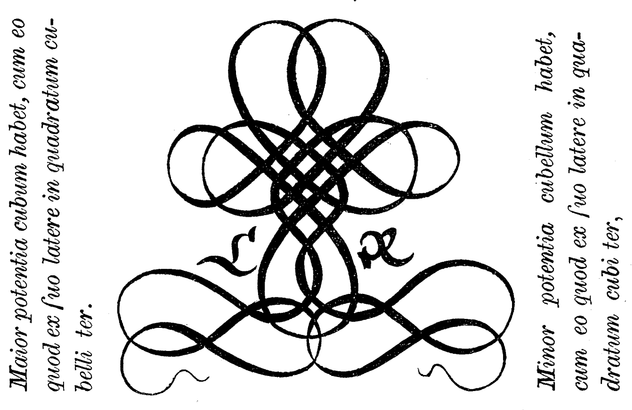
Immerhin zeigt der betreffende Abschnitt seines Buches, wie auch schon ein Brief Regiomontan's aus dem Jahre 1471, dass man wie in Italien, so auch in Deutschland lebhaftes Interesse an der Ausdehnung der Lehren von der Coss hatte, und dass man, wenn auch ohne Erfolg, sich eifrigst bemühte, neue Gebiete zu erwerben. Deutlich genug zählt Rudolff selbst als nächst zu eroberndes das von den cubischen Gleichungen auf, indem er die letzte Seite seines Buches mit der Darstellung eines Würfels schmückt (vgl. folg. S.), der auf einem Untergestelle ruhend die dritte Potenz von $(3 + \sqrt{2})$ geometrisch repräsentirt und als grosses Fragezeichen gewissermassen Jedermann auffordert, mitzuhelfen an der Auffindung einer allgemeinen Methode zur Ausziehung der Cubikwurzel aus binomischen Ausdrücken wie

$$(45 + \sqrt{1682})\,,$$

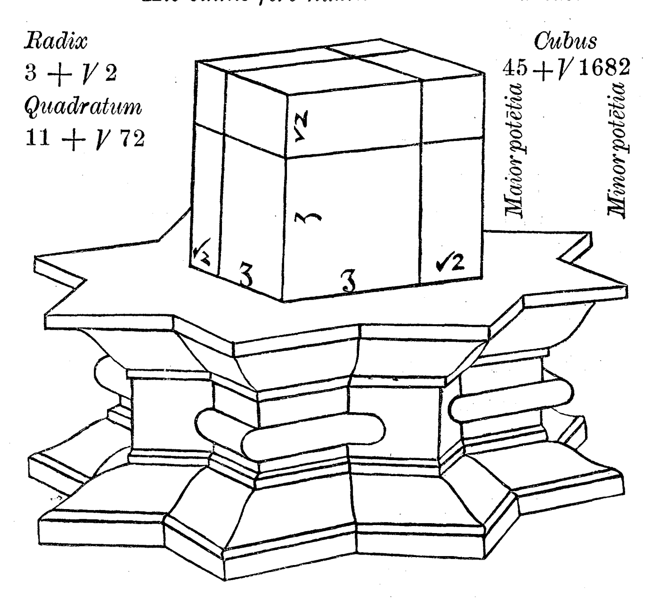
d. h., wie wir sogleich sehen werden, mitzuhelfen an der allgemeinen Lösung cubischer Gleichungen.

Denn eine solche war zwar in Italien vielleicht seit dem Anfang des Jahrhunderts, jedenfalls vor 1526 schon entdeckt, aber keineswegs in weiteren Kreisen bekannt; sie wurde dies erst durch ein Werk des berühmten Cardanus, welches unter dem Titel „*Artis magnae siue de regulis*

algebraicis liber unus" zu Nürnberg, gleichzeitig mit Stifel's *Arithmetica integra,* gedruckt wurde und im Jahre 1545 die Presse verliess. Aus diesem kam auch den deutschen Cossisten die Kunde zu von der Erweiterung, welche die Algebra erfahren hatte, und der Ueberbringer der Kunde



Hic binomialis radicum extractio
Hic omnis fere numerorum irrationalitas.



und derjenige, welcher zuerst, ja selbst noch vor Veröffentlichung von Cardanus' Werk auf dessen Bedeutung hinwies und eifrigst zu dessen Studium auffordert*), ist wiederum unser Michael Stifel.

---

*) *Arithm. integra* (veröffentlicht 1544; die Vorrede zum 3. Buch datirt vom 2. Januar 1543) fol. 306ʳ: „*Appendix, ad Mecoenatem suum dominum Adolphum*

39. Das dreizehnte und letzte Kapitel des der Algebra gewidmeten dritten Buches seiner *Arithmetica integra*, sowie ein Anhang behandeln Aufgaben, welche auf höhere Gleichungen führen, die aber nach Cardanus' Vorgang durch Umänderung und Wurzelausziehung auf niedrigere zurückgebracht werden können. So folge aus der in unsern heutigen Zeichen angeschriebenen Gleichung:

$$13x^2 = x^4 + 2x^3 + 2x + 1$$

durch beiderseitige Addition von $3x^2$ die Gleichung:

$$16x^2 = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1\,,$$

welche radicirt zu

$$4x = x^2 + x + 1\,,$$

und damit zum Werthe von x führe; so folge aus:

$$356x^4 = x^8 + 2x^7 + 3x^6 + 4x^5 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

in gleicher Weise:

$$361x^4 = x^8 + 2x^7 + 3x^6 + 4x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1\,,$$

und werde hier beiderseits die zweite Wurzel genommen, so ergebe sich die Gleichung:

$$19x^2 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\,,$$

welche wiederum durch Ergänzung zu der folgenden führe:

$$20\tfrac{1}{4}x^2 = x^4 + x^3 + \tfrac{9}{4}x^2 + x + 1\,,$$

deren Quadratwurzel:

$$\tfrac{9}{2}x = x^2 + \tfrac{1}{2}x + 1$$

schliesslich leicht zu dem richtigen Werthe von x hingeleite.

Ebenso gewinne Cardanus aus der Gleichung:

$$25 + 4x^2 + 2x^3 = 16x + 55$$

durch beiderseitige Zufügung von $2x^2 + 10x + 5$ die folgende:

$$2x^3 + 6x^2 + 10x + 30 = 2x^2 + 26x + 60\,,$$

und nun durch eine auf beiden Seiten durchgeführte Division mit $(2x + 6)$ die folgende Gleichung:

$$x^2 + 5 = x + 10\,,$$

deren Lösung unmittelbar zu finden.

Glauburck Francofordiensem patricium, de Arithmetica Hieronymi Cardani. — Arithmetica Hieronymi Cardani talis est, Mi domine Adolphe, ut se se tibi satis abunde sit commendatura, dum eam legeris. Habet enim multa rara, quae alibi nusquam legimus. . . Oro te, amore artium, quas tantopere colis, quatenus eam Arithmeticam totam legas a principio diligentissime et assuescas, signa eius, quibus ipse utitur, transfigurare ad signa nostra. Quamuis enim signa quibus ipse utitur, uetustiora sint nostris, tamen nostra signa (meo quidem iudicio) illis sunt commodiora . . .“

Eine solche, von der in Deutschland gewohnten so sehr verschiedene Behandlung der Gleichungen mochte kaum Jemand angenehmer berühren als eben Stifel, dessen ganze Geistesrichtung, wie wir wiederholt schon sehen konnten, ungemein dahin neigte, wo es galt, Eigenschaften und gegenseitige Beziehungen der vorkommenden Zahlen aufzuspüren, passende Umänderungen einzuführen, geschickte Kunstgriffe anzubringen. Man merkt es seiner im Vergleich zur *Arithm. int.* um 9 Jahre späteren Ausgabe von Rudolff's Coss wohl an, welchen Einfluss jene Cardanische Behandlung der Gleichungen auf Stifel gewann, wie vielfach seine Thätigkeit inzwischen dem Ausbau des bezeichneten Feldes sich zugewandt hatte.

Nachdem er nämlich in jener Ausgabe Rudolff's Beispiele sämmtlich abgehandelt hat, fügt er einen eigenen „Anhang der Exempeln | Mich. Stif." bei (fol. 459ᵛ — 475), von welchen er sofort erklärt, dass „die werden einer andern art seyn | vn̄ vil andere operationes foddern | den̄ desz Christophori exēpla (oben gesetzt) foddern. Den̄ in den obern exempeln Christophori setzt mā alwegē 1 ♃ · vn̄ zu zeytē auch 1 *A* · vn̄ zu zeytē auch 1 *B* · vn̄ gibt die auffgab allenthalben die handlung oder operation. Aber in disen meynē nachvolgēdē exēpeln würdestu die sach (nach dem auffgebē) nicht hinauszfüren | wie sollichs ein jeder | der es versuchen will | von ihm selbs auffs best sehen wirt." In der That legt z. B. seine Behandlung des Gleichungensystemes, das wir heute wie folgt schreiben (fol. 471):

$$(x - y)\ (x^2 + y^2) = 675$$
$$(x + y)\ (x^2 - y^2) = 351$$

Zeugniss ab für die Richtigkeit seiner Aussage. Und auch die Art, in welcher er nun, durch Errathen freilich mehr als durch wirkliches Lösen, die Resultate der im vorigen § (S. 88) angeführten Gleichungen findet (fol. 477 f.), zeigt seine Gewandtheit in derartigen Dingen: so bildet er z. B. aus der zweiten: $\frac{x^3 - x^2}{2} = 605$ die Gleichung: $x^3 = x^2 + 1210$, und die Beobachtung, dass $121 = 11^2$, dass also die Gleichung heisst: $x^3 = x^2 + 11^2 \cdot 10$, führt ihn dazu, $x = 11$ zu erkennen, da dann x^2 rechts als Faktor ausgesetzt werden kann. „Sollichs sehe ich hie an disem Exemplo. in einem andern muss ich mich anders vmb sehen."

40. Aus Cardan's Lösungen hatte Stifel erkannt und seine eigenen Studien hatten es ihm bestätigt, „wie die gröste macht der Cosz sey gelegen an allerley extrahiren der wurtzeln", wobei freilich nicht nur an den uns geläufigen Sinn des Wurzelausziehens, sondern auch daran zu denken ist, dass Stifel unter jenem Namen die ganze Arbeit zusammenfasst, welche dazu führt, aus einer Gleichung wie z. B. $x^2 = 6x + 7$ den Werth von x zu finden. Immerhin hat sich Stifel, nach Apian's Vorgang*), mit Erfolg

*) S. mein „Rechnen im 16. Jahrhundert" S. 77.

Mühe gegeben, das eigentliche Ausziehen höherer Wurzeln weiterzuführen (s. oben S. 42 f.) und hat in Ausführung dieses Bestrebens und durch seine Beschäftigung mit den Irrationalen veranlasst, nicht wenig freilich auch gereizt durch die S. 88 erwähnte Aufforderung Rudolff's, auch der Ausziehung der Cubikwurzel aus irrationalen binomischen Ausdrücken mit Eifer sich hingegeben: die letzten Seiten seiner Ausgabe von Rudolff's Coss enthalten die betreffende Anleitung und dabei auch, soweit ich finde zum erstenmal in einem deutschen Buche, die Lösung der cubischen Gleichungen.

Schon früher, in seiner *Arithmetica integra* (fol. 130), hatte ja Stifel, wie wir sahen (S. 56), versucht, die Cubikwurzel aus einem irrationalen Binome auszuziehen. Er sagte sich, wenn $A + B$ der Cubus eines Ausdruckes $(x + y)$, also wenn

$$A + B = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3,$$

und wenn dabei zunächst B und y die irrationalen Bestandtheile seien, dass dann

$$A = x^3 \quad + 3xy^2$$
$$B = 3x^2y + y^3$$

gesetzt werden müsse; weil aber die Grössen x^3, x^2y, xy^2, y^3 in stetiger Proportion, so komme Alles darauf an, A sowohl als B je in zwei Theile zu zerlegen, A etwa in $3u$ und $A - 3u$, ebenso B etwa in $3v$ und $B - 3v$, von der Art, dass die folgenden stetigen Proportionen gelten:

$$u : v = v : (A - 3u),$$
$$v : u = u : (B - 3v).$$

Insoweit hatte Stifel die Aufgabe ganz richtig dargelegt; wie aber die jene Zerlegung liefernde Vorschrift, wie die Regel laute, welche *„expediet totum negocium de extractione cubica binomiorum et residuorum"*, das gab Stifel nicht an und aus dem guten Grunde, weil die Auflösung jener Gleichungen in u und v zu einer cubischen Gleichung führt, welche Stifel noch nicht zu lösen verstand.

Erst als er die neue Leistung der Italiener kennen gelernt, führt er seine Aufgabe zu Ende durch, freilich ohne die eigentliche Lösung cubischer Gleichungen in Anspruch zu nehmen.

Aus den vorigen Gleichungen für x und y, nämlich:

$$A = x^3 + 3xy^2,$$
$$B = 3x^2y + y^3,$$

leitet Stifel die folgende ab:

$$A^2 - B^2 = (x^2 - y^2)^3 \quad , \qquad \text{woraus:}$$

$$x^2 - y^2 = \sqrt[3]{A^2 - B^2} \quad \text{oder} \quad x^2 = \sqrt[3]{A^2 - B^2} + y^2.$$

Es wird also x bekannt sein, wenn $\sqrt[3]{A^2 - B^2}$ ausgerechnet ist und wenn man eine gewisse Zahl y^2 finden kann, welche zu $\sqrt[3]{A^2 - B^2}$ addirt als

Summe eine Quadratzahl ($= x^2$) gibt; dabei ist freilich y^2 nicht beliebig, sondern wegen

$$B^2 = (3x^2 + y^2)^2 \cdot y^2$$

muss y^2 so gewählt werden, dass ein Dividiren damit in B^2 ein vollständiges Quadrat erscheinen lässt.

So versteht *sich die Vorschrift*, welche Stifel gibt (*fol.* 484[r]) im Anschluss an die Aufgabe, aus $45 + \sqrt{1682}$ die Cubikwurzel auszuziehen. Dieselbe lautet:

„Subtrahir die quadrata der zweyer teyl von einād̄er (als 1682 von 2025) „Vn̄ auss dem relict extrahir radicem cubicā (als auss 343 kōpt 7) vnd zu „d' cubic wurtzel such ein zal | die zu jhr addiret gebe ein quadratzal (als „zu 7 addir 2 facit 9) doch also das die selbige addirete zal | müge diui-„dirē das quadrat dess surdischē teyls das ein quadrat zal kōme (als 2 diui-„diret 1682 also) so ist den̄ radix quadrata dess aggregats | der erste teyl „der cubic wurtzel. (als $\sqrt{9}$ das ist 3) vnd radix quadrata der gefundenen „zal ist der kleiner teyl. (als $\sqrt{2}$) ist also die gantze radix gefunden.“

In fast gleichlautender Weise gibt Stifel dann auch noch eine zweite und eine dritte Regel zum gleichen Zwecke für den Fall, dass der grössere Theil des binomischen Ausdruckes und für den, dass beide Theile irrational sind (z. B. Cubikwurzel aus $\sqrt{18252} \pm 135$ und aus $\sqrt{1350} \pm \sqrt{1323}$).

41. Wir sahen vorhin, dass Stifel zur Ausziehung der Cubikwurzel die eigentliche Lösung der cubischen Gleichungen nicht in Anspruch nimmt; keineswegs aber geht er an dem Gegenstande vorüber, ohne auf den innigen Zusammenhang der beiden Aufgaben aufmerksam zu machen.

Denn nachdem er, freilich nicht in schriftlicher Rechnung, die vorhin benützte Gleichung

$$x^2 - y^2 = \sqrt[3]{A^2 - B^2}$$

abgeleitet, fährt er weiter: „Ist denn nu der grösser Cubell also signirt 1 ꝙ vnd ich will haben das kleyner medium proportionale | so subtrahir ich die gefundne cubic wurtzel | von 1 ꝙ. Doch das ich die selbige wurtzel zu vor multiplicir mit 1 𝔵“ — d. h. er bildet:

$$y^2 = x^2 - \sqrt[3]{A^2 - B^2},$$

und hieraus: $$xy^2 = x^3 - x \cdot \sqrt[3]{A^2 - B^2};$$

und indem er beachtet, dass $3xy^2$ zu x^3 addirt den bekannten Werth A ergibt, so kommt er zu der cubischen Gleichung:

$$4x^3 = A + 3 \cdot \sqrt[3]{A^2 - B^2} \cdot x.$$

Denn hierauf beziehen sich seine Worte: „Hierauss kanstu nu leychtlich sehen einen feynen grund zu resoluiren 1 𝔵. in sollichen vergleichungen 4 ꝙ gleych 45 + 21 𝔵. Item 4 ꝙ gleych $\sqrt{1682}$ — 21 𝔵. Vnd der gleychen.“

Und hier schliesst sich nun unmittelbar die nach eigener Angabe dem

Werke des Cardanus entnommene Vorschrift zur Lösung cubischer Gleichungen an, welche ich mit Stifel's Worten hier beifüge:

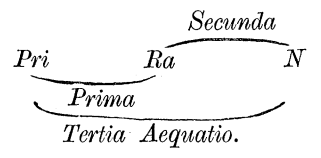
„Den dritten teyl der zal dess zeychens 𝓍 · neme ich | vnd lass das „zeychen fallen | Vnd cubir ihn als hie auss 21 𝓍 neme ich den dritten „teyl | (ohn das zeychen 𝓍) wirt 7 Seyn cubus ist 343 so ich nu find das „zeychen + so subtrahir ich den cubum vom quadrat der ledigen zal. Find „ich aber das zeychen — · so addir ich den cubum zum quadrat der le„digen zal. Darnach nem ich die quadrat wurtzel (es sey auss dem ag„gregat oder auss dem relict) addir sie zur ledigen zal | Vnd so den̄ kompt „ein Binomium auss sollichem addiren | so extrahir ich drauss radicem cu„bicam. Vnd so den̄ + gesetzt war | so ist der grösser teyl sollicher „cubic wurtzel | der werdt 1 𝓍. Aber so das zeychen — gefunden wirt | „so ist der kleyner teyl | sollicher cubic wurtzel | der werdt 1 𝓍."

Und nun macht Stifel noch zum Schlusse darauf aufmerksam (fol. 482ᵛ), „wie so gar weytleufftig sey ein yede Coss gegen yhrer vorgehenden Coss in allerley stucken so in den Cossen gehādelt werden". Denn während die Quadratcoss im Wesentlichen nur drei Arten von Gleichungen habe (welche die 5., 6. und 7. Regel Rudolff's behandel̄n), so enthalte die Cubiccoss schon „dreyzehenerley vergleychungen", welche dann Stifel durch Beispiele verdeutlicht.

„Hie mit will ich dir (lieber leser) den grund vnd anfang der Cubic„cosz gezeygt haben."

42. Bevor wir nun dazu übergehen, die weitere Ausbreitung der Cubikcoss in Deutschland darzulegen, ist es angezeigt, zuvor noch die nach Stifel's Zeiten übliche Behandlung der Quadratcoss etwas zu betrachten. Da ist nun zuerst zu sagen, dass, so sehr auch Stifel's Einfluss im ganzen Gebiete der Algebra sich bemerklich machte, gleichwohl seine Betrachtung und Lösung der quadratischen Gleichungen nicht überall unmittelbar angenommen wurde.

So unterscheidet Scheubel z. B. drei Formen der Gleichungen: *Aequatio prima, secunda, tertia,* unter welchen er bezüglich die auf den ersten Grad rückführbaren, die vom zweiten Grade und die von höherem als zweiten Grade, welche auf quadratische rückführbar sind, zusammenfasst. Die zur *Aequatio secunda* gehörigen Einzelfälle trennt Scheubel in altherkömmlicher Weise und stellt dies figürlich so dar:



Bei dem *Canon huius aequationis tertius,* nämlich: *Pri + N aequales ra.*, d. h. $x^2 + b = ax$, zeigt er zwar, dass zwei Lösungen auftreten können,

ist aber, wie Stifel's Vorgänger, nicht der Ansicht*), dass stets beide zulässig seien.

Es ist in Bezug hierauf folgendes (auch von Ramus und Salignac in gleichem Sinn verwendete) Beispiel bemerkenswerth: „Zwei haben Seide, der erste 40, der zweite 90 Ellen. Der erste gibt für 1 Krone $\frac{1}{3}$ Elle mehr als der zweite, und beide zusammen lösen 42 Kronen. Wie viel gibt jeder?"

Setzt man hier, der zweite gebe x Ellen für 1 Krone, der erste also $(x + \frac{1}{3})$, so kommt man zur Gleichung: $21x^2 = 58x + 15$, und diese, als Scheubel's zweitem Canon zugehörig, kann bei ihm nur eine Auflösung haben, nämlich $x = 3$ (während ausserdem noch $x = -\frac{5}{21}$ ist).

Setzt man aber, der erste gebe x Ellen, also der zweite $x - \frac{1}{3}$, so findet sich die Gleichung: $63x^2 + 20 = 216x$, und für diese, als dem dritten Canon zugehörig, müsste Scheubel eigentlich die beiden Lösungen $\frac{10}{3}$ und $\frac{2}{21}$ zulassen, wenn man seine unten citirten Worte dahin verstehen wollte, dass er wirklich stets zwei Auflösungen als richtig geltend gemeint habe; aber er sagt ausdrücklich zum Schlusse (fol. 23ᵛ): „. . . *manent* $\frac{2}{21}$, *non verus: vel veniunt* $3\frac{1}{3}$, *verus numerus.*" An sich wäre hier ja keine negative Zahl als Lösung gekommen, wohl aber hätte diese als Zahl der Ellen des zweiten $-\frac{5}{21}$ gegeben, und aus diesem Grunde verwirft er die Lösung $\frac{2}{21}$.

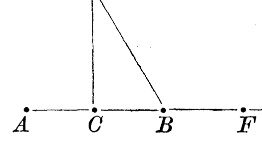
Statt wie Scheubel drei Canones zu unterscheiden und jeden einzeln zu behandeln, macht Salignac (und Ramus) eine Zweitheilung, indem er bei dem Falle also, wo man „*e tribus heterogeneis notarum continue proportionalium duos aequat uni*" unterscheidet, ob man „*unum extremorum caeteris aequat*" (d. h. nach unserer heutigen Bezeichnung $b = x^2 + ax$ und $x^2 = ax + b$) oder ob man „*extremos medio aequat*" (also $x^2 + b = ax$); für den ersten Fall wird dann, soweit es sich um Ausrechnung der vorkommenden Wurzelgrösse handelt, eine gemeinsame Vorschrift gegeben, und im letzten Falle heisst es betreffs des Resultates auch wieder: „. . . *pro conditione quaestionis liberum erit alias additionem aut subductionem usurpare, alias alteram tantum.*"

Einen Beweis für die Richtigkeit des Verfahrens lässt sich das von Salignac Beigebrachte kaum nennen; denn es ist nur verständlich, wenn man an Euklid's Sätze II, 4, 5, 6 denkt; Scheubel verweist einfach auf letztere. Clavius aber begnügt sich nicht mit der im Obigen (S. 83 f.) schon gegebenen geometrischen Versinnlichung des Verfahrens, sondern er

*) fol 19ᵛ: „. . . *radix deinde huius residui quadrata, ut libuerit, ac prout rationi magis consentaneum fuerit, uel a dimidio numeri characteris medii subtrahi, uel eidem addi oportebit. atque utrum horum factum fuerit, cum tam per id, quod hic colligetur, quam etiam quod illic relictum fuerit, radicis valor indicetur, exemplo satisfactum erit.*"

nimmt auch aus der Algebra des Nunez (Nonius) die *„demonstrationes non minus elegantes“* auf, welche ich hier rasch einfügen will.

α) $x^2 = ax + b$. — Man bilde die Strecke $AB = a$, halbire dieselbe in C, errichte in C die Senkrechte $CD = \sqrt{b}$, verbinde D mit B und trage CF ab gleich BD. Hiernach ist:



$$BD^2 \text{ oder } CF^2 = CD^2 + CB^2;$$
$$\text{aber } CF^2 = AF \cdot BF + CB^2$$
somit:
$$CD^2 = AF \cdot BF.$$

Aber es ist auch: $AF^2 = AB \cdot AF + AF \cdot BF$ und bei Einsetzung:

$$AF^2 = AB \cdot AF + CD^2,$$

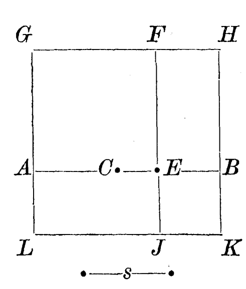
d. h.
$$x^2 = a \cdot x + b.$$

β) $x^2 + ax = b$. — Ist wieder wie vorhin construirt und abgeleitet, dass

$$CD^2 = BF \cdot AF,$$

so folgt:
$$BF \cdot (BF + AB) = CD^2,$$
oder:
$$BF^2 + AB \cdot BF = CD^2,$$
d. h.
$$x^2 + a \cdot x = b.$$

γ) $x^2 + b = ax$. — In nebenstehender Figur bedeute wieder $AB = a$, also: $AC = CB = \frac{a}{2}$ und es sei eine Strecke s so construirt, dass $s = \sqrt{b}$



und es sei erstens $s < \frac{a}{2}$. Dann theile man AB in E so, dass s die mittlere Proportionale zwischen AE und EB, also: $AE \cdot EB = b$ wird, beschreibe weiter über AE und EB die Quadrate AF und EK und vervollständige die Rechtecke AH und BL, so ist das Rechteck $EH = (AE \cdot EB) = b =$ Rechteck EL.

Nun behaupte ich, dass $AE = x$ ist; denn dann

ist Rechteck $AH = AB \cdot AE = a \cdot x$,
aber auch Rechteck $AH = AF + EH = x^2 + b$.

Ich behaupte aber, dass auch $EB = x$ gesetzt werden kann, denn es ist: Rechteck $AL = AB \cdot EB = a \cdot x$,

aber auch: Rechteck $BL = EK + EL = x^2 + b$.

Hiermit stimmt aber auch die Vorschrift zur Auflösung überein: denn nach Euclid ist:

$$AE \cdot EB + CE^2 = AE^2 \quad \text{oder} \quad CE^2 = AC^2 - AE \cdot EB = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b,$$

$$\text{folglich } CE = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\,,$$

daher ist: $AE = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} = x$ oder $EB = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - b} = x$.

Wenn zweitens $s = \frac{a}{2}$, so ändert sich die Figur unmittelbar leicht ab, so dass man sieht: $x = AC = \frac{a}{2}$.

Aber drittens kann nicht $s > \frac{a}{2}$ sein, weshalb „*radix, secundum praeceptum traditum, nullo modo inueniri potest*“.

43. Dass schon Stifel, und zwar so früh als es überhaupt nur möglich war, auf die durch die Italiener gewonnene Auflösung der cubischen Gleichungen aufmerksam machte, hob ich oben hervor; dass aber dieser Hinweis kaum gewürdigt wurde, dass ein halbes Jahrhundert hindurch und fast noch länger die deutsche Algebra jene gewaltige Errungenschaft kaum verwerthete, ja dass ihr die letztere beinahe so gut wie unbekannt blieb, ist eine kaum glaubliche Thatsache*). Scheubel, aber auch Peletier, Ramus und Salignac erwähnen ihrer mit keiner Silbe; so beginnt letzterer z. B. den Abschnitt über Gleichungen sofort mit der Erklärung: „*Aequatio Algebraica duplex est*“ — d. h. vom 1. und vom 2. Grad. Clavius aber kommt im 12. Kapitel seiner Algebra auf cubische Gleichungen zu sprechen und äussert seine Ansicht über diesen Gegenstand in folgenden Worten: „*. . . nondum est inuenta ars, qua huiusmodi radices certo eruantur; quamuis Cardanus et Nicolaus Tartalea in quibusdam exemplis singularibus inuenerint aestimationem unius radicis. Raphael autem Bombellus ex quibusdam etiam aequationibus eiusmodi et aliis nonnullis putat se inuenisse, quo pacto eruendae sint radices. Franciscus quoque Vieta dicitur demonstrasse regulam generalem pro eiusmodi radicibus extrahendis: quam quia uidere hactenus non licuit, et rationes Bombelli obscurae valde sunt . . .*“ aus diesen Gründen und weil die Gleichungen höheren als zweiten Grades selten gebräuchlich und complicirt, so beschränke er sich auf die letzteren allein. Solche Aufklärung hatte also Clavius aus dem Studium der Werke

*) Faulhaber schreibt z. B. in seiner *Academia Algebrae* (1631) folgenden Satz: „Obwol Christoff Rudolff | Michael Stiffel | Cardanus | Vieta | Adrianus Romanus | Diophantes | Simon Stevin | Lüdolph von Cöllen | Johañ Jung | Nicolaus Raimarus | Sebastian Kurtz | Petrus Roth | vnd andere | ihre Exempla | auff die Quadrat | Cubic | Zenszdecensz | Sursolit | Zensicubic | vnd Bsursolit Cosz gerichtet | Jedoch ist zu wissen . . . .“ Faulhaber nennt also in erster Reihe nur Fremde; die Deutschen, welche er nennt, haben theilweise nicht über die regelrechte Lösung der Gleichungen im Allgemeinen geschrieben, oder sie sind so spät, dass das Urtheil des Textes immerhin bestehen kann.

eines Cardanus und eines Bombelli entnommen! und solche Aufklärung gab er, der Gefeiertsten einer, über das so interessante Kapitel der cossischen Lehre! An diesem Massstabe muss man die Arbeiten und die Leistung eines Mannes wie Faulhaber messen, um nicht ungerecht zu werden in dessen Beurtheilung. Schon im Jahre 1604 hatte Johann Faulhaber (1580—1635) unter dem Titel „Arithmetischer cubiccossischer Lustgarten, mit neuen Inventiones gepflanzet“ ein Werk veröffentlicht, das ich mir bis jetzt leider nicht verschaffen konnte, das aber wohl eine vollständige Anleitung zur Lösung der cubischen Gleichungen enthalten muss. Denn in seiner um drei Jahrzehnte späteren *Academia Algebrae* gibt er Jedem, der „die Cosz fruchtbarlich | bald vnd fundamentaliter lehrnen will“, den Rath, „Er nem̄e erstlich für sich | den Christoff Rudolff | oder den Michael Stiffel | und lehrne darausz | die Principia vnd Species der Cosz | . . . . . . danach studire er ausz solchen Bücheren . . . die Linien Cosz | . . auff solches kan er die quadrat Cosz vornem̄en | . . . Wann er nun zu der Cubiccosz tretten will | so mag er den Cardanum fürnemmen | oder | da er gerne einen Teutschen Authoren haben wolte | so nem̄e er meinen Arithmetischen Cubiccossischen Lustgarten (darin̄en ich die erste Exempla | auch der quadrat Cosz | . . dirigiret) . . für die Hand | darin̄en wird er nicht allein die 13. Regulen Cardani | sondern fast alles was zur Cubiccosz gehöret | finden.“ Aber nicht nur das Vorhandene dargestellt und überliefert hat Faulhaber, er hat auch gewagt, einen Schritt weiter zu thun auf dem so Vielen völlig unbekannten Boden. Besonders eifrig hat er sich Jahre lang damit beschäftigt, für die Summen gleich hoher Potenzen der mit 1 beginnenden ganzen Zahlen allgemeine Ausdrücke zu finden: so behandelt er*) im J. 1615 die Summen der vierten, fünften und sechsten Potenzen, im J. 1617 die der achten bis elften, im J. 1622 die der zwölften und im J. 1631 die Summen der dreizehnten bis siebenzehnten Potenzen. Indem er dann seine allgemeinen Ausdrücke gewissen von ihm zuvor errechneten ganzen Zahlen gleich setzt, also z. B.

30 𝔊𝔷 + 255 𝔷𝔷𝔷𝔷 + 680 ℭ𝔵𝔷 ÷ 2380 𝔇𝔷 + 8840 𝔊𝔷 ÷ 24310 ℭ𝔠𝔵 +
+ 44200 𝔟𝔷 ÷ 46988 𝔷 + 23800 ℭ𝔵 ÷ 3617 ℞ gleich 2212420672540,

so kommt er auf Gleichungen höherer Grade, deren Wurzeln er im öffentlichen Ausschreiben zu erfahren verlangt und die er dann selbst veröffentlicht, sich rühmend, dass dies „ein wunderliche sach ist | dasz Gott der HErr in solche zahlen | so grosse Wissenschaften verborgen hat | vnnd zu vnserer zeit | dieselbige an Tag kom̄en lassen“; dass jene Wurzeln stets ganze Zahlen sind und nur durch Probiren zu finden waren und gefunden wurden, hebt er freilich nicht hervor. Immerhin deutet er den Weg an, auf welchem man zu deren Auffindung in den genannten speciellen Fällen

*) Kästner, Geschichte der Mathematik III, 29 ff. und 111 ff.

gelangen konnte. Er sagt nämlich bei Gelegenheit einer solchen höheren Gleichung (*Acad. Alg.* B. II): „Alhie will ich ein sonderbar Compendium inn der Cosz eröffnen | wañ einer ein solche grosse *aequation* probiren will | ob die quantiteten in jren Zahlen alle recht vnd justificiert sein | so ist nit von nöten | dasz er meinen Cardanischen schweren Procesz gebrauche | dadurch man die Binomische vnd Residuische Facit herauszpresset | sondern man darff nur desz Johan Jungen | oder Nicolai Raimari weeg gebrauchen | vnd mit dem Rational werth Radicis dividiren | vnd hinder sich von einer quantitet zur andern procediren | wie es sein soll."

Der Weg, auf dessen Beschreitung hier Faulhaber hinweist, darf in unserer Darstellung nicht unerwähnt bleiben, da auf ihm wohl die deutsche Coss den ersten schüchternen Versuch wagte, der Auflösung von Zahlengleichungen näher zu kommen.

44. Johann Junge aus Schweidnitz in Schlesien*), über dessen Lebensverhältnisse und Leistungen weiter Nichts bekannt ist, erdachte nämlich im J. 1577 wenigstens den Grundgedanken des Verfahrens, welches wir auch heute noch lehren, um rationale ganze Wurzeln von Zahlengleichungen aufzusuchen. Da aber seine Art viel „*conjectur* vnd mutmassung" enthielt und leicht in ein „vnendlich weit *circumvagiern* vnd vmbschweiffen" ausarten konnte, so änderte der auch als astronomischer Schriftsteller bekannte Nicolaus Reymers (*Nicolaus Raimarus Ursus*, ? — 1599 [?]) dasselbe ab, wie er in seinem im J. 1601 erschienenen Buche „*Arithmetica Analytica, vulgo Cosa*, oder *Algebra*" berichtet. Zur Verdeutlichung wähle ich die Gleichung $x^3 + 21x^2 + 90x = 486$. Reymers gibt derselben die Form: $x^3 = 486 - 90x - 21x^2$ und versucht nun einen der Faktoren des absoluten Gliedes 486 als Wurzel zu erkennen, während Junge von solcher Beschränkung auf Faktoren Nichts bemerkt hatte. Sei also 3 zu versuchen, so rechnet Reymers: $\frac{486}{3} = 162$, $162 - 90 = 72$ und wieder $\frac{72}{3} = 24$, $24 - 21 = 3$, und behauptet nun, weil schliesslich die gewählte Zahl wieder erscheint, dass eben diese eine Wurzel der Gleichung sei.

Wenn aber in der Gleichung gewisse Potenzen der Unbekannten fehlen, so muss die als Zwischenresultat erhaltene Zahl nicht einmal nur, sondern wiederholt durch die zu erprobende dividirt werden und zwar so oft, als

*) Peter Roth nennt ihn „gewesenen Rechenmeister zu Lübeck" (*Arithm. philos.* fol. 3r), und den gleichen Wohnort schreibt ihm z. B. auch Tobias Beutel zu in seinem „Handbüchlein der nützlichen und schönen Rechen-Kunst" (1658).

die Differenz zwischen den Exponenten der die Lücke einschliessenden Potenzen Einheiten hat. Er führt also an seinem Beispiele*):

$$\overset{\text{XXVIII}}{1} \text{ gleich } \overset{\text{XII}}{65532} + \overset{\text{X}}{18} \div \overset{\text{VI}}{30} \div \overset{\text{III}}{18} + \overset{\text{I}}{12} \div \overset{0}{8}$$

d. h. an der Gleichung:

$$x^{28} = 65532x^{12} + 18x^{10} - 30x^{6} - 18x^{3} + 12x - 8$$

die Erprobung der Zahl 2 so durch, dass er der Reihe nach die folgenden Zahlen berechnet:

$$-4;\ +12-4=8,\ 4,\ 2;\ 2-18=-16,\ -8,\ -4,\ -2;$$
$$-2-30=-32,\ -16-8,\ -4,\ -2;\ -2+18=16,\ 8,\ 4;$$
$$4+65532=65536\ ,$$

woraus durch 15 malige Division 2 erfolgt, so dass 2 als Wurzel der Gleichung behauptet werden kann.

Nach diesen Beispielen erst wird es möglich sein, Reymers' folgende Erklärung und Anleitung zu verstehen:

„Es hat endlich zu vnsern zeiten vmb dz Jar Christi Tausendt Fünffhundert vnnd sieben siebentzig, Johañes Junge von Schweidnitz aus Schlesien eine gar leichte vnd so wol zu allen zusamen gesetzten Cossischen vergleichungen vnd derselben aufflösung genugthunig generall *resolution* erfunden vnd auszgesunnen. Welche aber, weil sie etwan *Conjectural*, vnd durch etzliche, biszweilen auch wol durch viele mutmassunge, vnd gleichsam errattungs weisz, verrichtet wird: Als habe ich derselben nach vermügen geholffen, vnd solcher gemelten *conjectur* vnd mutmassung zum theil abgeholffen, dermassen, das sie jetzt etzlichen gewissen *terminis* eingefasset vnd eingeschlossen ist, vnd nicht mehr so vnendlich weit *circumvagiern* vnd vmbschweiffen mag: Vnd solchs durch Erfindung aller *Divisorum* oder theiler (in welche sie getheilet mag werden) einer jeden vorgegeben zahl (den wie viel theiler in der vorgenomnen zahl vorhanden: also viel *conjecturae* oder mutmassung sein etwa zu zeiten von nöthen) welche der theiler erfindung den leicht vnnd bekandt ist aus der gemeinen *Arithmetica*, als aus dem 7. *cap. libri I Arithmetices Rami*. Wollen derhalben dieselb gemelten des Johañis Junge allgemeine *Resolution* setzen, welche also lautet:

„Theile die absolut oder ledigen zahl in eine zahl solcher *Quantitet*, vmb wie viel die nach ihr stehende *Quantitet* den sie, höher ist. Ist alsdan der gefunden *quotient* +, so addier ihn zu, ist er aber ÷, so Subtrahier ihn von der folgenden *Quantitet*. Also thu bey allen *Quantiteten*, von der kleinesten anfahende bisz auff die gröszeste. Wo alsdan die letzte theilung gleich auffgehet, so schleussestu, das du den rechten *R. (Radix)* im anfang recht angenommen vnd getroffen, vnd demnach also recht ge-

*) Reymers verwendet hier die vor ihm schon von seinem Lehrer Bürgi (s. S. 104 und S. 36) gebrauchte Schreibweise.

funden hast. In Summa: Umb wie viel (oder vmb was vor eine *quantitet*) die folgende *quantitet* gröszer ist dan die vorhergehende kleiner, in einer solchen des im anfang angenommenen theilers oder *R. Quantitet* theile die kleine *Quantitet*, anfahend von der kleinsten bisz zu der grössesten: den *quotient* addir oder Subtrahir (nach gelegenheit vnd erforderung der zeichen + oder ÷) die folgende *Quantitet*: Die Summe oder Rest theile wiederumb wie vor: vnnd solchs der eins (nemlich in *aequatione non interrupta*) in den vorigen theiler, oder (in *aequatione interrupta*) in des vorigen theilers nach der *quantiteten* von einander stehenden Differentz oder weite, addir oder Subtrahir auch ebener massen, wie zuvor: vnd solchs *reiterier* bisz auff die grösseste vorgegebene *Quantitet.* Alsdan so kompt endlich aus der letzten theilung der gesuchte werd eines *R.* welcher im fall er dem im anfang angenommenen theiler gleich, ist er gewiszlich der rechte werd eines *R.* den so fern in *aequatione non interrupta* zwischen den zwo grössesten oder letzten beider *quantiteten* keine andere *Quantitet* den *R.* vorhanden, alszdan musz ausz letzter oder endlicher theilung die im anfang vorgenommen *R.* oder der theiler selber entsprüngen, aber vmb wie viel *Quantiteten* die zwo letzten oder grössesten *Quantiteten in aequatione interrupta* von einander stehen, eine solche des anfenglich angenommen *R.* oder theilers *quantitet* musz aus letzter theilung entspringen: als (zum Exempel) in massen auszgelassen eine *Quantitet*, als dann musz die endliche Summe oder Rest an stat des im anfang angenommenen *R.* oder theilers sein desselben zensz oder *Quadrat*: Wie aber zwo, der *Cubus*: wie drey, der zensizensz, u. s. w. Welchs den gnugsamb anzeigt die *Subtractio exponentium notarum*, mit welcheren die in ihrer ordnung stehende vnd nach einander folgende Cossischen *quantiteten* bezeichnet sein."*)

45. Diese selbe „Regul desz Herrn Johann Jungen" erwähnt auch und rühmt sich, durch eine für cubische Gleichungen wenigstens eben so gute ersetzt zu haben, Peter Roth (? — 1617 nach Poggendorff), „Burger und Rechenmeister in Nürnberg". Dieser hat sich mit Faulhaber unzweifelhaft das Verdienst erworben**), die Behandlung der cubischen Glei-

---

*) Da mir Reymer's Werk nicht zugänglich ist, so citire ich Obiges nach Gerhardt, Gesch. d. Wissensch. in Deutschland, 17. Band (Gesch. d. Mathematik), S. 84 f.

**) Er wird deshalb auch in der nachfolgenden Zeit mit allen den oben zur Besprechung gekommenen bedeutendsten Cossisten in eine Reihe gestellt. So z. B. von Tobias Beutel in dessen Rechenbüchlein (1658) nach der Art seiner Zeit:

> Ich wil hier von der Cosz | und Algebra nur schreiben |
> So viel | dasz disz mein Buch | ein Hand Buch kan verbleiben |
> Vnd dasz des Rudolphs Buch | sammt Stiefels treuen fleisz |
> Cardani hohes Lob | Faulhabers Ruhm und Preisz |

chungen in Deutschland allgemeiner bekannt gemacht zu haben. Im Jahre 1608 veröffentlichte er nämlich ein Werk unter dem Titel*): „*Arithmetica philosophica* Oder schöne newe wolgegründte Vberausz Künstliche Rechnung der Cosz oder Algebrä", in dessen erstem Theile (fol. 1—19) „werden beschrieben die dreyzehnerley vergleichungen der Cardanischen Cubiccosz | welche er in seinem zehenden Buch so von dieser Kunst stattlich tractirt | nenēt die *primitiua* oder *principalia capitula*"; dabei spricht sich Roth im Allgemeinen dahin aus, dass „in den Cubiccossischen *aequationibus* seynd auffs meinste dreyerley werth *radicis* vorhanden", aber er erläutert diese seine Meinung auch sofort dahin, dass „solches nicht zu verstehen | dasz darumb ein jede Cubiccossische Vergleichung dreyerley geltungen | ein 33 cossische viererley geltungen . . . desz *radicis* leidet | sondern alle die | so am meinsten geltungen leiden | die haben jhr so viel | vnd auch gar nicht mehr". Und nachdem er die Cardanische Vorschrift zur Lösung der ersten Form

$$x^3 + px = q$$

mitgetheilt, macht er darauf aufmerksam, es sei räthlich, zuvor stets zu erproben, ob die Gleichung nicht eine rationale (ganze) Wurzel habe, und zu diesem Zwecke solle man von 1 aus auf- oder von der Cubikwurzel von q aus absteigend die folgenden Zahlen nehmen, deren Quadrate bilden und bezüglich zu p addiren und sehen, ob das Produkt aus der letzteren Summe in die angenommene Zahl, d. h. ob $(x^2 + p) \cdot x$ gleich q sei. Entsprechend solle man für die Gleichungsformen:

$$x^3 = px + q \qquad \text{und} \qquad x^3 + q = px$$

verfahren, und diese seine „drey newerfundene nützliche Reguln" macht er an folgenden Beispielen deutlich:

1 c + 400 𝓍 gleich 2125			
1	1	401	Aggregata
2	4	404	
3	9	409	
4	16	416	
5	25	425	
Multiplicirt kompt 2125			

1 c + 213 𝓍 gleich 3674			
15	225	438	Aggregata
14	196	409	
13	169	382	
12	144	357	
11	121	334	
Multiplicirt kompt 3674			

Was Junge auch erdacht | und Rothens kluger Geist
Sambt weiser Leute mehr | von Gott verliehne Gaben
Auch auffzusuchen seyn | so ihr Pfund nicht vergraben |
Darumb sie auch mein Kiel | hier billich rühmt und preist.

*) Der vollständige Titel besteht aus 269 Wörtern.

$1\,\mathfrak{c}$ gleich $10\,\mathfrak{x} + 639$

8	64	54	Differentz
9	81	71	

Multiplicirt bringt 639

$1\,\mathfrak{c} + 470$ gleich $147\,\mathfrak{x}$

12	144	3	Differentz
11	121	26	
10	100	47	

Multiplicirt bringt 470.

Im zweiten Theile seines Werkes (fol. 19—175) behandelt dann Roth ausführlich die 160 Beispiele, welche Faulhaber als ebensoviele „Bäumlein in seinem Arithmetisch-Cubiccossischen Lustgarten gepflantzt" hatte und nimmt sich dabei besonders an (fol. 126 ff.) der „schöne löbliche Polygonal Röszlein | von denen der künstliche Gärtner Johañ Faulhaber gesagt | dasz nit wol andere Gärtner | zu finden seyn werden | denen der nutz vñ die frucht gedachter Röszlein bewuszt oder bekant | also dz ermelte Polygonal Röszlein wol vnabgebrochen bleiben werden"; Roth aber erklärt, „sie samptlich abzubrechen vnd einzusamlen" und eine General-Regel erfunden zu haben „durch welche man leichtlich und gering | die Cörperliche Sum̃a etlicher Polygonalzahlen erforschen kan", und so theilt er eine Tabelle der Werthe derselben mit „als eines Gärtners Werkzeug und Instrument | ohn welchen derselbe nicht viel fruchtbarlichs verrichten kann | . . . welche meines Wissens | vorhin von keinem *Arithmetico* in offentlichen Truck beschrieben worden". Der Inhalt jener Tabelle vermag aus dem folgenden Auszuge erkannt zu werden:

1) *Trigonal*	$\frac{1\,\mathfrak{c} + 3\,\mathfrak{z} + 2\,\mathfrak{x}}{6}$
2) *Tetragonal*	$\frac{2\,\mathfrak{c} + 3\,\mathfrak{z} + 1\,\mathfrak{x}}{6}$
3) *Pentagonal*	$\frac{1\,\mathfrak{c} + 1\,\mathfrak{z}}{2}$
. . . . . .	
31) *Triacontahenagonal*	$\frac{29\,\mathfrak{c} + 3\,\mathfrak{z} \div 26\,\mathfrak{x}}{6}$
. . . .	
79) *Hebdomicontaenneagonal*	$\frac{77\,\mathfrak{c} + 3\,\mathfrak{z} \div 74\,\mathfrak{x}}{6}$
. . . .	
100) *Hecatogonal*	$\frac{98\,\mathfrak{c} + 3\,\mathfrak{z} \div 95\,\mathfrak{x}}{6}$

Die Gleichsetzung solcher Ausdrücke mit gegebenen Zahlen führte dann stets auf cubische Gleichungen, und dass man dabei auch vor den schrecklichsten Wortbildungen nicht zurückscheute, beweist die 130. Aufgabe etwa, wo die Summe etlicher *Dismyrioenneakischilioheptacosiotessaracontogonal* Zahlen gleich 1665804 sein soll und deren Anzahl = 7 gefunden wird.

Dass Roth ganz im Stile Faulhaber's weiter arbeitete, beweist auch der dritte und letzte Theil (fol. 175—192) seines Buches, da er hierin

„von Binomi : und Residuischen | auch andern Surdischen Quästionibus der zenszdezensz : Surdesolid : zensicubic : vnnd Bsurdesolid : Cosz handelt“.

46. Wir sahen, wie Faulhaber's und Roth's Darlegungen nur zur einen Hälfte der Freude am mathematischen Inhalt, zur anderen entschieden der Neigung zur Mystik ihren Ursprung verdanken. Einen Gegensatz hierzu gewährte schon Jung's Regel, welche sich auf rein mathematischem Gebiete hält; einen noch grösseren Gegensatz gewährt aber die hervorragende Leistung des Schweizers Jost Bürgi (1552—1632), welcher den höheren Gleichungen in ganz neuer Art Verwerthung und Lösung angedeihen liess: *„in hoc genere ingeniosissima et inopinabilia multa est commentus“*, sagt Kepler von ihm.

Als wandernder Handwerker nach Kassel gekommen und hier von dem als Astronomen bekannten Landgrafen Wilhelm von Hessen zuerst (1579) als Hofuhrmacher, dann als Mechaniker angestellt und bald auch zu den astronomischen Arbeiten beigezogen, that sich Bürgi durch eine Reihe glänzender Leistungen hervor, welche in neuerer Zeit erst allgemeinere Anerkennung fanden*): so sind die Verbesserung der prosthaphäretischen Methode der Trigonometrie, sowie die Erfindung der Decimalbrüche und der Logarithmen unzweifelhaft aus seinem Geiste entsprungen.

Was uns hier allein beschäftigen soll, seine eigenthümliche Behandlung der Gleichungen, hat sich Bürgi ausgedacht, da er die für astronomische Arbeiten so unentbehrlichen Sinustafeln mit grösserer Leichtigkeit und Genauigkeit, als es bis zu seiner Zeit geschehen war, zu berechnen unternahm. „Unsere Vorfahren“, sagt er**), „haben die Sinus wie bekhant ausz folgenden, zwar geometrischen, aber zur rechnung unbequemen und sehr schwären gründen erforscht. Erstlich haben sie die seitten diser gleichseittig und gleichwinklig Figuren, nämlich von drey-, vier-, fünf-, Sechs-, Zehen, fünfzehn eckhen, so alle in einem Zirckel stehen Und mit allen eckhen an der Krümme anrühren mögen, gerechnet und mit des Diametri maasz oder Theilung gemessen und gezehlet. fürs ander haben

*) So durch Gieswald („Justus Byrg als Mathematiker und dessen Einleitung in seine Logarithmen“. Danzig 1856) und besonders durch Rud. Wolf in den „Biographieen zur Kulturgesch. d. Schweiz“, Bd. I. 1858 („Jost Bürgi von Lichtensteig“), dann in den „Astronom. Mittheilungen“ Nr. XXXI und XXXII v. J. 1872 und 1873 (S. 6—28 und S. 55—67), schliesslich in der „Gesch. d. Astronomie“, 16. Bd. der Gesch. der Wissenschaften in Deutschland, S. 273, 341 und 369 ff. In Bezug auf die Erfindung der Pendeluhr durch Bürgi scheint Wolf zu viel behauptet zu haben.

**) Wolf's Astron. Mittheilungen XXXI, S. 12 ff. — Dass Bürgi sein Vorhaben ausführte, beweisen Aeusserungen von Kepler. Gedruckt wurde aber seine Tafel niemals und es scheint dieselbe verloren zu sein; dagegen ist die Einleitung dazu unter den Kepler'schen Manuscripten in der Bibliothek der Sternwarte zu Pulkowa noch vorhanden als ein etwa 88 Folioseiten starkes Manuscript, dassen Abfassungszeit wohl in das letzte Jahrzehnt des 16. Jahrhunderts fällt: Wolf macht nun a. a. O. Mittheilungen daraus und diesen ist das im Text Gegebene entnommen.

sie einen Jeden Bogen der von einer sollich seitten abgeschnitten würt in zwey gleiche Theil getheilt und die subtensas (Sehnen) der halben Bogen gesuecht, was dan vil quadrierens und wurtzelsuechens gibt. Fürs dritte zum Complementum eines jeden underzogenen halben Bogens durch quadriren und Wurtzel suchen seinen sinum gefunden. Weil aber von alters der Zirckhel in 360 und der quadrant in 90 grad getheilet würt, ein grad aber in 60 minuta: Hatt diese halbirung der underzogenen Bogen und Irer Complementorum nitt weitter gelangen mögen als auff 45 Minuta, die lassen sich nun nit mehr ohn einen bruch halbiren. Und gibt diser Procesz ingemein, wan man bey den Minuten pleibt und nit auff die Secunda khom̄en will, nit mehr denn Ungefahrlich 120 Sinus. Haben derohalben zum Vierten achtung geben, wo die Sinus anfahen gleich mit den bogen halbirt zu werden und also zwo subtensa zweyer halben bogen nichts merkliches mehr länger werden als die subtensa des gantzen bogens: da sie dan bald alle sinus auf die erste Minuta des Quadrantens und durch mittel des vorigen Processes hernach andere mehr darausz gefunden: Entlich den uberigen minuten, so hin und her im quadranten noch leer gestanden, Iren gebürenden Sinum nach der benachbarten proportion ungefährlich zugetheilt. . . . . . Diesem mangel abzuhelffen khompt die Cossa zu statt, wölliche wen̄ man das Wort Geometria weitläuffig nim̄et, auch eines theils darzue, theils aber zur Arithmetica gehört. Und reimet sich zwar sehr wohl zu den sinibus. Dan ob wol Sinus eine rechte linie ist so in einem Circkel stehet und disz pur geometrische sachen seind, Jedoch weil man solliche Sinus in Zahlen so genau es möglich zu wissen begehret . . . . so braucht man auch mit vortheil eine neue khunst darzu wölliche von Zahlen handlet. Weil dan die Cosz nit nur die ebenen figuren sondern auch die cubos in Zahlen angreiffet: demnach so ist dem oberzehlten Mangel (doch auff cossisch und nit auff guet geometrisch) abgeholffen . . . . . ." Nachdem Bürgi dann noch eine Anleitung zur Coss und zur Rechnung mit Decimalbrüchen, dabei sogar auch schon deren abgekürzte Multiplikation gegeben, geht er über zu geometrischen Betrachtungen und löst die Aufgabe: „wenn die Sehne (Subtensa) $AC = s$ eines Bogens bekannt ist, die zur Hälfte des Bogens gehörige Sehne $AB = x$ zu berechnen" — mit Hülfe der Cosz; er setzt nämlich den Durchmesser $= 2$ und findet:

$$x^2 = 2 \cdot B\beta \quad \text{oder} \quad B\beta = \frac{x^2}{2}, \quad \text{so dass}$$

$$AB^2 - B\beta^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 \text{ liefert } x^2 - \frac{x^4}{4} = \frac{s^2}{4} \text{ oder:}$$

$$\text{(II)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4x^2 - x^4 = s^2 \, .$$

Ist aber ein Bogen, dessen Sehne $AD = s$ bekannt sei, in drei gleiche

Theile $AB = BC = CD = x$ zu theilen, so findet Bürgi nach (II.): $AC^2 = BD^2 = 4x^2 - x^4$, also $= AC \cdot BD$, aber letzteres

$$= AD \cdot BC + AB \cdot CD = s \cdot x + x^2, \qquad \text{somit:}$$

$$\text{(III)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3x - x^3 = s\,.$$

Dann zeigt Bürgi, dass hiermit auch die Theilung eines Bogens in 4, 5, ... gleiche Theile zu finden sei; denn falls die Zahl der letzteren z. B. $= 4$, so ist:

$$4x^2 - x^4 = AC^2 = 2 \cdot C\gamma\,,$$

folglich:

$$s^2 = AE^2 = 4 \cdot A\gamma^2 = 4 \cdot AC^2 - 4 \cdot C\gamma^2 = 4 \cdot (4x^2 - x^4) - (4x^2 - x^4)^2,$$

woraus:

$$\text{(IV)} \quad \ldots\ldots \quad 16x^2 - 20x^4 + 8x^6 - x^8 = s^2\,;$$

entsprechend auch bei der Fünftheilung:

$$\text{(V)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5x - 5x^3 + x^5 = s\,.$$

Durch Fortsetzung dieser Operationen erhielt schliesslich Bürgi zum Aufsuchen der Subtensen die durch reine Additionen noch weiter zu führende Tabelle:

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII			
1														
	1													
3	—	1												
	4	—	1											
5	—	5	+	1										
	9	—	6	+	1									
7	—	14	+	7	—	1								
	16	—	20	+	8	—	1							
9	—	30	+	27	—	9	+	1						
	25	—	50	+	35	—	10	+	1					
11	—	55	+	77	—	44	+	11	—	1				

Nun handelte es sich für Bürgi um die Berechnung des Werthes von x aus solchen höheren Gleichungen.

Da ist zunächst hervorzuheben, dass Bürgi wohl weiss, dass einer solchen Gleichung mehrere Werthe zukommen; aber nicht nur dies, er denkt sich auch auf höchst geistreiche Weise ein Verfahren aus, um zu er-

mitteln, wie viele Werthe der Unbekannten aus der betreffenden Gleichung sich ergeben*).

Er sagt sich nämlich, dass zu jeder Sehne des Kreises stets zwei Bogen gehören, so z. B. zu der dem Radius gleichen Sehne der Bogen von 60^0 und 300^0, zur Sehne 0 der Bogen 0^0 und 360^0. Weil also die Sehne von 360^0 gleich 0 ist, so kann man jede beliebige Sehne als aus zwei Theilen bestehend betrachten, aus 0 und aus der Sehne selbst, oder umgekehrt: zu jeder Sehne kann man als zugehörig einen solchen Bogen auffassen, welcher aus der ein- oder mehrmal gedachten ganzen Peripherie und aus demjenigen kleineren oder grösseren Bogen besteht, der eigentlich zu jener Sehne gehört. Beispielshalber gehört zu der dem Radius gleichen Sehne der Bogen von 60^0 und der von 300^0, aber auch der von 420^0 und von 660^0, auch der von 780^0 und von 1020^0 u. s. w. Soll also der der genannten Sehne zugehörige Bogen in fünf gleiche Theile getheilt und die einem solchen zugehörige Sehne berechnet werden, so kann als letztere neue Sehne offenbar aufgefasst werden diejenige, welche zum Bogen von 12^0 oder 60^0, von 84^0 oder 132^0, von 156^0 oder 204^0, von 228^0 oder 276^0, ... gehört. Diese scheinbar unendlich vielen Werthe reduciren sich nun in der That auf fünf (nämlich 12^0, 60^0, 84^0, 132^0, 156^0), so dass Bürgi für die zu berechnende Sehnengrösse fünf verschiedene Werthe findet, entsprechend dem Grade der oben gegebenen Gleichung (V).

Soll aber nicht ein beliebiger Bogen, dessen Sehne bekannt ist, sondern die ganze Peripherie in eine Anzahl gleicher Theile getheilt werden, z. B. in fünf, so entsprechen der Sehne eines Fünftels wie vorhin 72^0 und 288^0, 144^0 und 216^0, 216^0 und 144^0, 288^0 und 72^0, ..., d. h. der unbekannten Sehne kommen in diesem Falle nicht fünf, sondern nur zwei Werthe, und in dem Falle der Siebentheilung der Peripherie nicht sieben, sondern nur drei Werthe zu.

Hat so Bürgi die Anzahl der Lösungen, welche seinen Gleichungen zukommen, festgestellt, so geht er dazu über, auch die Zahlenwerthe derselben herauszufinden und benützt hierzu verschiedene Näherungsverfahren. So berechnet er beispielsweise, von der Sehne 1 eines Bogens von 60^0 oder 300^0 ausgehend, die Sehnen ihrer Drittel 20^0 und 100^0, wofür er nach (III) die Gleichung:

$$(3 - x^2)x - 1 = 0$$

aufzulösen hat. Er macht zuerst eine Annahme a für x, deren letzte Stelle nicht um eine Einheit (also um 10^n, wenn es die n^{te} Stelle links von der

*) Bürgi hat dieses sein Verfahren nicht selbst dargestellt, wenigstens findet sich in Wolf's Auszug aus Bürgi's Manuscript (a. a. O.) Nichts dergleichen; aber Kepler überliefert uns dasselbe, indem er im ersten Buche seiner *Harmonice mundi* gelegentlich der Besprechung der regelmässigen Figuren Bürgi's Untersuchungen reproducirt.

Einerstelle ist) unter dem wahren Werthe steht und berechnet dann, ohne anzugeben wie, ihre Verbesserung nach der Formel:

$$\varDelta a = \frac{(3 - a^2) \cdot a - 1}{2a^2 + 2a \cdot 10^n - (3 - a^2)} \,.$$

So nimmt Bürgi, um die grössere der genannten Sehnen zu erhalten, $a = 1$, also $n = 0$ an und erhält

$$\varDelta a = \tfrac{1}{2} = 0{,}5 \,, \qquad \text{folglich} \qquad a_1 = 1{,}5 \,.$$

Dann für n nach und nach -1, -2, -3 und -6 setzend findet er

$$\varDelta a_1 = \frac{0{,}125}{4{,}05} = 0{,}03 \,, \qquad \text{folglich } a_2 = 1{,}53$$

$$\varDelta a_2 = \frac{0{,}008423}{4{,}0583} = 0{,}002 \,, \qquad \text{„} \quad a_3 = 1{,}532$$

$$\varDelta a_3 = \frac{0{,}000359232}{4{,}044136} = 0{,}000088 \,, \qquad \text{„} \quad a_4 = 1{,}532088$$

$$\varDelta a_4 = \frac{0{,}0000035820718945 28}{4{,}041883983408} = 0{,}0000008862 \,,$$

oder

$$x = 1{,}5320888862 \,.$$

Analog erhält er, von der Annahme $a = 0{,}3$ ausgehend, für die kleinere Sehne den Werth:

$$x = 0{,}3472963553 \,.$$

Im Verlaufe dieser seiner Rechnungen zeigt er auch, „wie ausz zweyen falschen werthen, deren einer zu grosz und der ander zu klein ist, der rechte werth der Radix zu erkundigen“, d. h. er verwendet auch die *Regula falsi.* Ist z. B. die Seite x des regelmässigen Neuneckes zu finden, so ist die Gleichung zu lösen:

$$\begin{aligned} 0 &= 9 - 30x^2 + 27x^4 - 9x^6 + x^8 \\ &= 9 - x^2 \left[30 - x^2 \left(27 - x^2 (9 - x^2)\right)\right] \,. \end{aligned}$$

Hier ermittelt Bürgi zunächst durch Probiren mit dem Zirkel, dass x zwischen 0,68 und 0,69 fallen muss. Diese Werthe in die Gleichung einsetzend erhält er statt Null:

$+ 0{,}0569$	für die Annahme	$x = 0{,}68$
$- 0{,}0828$	„ „ „	$x = 0{,}69$
$0{,}1397$		$0{,}01$

und fragt nun: was gibt 0,0569, wenn 0,1397 gibt 0,01? Antwort $= 0{,}0040$; somit muss 0,6840 eine bessere Annahme für x sein. Für diese erhält er:

$+ 0,00056410$,

dagegen für 0,6841 findet er $- 0,00083602$,

woraus er wieder den verbesserten Werth $x = 0,68404029$ ableitet.

Nach diesen Grundlegungen wendet sich Bürgi zu dem Hauptgegenstande seiner Arbeit, nämlich den „*canon sinuum*" für alle geraden Sekunden aufs kürzeste und genaueste zu errechnen. Wir aber können hiervon absehen, da es uns ja wesentlich auf seine Behandlung der Gleichungen ankam; dass er aber auch hierin ein Zeugniss seines Talentes niedergelegt hat und über die Leistungen seiner Vorgänger hinausgegangen ist, ergibt der Gang unserer Darstellung deutlich genug.

V. Von den Quellen der Coss.

47. In der bis hierher geführten Darstellung habe ich die Entwickelung der deutschen Coss verfolgt bis zu den Zeiten, wo sie ihre höchste eigenthümliche Ausbildung erlangt hatte, und ich habe schon theilweise die Beziehungen späterer Bearbeiter zu den früheren in Betracht gezogen und bin in Verfolgung der Spuren der letzteren zurückgegangen, soweit dies heute möglich ist. Nun ist aber die Algebra bekanntlich nicht unmittelbar und selbständig aus deutschem Boden hervorgequollen, vielmehr sind es von auswärts hergeleitete und wohl mehr noch ohne besonderes Zuthun herbeigeflossene, aus fernab gelegenen Quellen herstammende Bächlein, welche sich hier verstärkten und im Vereine mit den aus den umgebenden Culturländern zuströmenden Bächen und Flüssen nun den gewaltigen Strom bilden, welchen wir die neuere Algebra nennen. Ich würde aber glauben, meine Aufgabe nicht vollständig aufgefasst zu haben, wenn ich meine gesammte Darstellung schliessen wollte, ohne wenigstens den Versuch gemacht zu haben, das eine oder andere jener Bächlein noch weiter rückwärts zu verfolgen und so den Quellen nachzuspüren, aus welchen die deutsche Coss erflossen ist.

Da muss ich nun sogleich bemerken, dass bald, nachdem ich nur ein wenig mit unserem Gegenstande mich vertraut gemacht hatte, in mir die Meinung sich bildete, dass eine uumittelbare Beeinflussung der deutschen Coss durch die Werke der Italiener, welche im 15. und 16. Jahrhundert die Algebra wohl am meisten cultivirten, nicht, oder nur in fast verschwindendem Maasse stattgefunden habe; um nur zwei Gründe zu erwähnen: überall fehlte jegliche Erwähnung der italienischen Hauptwerke, des Abacus von Leonardo Fibonacci oder der Summa des Lucas Pacioli, und überall zeigte sich die Form der Darstellung als eine von den genannten wesentlich verschiedene. Ich fand dann auch, dass schon Hutton (1796) jene

Meinung ausgesprochen hatte*); denn Chasles**), welcher in diesem Punkte gewöhnlich mit Hutton zusammen angeführt wird, drückt sich gleichwie auch Drobisch***) zu unbestimmt aus, als dass in ihren Worten eine klare Zurückweisung des direkten italienischen Einflusses gefunden werden könnte. Gerhardt†) dagegen lehnt letzteren durchaus ab, thut dies aber wesentlich nur in Bezug auf Regiomontan und Widman und bleibt zudem volle Begründung seiner Behauptung schuldig.

Es erscheint demnach wohl angezeigt, eine besondere Untersuchung über die Quellen der deutschen Algebra durchzuführen.

48. Was zunächst den gebräuchlichsten Namen der letzteren, den Namen „Coss", betrifft, dessen Ableitung ich oben (S. 9) gegeben habe, so spricht dieser noch am meisten für ein Herüberkommen der Algebra aus Italien nach Deutschland. Gleichwohl ist sein Gebrauch durchaus nicht einem Beweise jener Abstammung gleichzuachten; denn die früher (S. 10) ange-

---

*) „*After the foregoing analysis of the works of the first algebraic writers in Italy, it will now be proper to consider those of their contemporaries in Germany; where excepting for the discoveries in cubic equations, the art was in more advanced state, and of a form approaching neares to that of our modern Algebra, the state and circumstances indeed being so different, that one would almost be led to suppose they had derived their knowledge of it from a different origin.*" (*A mathematical and philosophical dictionary I, p.* 77 — nach Drobisch.)

**) Gesch. d. Geom. S. 637: „Man hat Grund zu glauben, dass, zumal in Deutschland, einige andere Werke einen anderen Brennpunkt bildeten .... Man schliesst darauf aus dem gelehrten Werke von Stifel, das 1544 ... erschienen ist, worin sich die Elemente der Algebra und eine Menge auf diesem Wege aufgelöste Aufgaben der Geometrie finden, wie in der Summa des Lucas des Burgo. Und dies Werk von Stifel bietet einen solchen Unterschied von diesem dar, dass man darin eine tiefere Kenntniss und eine ältere Ausbildung der algebraischen Wissenschaft, sowie auch einige Annäherung an die abstracte Form, die sie seitdem angenommen hat, erkennt."

***) *De Widmanni compendio, p.* 33, wo von einer Aufgabe die Rede ist, welche Widman und Leonardo übereinstimmend haben: „*Habet eandem quaestionem, sed aliis numeris, Lucas Paciolius .... Non dubitandum igitur est, quum Leonardus Fibonacci scientiam suam itineribus in Oriente factis comparavisset, illa exempla originem ab Arabibus vel Indis ducere. An vero in Germania nostra ipsa Leonardi aliorumque Italorum scripta nota fuerint, an rerum, quae his continentur, notitia ad computatores nostros via minus directa pervenerit, adhuc in obscuro est.*"

†) C. J. Gerhardt, Gesch. d. Math. in Deutschland, S. 21: „Es ist nicht wahrscheinlich, dass Regiomontan die Algebra erst in Italien kennen gelernt; vielmehr ist anzunehmen, dass er schon während seines Wiener Aufenthaltes damit Bekanntschaft gemacht ..."; und S. 30: „Widman verfasste sein Rechenbuch nach arabischen Vorbildern, und es standen ihm entweder direkte indische und arabische Quellen zu Gebote oder er benutzte handschriftlich vorhandene Compendien, die aus diesen Quellen abgeleitet waren"; und S. 54: „Dieser Abriss der Algebra beweist (?), dass die ersten deutschen Algebristen die besten arabischen Quellen benutzten ...."

gebenen Beispiele zeigen, dass auch in Frankreich und in England jener Name üblich war, und wenn wir gleichwohl eher an Italien zu denken geneigt sind, so hat dies seinen Grund eben in der geschichtlich feststehenden innigen Beziehung zwischen den diesseits und jenseits der Alpen liegenden Ländern. Aber auch dann ist hierdurch noch lange nicht festgestellt, dass unsere frühesten Cossisten nach direkten italienischen Quellen gearbeitet hätten: denn was Drobisch (a. a. O. S. 21) für die Verpflanzung der sog. „Wälschen Praxis" nach Deutschland als höchst wahrscheinlich hinstellt, dass sie hier nämlich in Folge ihrer Benützung durch Kaufleute und durch Privatunterricht von Rechenlehrern mehr als durch Bücher eingedrungen sei, dasselbe ist auch für die Algebra denkbar, ja es könnte selbst auf diesem Wege der Name der „Coss" herübergekommen sein, ohne dass auch ihre Lehren zugleich mitgetheilt worden wären. Wir müssen uns stets gegenwärtig halten, dass ein nur etwas vorangeschrittenes Wissen von mathematischen Dingen damals wenig verbreitet war: so wird aus dem Ende des 15. Jahrhunderts von dem oft erwähnten Widman berichtet (Gerhardt, Gesch. d. Math. S. 30), dass er an der Universität Leipzig lehrte und dass er *„multa admodum in mathematica, et potissime in speciebus, non sine auditorum summo applausu aliquot annis volvisset . ."*, und in der Mitte des 16. Jahrhunderts noch fordert an der damals berühmtesten Universität Wittenberg ein Docent der Mathematik in seiner Eröffnungsrede die Studirenden auf, sich nicht zurückschrecken zu lassen: die ersten Elemente seien leicht, die Lehre vom Multipliciren und Dividiren verlange etwas mehr Fleiss; freilich gebe es schwierigere Theile der Arithmetik, „ich spreche aber — so fährt er fort — von diesen Anfängen, welche euch gelehrt werden und nützlich sind."

Wenn also das Vorkommen des italienischen Namens auf deutschem Boden wohl ein Herüberspielen der italienischen Mathematik anzeigen mag, so ist damit gewiss noch nicht die Frage beantwortet, im Anschlusse an welcherlei Schriften die frühesten deutschen Cossisten ihre Compendien ausarbeiteten. Um hierüber, also über die Quellen der deutschen Coss, Aufschluss zu erlangen, scheinen, da ihr Name nicht eben viel Aufschluss bietet, nur drei Wege beschritten werden zu können, auf denen ein Rückverfolgen möglich ist: wir wenden uns erstens an die auf diesen Punkt bezüglichen Aussagen und Zeugnisse unserer Cossisten selbst; zweitens wir sehen uns um, ob vor dem Jahre 1500 etwa in Deutschland wirklich fremde auf Algebra bezügliche Schriften, und welche derartige vorhanden waren; und endlich drittens wir analysiren hierauf fussend in historisch-kritischer Weise Form und Inhalt dessen, was unsere Cossisten bieten.

49. Wenden wir uns unserer ersten Theilaufgabe zu, so dürfte es sich empfehlen, rückschreitend die Bearbeiter der Coss Revue passiren zu lassen.

Was zunächst Stifel betrifft, so gibt er uns auf unsere bezügliche

Frage keine Auskunft. Er hat die Fundamente aus Rudolff's Buch „ohn allen mündtlichen vnderricht" gelernt und Alles, wie wir sahen, selbständig ausgearbeitet, dann auch des Cardanus' Werk benützt; ältere Quellen scheint er für seine Algebra nicht verwerthet zu haben, wie auch schon der Umstand beweist, dass er seinem Lehrer und Freunde Milich treulich folgend die Algebra dem Astronomen Geber als Erfindung zuschreibt*).

Rudolff sagt zwar seinem Lehrer Grammateus Dank, da er von ihm „der Coss anfengklichen bericht empfangen", thut aber sonst früherer Quellen keine Erwähnung; denn nur als eine historische Reminiscenz lässt sich bezeichnen, wenn er sagt (fol. 𝔄 III[r]): „Demnach sich die alten höchlich beflissen die zal zu ergründen | haben geschribē ein subtile kunst | so in Arabischer zungen: Gebra et almuchabola | von den Indianern Alboreth | von walhē de la cose geheissen würt."

Eine viel reichlichere Ausbeute gewährt uns die Coss von Adam Riese. Dieser beginnt (S. 9) geradezu mit der Erklärung, dass „In disem Nachgeschriebenn Buch werden vff das allerclerlichst ausz getrucktt etzliche Algorithmi, die vorlangest beschrieben vnd nachgelaszenn seint wurden durch Algum, Bohecium, Archimedem etc. vnd den bervmbstenn In der Zall erfarnen Algebram den Arabischen meister, Desgleichen Inn Rechnung nihe gewesen, Auch schwerlich vber in eyner komen wirtt. Das Buch von dem ding ausz arabischer In krichisch gesatzt von Archimedo vnd alszdann ausz der krichischen sprach in di lateinische durch Apuleyum vnd Zum letzten Zu vnsr(er zeit?) eins teyls verdeutst durch denn erfarnenn Mathematicum Andream Alexandrum vnd darnach vffs allerleichtest vnd gruntlichst wol Zu begreyfen gefertigt durch Adam Riesenn vom Staffelstein". Freilich sind hierin böse historische Ungeheuerlichkeiten enthalten; aber hier kann doch wohl schon als richtig das abgeleitet werden, dass Riese keine italielienischen Werke benützt hat, dass er dagegen der mehr oder weniger unmittelbaren Ableitung seiner Quellen aus dem Arabischen sicher war.

Aber Riese lässt es auch an einer namentlichen Erwähnung derselben nicht fehlen: „Volgenn hernach die Acht equaciones Algebre, gezogenn ausz seynem ersten buch genant gebra vnd almuchabola" — das sind die Worte, mit denen er seine Vorschriften zur Lösung von Gleichungen einleitet (S. 12), und entsprechend beschliesst er dieselben (S. 16) mit dem Hinweis, dass „Algebras . . . . vns vorlasenn seine acht equaciones, Welche ich ausz seinem buch gezogen".

Und auch in der Widmung seiner Schrift an den „Achtparnn Hochgelartenn Ern Georgio stortzen" schreibt Riese demselben (S. 10): „Vber

---

*) *Arithm. int. fol.* 226[v]: „. . . *Algebram (quam persuasisti bonis rationibus, a Gebro Astronomo, autore eius, ita esse nuncupatam)* . . ."

das alles habtt ir mich ferner gebetenn vber die Algorithmi, so Algebrasz gesatzt, Zu beschreibenn, Dañ die selbigenn biszher so schwer gesatzt in lateinischer berichtung, Das selten eyner darausz vorstand hett fassen mugenn."

Indem wir uns vorbehalten, nachher nochmals auf Riese zurückzukommen, wollen wir noch einen Augenblick Umschau halten bei Widman, ob wir hier noch etwas über Quellen erkunden können. Er erwähnt freilich (fol. 1[r]) „dasz die aldē meyster der kunst der Rechnug Irenn nach komendē schwere Regeln̄ tzuuornemen vn̄ muesam tzuuerfuren gelassen haben Alsz do seynn die Regel Algobre oder Cosse genant dasz buch. Data genant. vn̄ die Regel proportionū vnd ander der gleychen" und er gesteht auch (fol. 2[r]), dass er sich „gemuet vn̄ mit sūdern̄ vleysz tzusam geklaubet vn̄ gelesen leichte vn̄ nicht szo geringe alsz nutzpar Regeln̄ der Rechnung"; nach welchen Vorbildern er aber gearbeitet, gibt er nicht namentlich an, und mit Rücksicht hierauf nützt es uns auch wenig, wenn wir bei Riese lesen (S. 10), dass er selbst „auch das exemplar gesehnn Darausz Widman die fragstuck vnd andersz genumen".

Aber immerhin lässt sich aus den angeführten Stellen einmal als höchst wahrscheinlich das folgern, dass um 1500 die Werke der berühmteren Italiener, dass insbesondere die von Leonardo Fibonacci und von Lucas Pacioli in Deutschland nicht bekannt waren und das erstere also wohl auch zuvor nicht verbreitet gewesen war; mit unbedingter Sicherheit können wir aber weiterhin das Resultat ableiten, dass die geschichtliche Herleitung der Algebra von den Arabern allgemein angenommen wurde und dass das diesen Zweig der Mathematik behandelnde Hauptwerk des „Algebras", d. i. des Mohamed ben Musa Alkharezmi, in lateinischen Uebersetzungen bekannt und ziemlich verbreitet war, und dass dasselbe von den frühesten deutschen Cossisten als Quelle benutzt, ja geradezu in deutscher Sprache bearbeitet wurde.

In Uebereinstimmung hiermit befindet sich, dass auch in Frankreich lateinische Uebersetzungen jenes Hauptwerkes gebräuchlich waren, wie denn Libri in Pariser Bibliotheken deren drei auffand, von welchen er eine veröffentlichte*), und eine hübsche Bestätigung unseres vorhin gefolgerten Schlusses gewährt das oben (S. 59) erwähnte und theilweis mitgetheilte deutsche Bruchstück eines Auszuges aus der Algebra des Mohamed ben Musa, das aus dem Jahre 1461 stammt und in welchem dieser selbst mit Namen („Machmet") eingeführt wird.

48. Indem wir, Dank den Bemühungen von Gerhardt, das genannte Bruchstück hier vorführen konnten, haben wir schon den zweiten Weg betreten, auf welchem wir behufs Erforschung der Quellen unserer Coss vordringen

*) *Libri, Histoire des Sc. math. en Italie* (1865), I, p. 253—297.



wollten. Ob noch weitere Bearbeitungen der Algebra vorhanden gewesen und benützt wurden, ob sich solche gar noch handschriftlich vorfinden — das sind die zunächst zu stellenden Fragen. Dass darauf nicht mit Nein zu antworten, beweist schon das zweite von Gerhardt in München aufgefundene und oben bereits erwähnte Manuscript. Direkte Nachforschungen in den Bibliotheken würden wohl noch mehr zu Tage fördern; und wenn auch Gerhardt (a. a. O. S. 141) bemerkt, dass sein Suchen in Wien, München und Nürnberg, also in den Städten, wo in der That am meisten Ausbeute zu erwarten war, erfolglos gewesen, so wird man dennoch nicht ganz die Hoffnung aufgeben dürfen, da an den genannten Plätzen und an vielen anderen Orten bei genauerer Katalogisirung immerhin noch Manches ans Licht gezogen werden kann.

Es wird sich selbstverständlich empfehlen, in unserem Suchen durch etwaige Angaben der Schriftsteller jener Zeit uns leiten zu lassen. Da möchte ich nun zunächst hervorheben, dass Riese (S. 13) u. a. auch „zu besserm verstantt ein exempel setzt so im 11 Capitel des dritten buchs *Quadripartita Numerorum* gesatztt". Das Einzige, was ich über dieses Buch hier beibringen kann, ist der Aufschluss, welchen Chasles*) darüber gibt. Derselbe sagt: *„Je citerai . . . un excellent traité d'Arithmétique et d'Algèbre que les historiens des mathématiques paraissent n'avoir pas connu. Cet ouvrage, intitulé „Quadripartitum numerorum" a été composé dans la première moitié du XIV siècle par Jean de Muris, chanoine de Paris . . . Ce traité d'Algèbre est le seul, avec celui de Jordan, que Regiomontanus ait designé en parlant des plus savants ouvrages de l'antiquité et du moyen âge: „Habetur apud nostros Quadripartitum numerorum, opus insigne admodum." Au XV siècle les Allemands étaient déjà très-versés dans la pratique de l'Algèbre; l'expression „opus insigne admodum" est donc d'un grand prix de la part de Regiomontanus, le premier géomètre de son siècle."* Es trifft sich gut, dass das eine Beispiel, welches Riese aus dem genannten Werke auswählte, einen Rückschluss auf dessen Inhalt zu machen erlaubt: da es sich dabei nämlich um die Lösung der Gleichung $x^2 + 21 = 10x$ handelt, so folgern wir einmal, dass der dem 14. Jahrhundert angehörige Verfasser die quadratischen Gleichungen behandelt hat, und dann, dass er sie im Anschluss an Mohamed ben Musa behandelte; denn genau dasselbe Beispiel und nur dieses eine verwerthet letzterer (ed. Rosen p. 11 und 17; Libri I, p. 257 und 261), um die rechnerische Lösung und deren geometrische Begründung daran durchzuführen. Also auch von dieser Seite aus finden wir, dass die Vorarbeiten für unsere Coss und darum diese selbst aus arabischem Samen entsprossen ist.

Auf andere Quellen werden wir geführt, wenn wir das auf S. 113

*) *Comptes Rendus* (1841), Bd. 13, p. 511.

mitgetheilte Citat aus Widman genauer beachten. Wenn er da „die Regel Algobre oder Cosse genant“ erwähnt, so werden wir wohl nicht zu weit fehl gehen, wenn wir darunter Mohamed ben Musa's Algebra verstehen, und in Betreff seiner „Regel proportionum“ ist die Vermuthung erlaubt, dass damit der im J. 1868 von Curtze herausgegebene „Algorismus Proportionum von Nicolaus Oresme“ gemeint sei, welcher freilich mit Lösung von Gleichungen Nichts zu thun hat, aber als Beispiel für schwer verständliche Abhandlungen gewiss gelten kann.

Es bleibt in Widman's Citat noch übrig „dasz buch. Data genant“, welches auch bei Riese (Berlet S. 26) Erwähnung findet. Da nun letzterer eine „Verdeutschung aus den Datis Jordani“ ausgearbeitet hat, welche von seiner eigenen Hand geschrieben und zugleich mit seiner Coss sich heute noch gut erhalten vorfindet, so liegt der Gedanke nahe, dass jenes „Buch Data“ identisch sei mit dem von Chasles besprochenen bis jetzt noch nicht veröffentlichten Werke *„De numeris datis“* von Jordanus Nemorarius, dessen Lebenszeit lange ziemlich unbestimmt gewesen ist, dann aber von Chasles „gegen das Ende des 12. Jahrhunderts“ angesetzt wurde, bis es Boncompagni gelang, durch einen wohl sicheren Nachweis *) den Anfang des 13. Jahrhunderts festzustellen. Da ich hoffte, dass ich aus der eigenen Einsichtnahme eines der Manuscripte des genannten Werkes Aufschluss erhalten könnte über die Quellen unserer Cossisten, so liess ich mir das der Basler Bibliothek gehörige kommen, schrieb es ab und hoffe durch die im Anschluss an die vorliegende Arbeit geschehende Veröffentlichung allen für die Geschichte der Mathematik sich Interessirenden einen Dienst zu erweisen. Ich muss hier kurz erwähnen, dass des Jordanus' Werk in den Pariser Manuscripten „in vier Bücher eingetheilt ist, welche zusammen 113 Fragen umfassen“ (Chasles), dass aber das in Basel aufbewahrte ohne besondere Hauptabtheilungen unmittelbar auf einander folgend 95 Aufgaben behandelt. Nun citirt Riese die „23. proposicion des andern Buchs“, und ein Vergleich zeigt die genaue Uebereinstimmung seiner Aufgabe mit der in Nr. 52 des unten folgenden Textes enthaltenen, so dass in diesem letzteren einfacher Rückrechnung zufolge zwischen den Nummern 29 und 30 ein gewisser Abschnitt sein müsste — ein Resultat, welches durch die Einsichtnahme des Textes seine volle Bestätigung findet. Dass Riese ausser dem einen Beispiele auch andere theils wörtlich aus Jordanus entnommen, theils nur in den gewählten Zahlen umgestaltet hat, zeigt die unten gegebene Nebeneinanderstellung**), lässt sich übrigens auch erwarten,

---

*) Ueber diesen vgl. unten S. 125 ff.

**) Ich bezeichne dabei die vollständige Uebereinstimmung durch das Zeichen = und die Verwerthung einer Aufgabe so, dass nur die Zahlen geändert sind, durch (=). Demnach können wir ansetzen:

wenn man beachtet, dass Riese, wie schon erwähnt, von des Jordanus' Werk selbst eine „Verdeutschung" angefertigt hat. Das Beigebrachte wird nun wohl als Bestätigung angesehen werden können für die von mir ausgesprochene Vermuthung, dass das von Widman citirte „buch. Data genant" kein anderes als das in gewissem Sinne algebraische Werk des Jordanus sei. Dass wir aber mit der Auffindung dieser Quelle wiederum zu der freilich nur mittelbaren Einwirkung der arabischen auf die deutsche Mathematik gelangt sind, zeigt die in den Nummern 56 und 57 des Textes von Jordanus geschehende Erwähnung der Araber und die daselbst dargelegte, gerade von den letzteren vielfach verwerthete Anwendung der sog. Regel vom falschen Satze.

49. Wir sprachen oben die Absicht aus, auch noch auf einem dritten Wege versuchen zu wollen, ob Aufschluss zu erlangen sei über die Quellen der deutschen Coss, so nämlich, dass wir den Inhalt des von unseren Cossisten Gebotenen analysiren.

Denn was die Form desselben betrifft, so ist unser ganzer erster Abschnitt ein sprechender Beweis dafür, dass, wie ja auch Hutton und Chasles anerkannten, die Leistungen der deutschen Mathematiker des 15. und 16. Jahrhunderts die der übrigen weit überragen: die Einführung und stete Anwendung der Zeichen + und —, die Einführung und allmählige praktischere Gestaltung des Wurzelzeichens begründen die algebraische Zeichensprache und lassen schon die Erkenntniss wach werden, dass von einer solchen die Ausgestaltung der Wissenschaft selbst abhängig sei. Also in dieser Beziehung hatte die deutsche Mathematik vom Ausland zunächst Nichts zu lernen, sie war selbständig erfindend vorgegangen, und so vermögen wir von hier aus auch keine Aufklärung zu gewinnen über den Punkt, mit dem wir uns hier beschäftigen.

Anders steht es dagegen mit dem Inhalt. Wenn wir uns, um diesen zu prüfen, zunächst dem obigen zweiten Abschnitte zuwenden, dem vom Algorithmus der Coss, und wenn wir damit vergleichen, was einerseits Mohamed ben Musa, anderseits z. B. Lucas Pacioli über den nämlichen Gegenstand lehren, so kommen wir sofort zu dem Resultate, dass in der genannten Beziehung die deutsche Coss vor Stifel im Wesentlichen denselben Inhalt bietet, wie die italienische am Ende des 15. Jahrhunderts. Aus Mohamed's Algebra konnte sie hierauf Bezügliches nicht entnehmen, da diese ja selbst fast Nichts hierüber enthält; wohl aber zeigen uns die zwei ersten Traktate der achten Distinction von Pacioli's Summa (fol. 111 bis 119) nach Inhalt und Anordnung des Stoffes das Nämliche, was uns

J 19 (=) *R* 1 (2, 3, 4)	*J* 47 (=) *R* 10 (11)	*J* 14 = *R* 68	*J* 56 (=) *R* 122
J 1 = *R* 5	*J* 44 (=) *R* 23	*J* 19 (=) *R* 73	*J* 56 = *R* 126
J 1 (=) *R* 6	*J* 54 = *R* 31	*J* 36 (=) *R* 75	
J 26 (=) *R* 9	*J* 47 = *R* 49	*J* 52 = *R* 93	

in abgekürzter Weise unsere ersten deutschen Cossisten, Grammateus und Rudolff, ebenfalls bieten; eine unmittelbare Abhängigkeit der letzteren von jenem ist aber gleichwohl auch hier nicht zu behaupten.

Was soeben vom Inhalt unseres obigen zweiten Abschnittes gesagt wurde, gilt in gleicher Weise auch vom dritten, in welchem die Lehre von den Irrationalen ihre geschichtliche Betrachtung fand: von Wenigem abgesehen, geht ja Pacioli so wenig als Leonardo Fibonacci über Euklid's zehntes Buch hinaus, und die Regeln, welche diese über Addiren und Subtrahiren, über Multipliciren und Dividiren von Wurzeln des zweiten, dritten und höchstens vierten Grades geben, wir finden sie wieder in Rudolff's Abschnitten „de surdis quadratorum, cubicorum und quadratorum de quadratis". Aber eine direkte Abhängigkeit scheint sich auch hier nicht nachweisen zu lassen; wie die geschichtliche Beziehung hier gedacht werden muss, wollen wir erst weiter unten erörtern, wenn wir noch mehr Thatsachen werden kennen gelernt haben, welche solcher Erörterung die erwünschte Grundlage verschaffen.

50. Derartige Thatsachen werden wir auffinden, wenn wir nun noch auf unseren letzten Abschnitt eingehen, welcher von den Regeln der Coss, von den zur Lösung von Gleichungen dienlichen Vorschriften und deren Verwerthung bei gegebenen Beispielen handelt.

Betreffs der Regeln selbst ist der Zusammenhang mit den vorangegangenen Jahrhunderten unverkennbar. Mohamed ben Musa hatte die Fälle unterschieden, welche in unserer heutigen Schreibweise sich so darstellen:

$$ax^2 = bx\,,\quad ax^2 = b\,,\quad ax = b\,,\quad x^2 + bx = c\,,\quad x^2 + c = bx\,,\quad x^2 = bx + c\,;$$

und Leonardo Fibonacci war dabei stehen geblieben, dass „*radix, quadratus et numerus simplex in solutionibus questionum inter se equantur sex modis ex quibus tres sunt simplices et tres compositi*" (I, 406); Pacioli aber begnügt sich nicht damit (fol. 144^v) zu sagen „*che in sei modi fra loro si possano aguagliare . . . . E per rispecto de questi.* 6. *aguagliamenti sonno.* 6. *regole formate. Quali el vulgo. Li sei capitoli de la cosa appella . . . .*", sondern er fügt auch bei (fol. 148), dass „*li prischi antecessori lor forze operative hanno strette a sei capitoli, alli quali poi proportionaliter infiniti altri si possano formare . . . .*" und diese seine *capitoli proporzionali* bezeichnen wir heute als die folgenden:

$$x^4 = a\,,\quad x^4 = ax\,,\quad x^4 = ax^2\,,\quad x^4 + a = bx^2\,,\quad x^4 + bx^2 = a\,,\quad x^4 = a + bx^2\,,$$

ja Pacioli behandelt auch (fol. 93^r und 94^r) die Gleichung:

$$x^8 + ax^4 = b\,,$$

und schliesst mit der Erklärung: „*E quello che abbiamo dedutto di censo de censo se habi a intendere de qualunca altra dignità proportionabiliter.*"

Wie stellt sich nun hierzu das, was wir bei unseren Cossisten finden? Schon die acht Regeln, welche der Text des aus der Mitte des 15. Jahrhunderts stammenden Wiener Manuscriptes (Nr. 5277) behandelt, zeigen einen deutlichen Fortschritt gegen Fibonacci und beweisen, dass auch nach Deutschland schon lange vor Pacioli die Kunde von der Lösung höherer auf quadratische rückführbarer Gleichungen gedrungen war, und die in demselben Wiener Manuscripte enthaltene Zusammenstellung von 24 Gleichungsformen, wie auch die von Riese ausführlich angegebenen 24 Regeln thun deutlich kund, dass man jenen Fortschritt klar erkennend die einzelnen überlieferten Regeln nun in systematische Reihenfolge zu bringen bestrebt war, und ich kann es nur als einen weiteren Fortschritt bezeichnen, wenn man darauf jene 24 Regeln durch Zusammenfassen gleichartiger Fälle vereinfachte und sie durch die acht Equacionen ersetzte, welche dann auch nicht nur die früheren, sondern beliebig viele neue Einzelfälle umspannten, falls nur die Unbekannten eine gewisse „proporcionalistische ordenung" einhielten. Ich kann mich also nicht mit Rudolff einverstanden erklären, welcher meint, dass die 24 Regeln „haben vnsere vorfaren gezogenn ausz denn acht equacionibus Algebre", sondern ich glaube das Umgekehrte begründet, wenigstens wahrscheinlicher gemacht zu haben; dass aber die „acht regeln der Cosz schon von den alten gesetzt" wurden, d. h. dass sie ziemlich lange vor Rudolff schon ausgebildet worden waren, gebe ich gern zu, und es widerspricht dem nicht, was Cardanus hierüber sagt: *„Post multa vero temporum intervalla tria capitula derivativa illis, quae Leonardus Pisanus reliquit, addita sunt incerto authore . . ."* Wann jedoch jene Weiterentwicklungen stattgefunden haben, ist im Einzelnen anzugeben unmöglich, immerhin scheint mir, dass aus den Spuren der deutschen Algebra die einzelnen Stationen nachträglich leichter zu erkennen sind, als aus den bis jetzt bekannt gewordenen der italienischen.

51. Es bleibt uns noch übrig, auch die als Beispiele verwendeten Aufgaben einer näheren Betrachtung zu unterziehen.

In dieser Beziehung wird es sich empfehlen, vor Allem in der ältesten umfangreicheren Beispielsammlung Umschau zu halten, im *Liber Abbaci* des Fibonacci: es ist eine lange Reihe von Aufgaben der verschiedensten Art und der manchfaltigsten Einkleidung, die wir da vor uns haben; Aufgaben, von denen manche nur in Einer Weise, manche aber auch mehrfach gelöst sind, durch Schlussrechnung oder durch die Regel vom falschen Satz oder auch durch Algebra.

Vergleichen wir mit diesen Aufgaben diejenigen, welchen wir bei Widman begegnen, so gewinnt des letzteren Rechenbuch neues Interesse: eine ganze Reihe von Widman's Aufgaben ist, was Drobisch in leicht erklärlicher Weise entgangen ist, ganz deutlich denen von Fibonacci nachgebildet, wir finden sie wieder mit ganz derselben charakteristischen Einkleidung und

nur geänderten Zahlwerthen, ja manche erscheinen geradezu wie wörtlich aus des Pisaners grossem Werke übernommen. So finden wir den durch Zwei oder Mehrere zu bewerkstelligenden Kauf von Pferden, wozu jedes Einzelnen Geld nicht ausreicht, auch bei Widman mehrfach vertreten; so auch die *Quaestiones arborum,* die von Cantor sog. Brunnenaufgaben, das eigenthümliche Vermächtniss eines Sterbenden an seine Kinder, die in einem Brunnen auf- und niedersteigende Schnecke, den Wanderer, welcher in einem Garten Aepfel aufliest und beim Verlassen desselben an die Thürhüter davon austheilt; den Brunnen, in welchen ein vierkantiger oder ein cylindrischer Stein geworfen wird; den Thurm, an welchen man eine Leiter anlehnt; den zwischen zwei Thürmen von verschiedener Höhe befindlichen Brunnen, zu welchem von den Thurmspitzen aus zwei Vögel in gleicher Zeit fliegen; den in einiger Höhe über der Erde abbrechenden Baum, dessen Gipfel dann den Boden berührt; die Arbeiter, welche für jeden wirklichen Arbeitstag einen gewissen Betrag erhalten, für jeden Tag des Feierns dagegen dem Bauherrn einen eben solchen herauszahlen müssen; den „leb wolff und hunt *(leo, leopardus, ursus)* die mit eynander 1 schaff essen“ — diese und ähnliche Aufgaben*) sind gewiss deutliche Anzeichen der Vererbung aus dem Anfang des dreizehnten bis zum Ende des funfzehnten Jahrhunderts und weiterhin**). Nun hat freilich Leonardo's Name bei keinem unserer Cossisten Erwähnung gefunden; aber wir sind offenbar genöthigt anzunehmen, dass, wenn nicht sein Abbacus selbst, so doch Auszüge aus demselben oder Verarbeitungen zumal von dessen Aufgaben verbreitet waren und auch ihren Weg nach Deutschland fanden. Dass wir das Erstere mit Sicherheit annehmen dürfen, geht auch aus Libri's Angabe (II, 44) hervor, wonach in Toscana eine blühende Schule Fibonacci's bestand, und aus der Thatsache, dass Pacioli und Cardanus vier Jahrhunderte später wieder an ihn anknüpfen, und die letztere Annahme findet ihre Bestätigung, wenn wir auch noch

*) Ich füge hier für eine Reihe von Aufgaben den Vergleich bei, indem ich dabei wieder die vollständige Gleichheit durch das Zeichen = und die offenbare Bildung von Aufgaben nach solchen von Fibonacci durch (=) andeuten will. Es entsprechen sich z. B.:

W 52^{v} (=) *F* 175	*W* 139^{v} (=) *F* 160	*W* 195^{v} (=) *F* 229
W 98^{r} (=) *F* 278	*W* 140^{v} (=) *F* 186	*W* 196^{r} (=) *F* 142
W 117^{r} (=) *F* 177	*W* 142^{r} = *F* 279	*W* 196^{v} (=) *F* 242, 347
W 118^{r} = *F* 190	*W* 147 (148, 149^{v}) (=) *F* 173	*W* 224 (225) (=) *F* 403
W 120^{r} (=) *F* 331	*W* 157^{v} (=) *F* 165	*W* 228 (=) *F* 397
W 134^{r} (=) *F* 183	*W* 193^{r} (=) *F* 284	*W* 228 (=) *F* 398
W 135^{r} = *F* 182	*W* 195^{r} (=) *F* 240	

Dabei bezeichnen die nach *W* und *F* folgenden Zahlen die Folien des Widmanschen Buches, bezw. die Seiten von Fibonacci's Abbacus nach Boncompagni's Ausgabe.

**) Ueber die Rückbeziehung solcher Aufgaben auf die frühere, z. B. indische Mathematik haben wir hier nicht zu handeln.

die Aufgaben prüfen, an welchen die nächsten Nachfolger Widman's, Rudolff und Riese, die Kunst der Coss deutlich gemacht haben.

Ueber Rudolff ging ja bald nach Erscheinen seines Buches die Rede um, dass er „seine Exempla ausz der Librey zu Wien gestolen". Schon Stifel hat ihm die Veröffentlichung der Beispiele, auch wenn er sie nicht selbst gebildet, zum Verdienste angerechnet; wie ungerecht jener Vorwurf aber gewesen, wird sich noch deutlicher herausstellen, wenn wir nachweisen, dass er sie grossentheils sogar aus gedruckten Schriften entnehmen konnte und entnommen hat. Uns interessiren hier zunächst diejenigen Aufgaben, welche, bei Widman nicht vorkommend, bei Rudolff in entsprechender Weise wie bei Fibonacci sich finden. Denn eine solche Identität wird sich doch wohl behaupten lassen, wenn letzterer (I, p. 177) am Fuss und an der Spitze eines 100 Palmi hohen Thurmes je einen Wurm *(serpens)* annimmt, der täglich $\frac{1}{3}$ Palmus hinauf- und $\frac{1}{4}$ herab-, bezw. $\frac{1}{5}$ herab- und $\frac{1}{6}$ hinaufkriecht, während Rudolff (I, Nr. 118) den Thurm zu $99\frac{59}{60}$ Ellen Höhe annimmt und einen Wurm „vnden am Turn der kreucht alle tag vber sich einer halben eln hoch. Vnd alle nacht kreucht er wider herab $\frac{1}{3}$ eln Vn̄ gleych auff denselbigē tag desz morgens fahnt ein schneck an zu kriechen zu oberst herab | alle tag $\frac{1}{4}$ eln . vnd alle nacht wider hinauff $\frac{1}{5}$ eln . . .", und die Identität wird wieder hervortreten in der andern wunderbaren Einkleidung (I, Nr. 116), wo von zwei um 40 Meilen von einander entfernten Städten „zwen botten zu gleych ausz gehn Der ein geht täglich 5 meyl | wirt yede nacht im schlaff von einem geyst hinder sich gefürt 2 meyl u. s. w." Dieses eine Beispiel diene für mehrere, welche in gleicher Weise, wie vorhin angegeben wurde, die mittelbare Abhängigkeit auch Rudolff's von Fibonacci deutlich genug darthun.

Noch sicherer werden wir dieselbe behaupten können, wenn wir Rudolff's Abhängigkeit von Widman, auch in solchen Beispielen, die letzterer mit Fibonacci gemeinsam hat, zu erweisen im Stande sind. Dass Rudolff, was bis jetzt, soviel ich sehe, noch Niemand hervorhob, sogar unmittelbar nach Widman's Buch gearbeitet hat, ergibt die in der Anmerkung*) durchgeführte Gegenüberstellung von Aufgaben, die Rudolff nach solchen seines Vorgängers gebildet und von der grossen Zahl solcher, die er völlig gleichlautend von diesem übernommen hat. Dass darunter in der That solche sind, die auf den Pisaner zurückweisen, ergibt die Vergleichung mit der vorangehenden Anmerkung.

---

*) Es kommen dabei von solchen Aufgaben Rudolff's, welche zu einer anderen als der ersten Regel der Coss gehören, etwa Nr. 4 und 5 aus der zweiten Regel in Betracht, welche mit *W* 51r, bezw. *W* 67r übereinstimmen; die übrigen hier identificirten sind sämmtlich den zur ersten Regel der Coss gehörigen Beispielen Rudolff's entnommen und mit ihren betreffenden Nummern bezeichnet, nämlich:

52. Reichere Aufschlüsse werden wir aus Riese's Coss gewinnen*). Hier (S. 16) sagt Riese selbst, er wolle „in disem buch die exempel erclernn In masenn ich sie In eynem altenn lateinischen fur viel Jaren geschribenn buch gefunden hab"; und nachdem er 37 solcher Exempel (Nr. 1—37) mitgetheilt und gelöst, fährt er weiter (S. 20): „Nach disen itzt erclertenn exempelnn habe ich im beruerten alten Buch gefunden am rande andere exempel auch auff die erste regel gehorende, eyner andernn handschriefft, wer der mathematicus gewessen Ist mir verporgenn dieweyl ich seynen namen nicht weyss, wil dir doch erzelenn vnd erclernn die exempel, welche er gesetzt hat." Und nun folgen weitere 16 Aufgaben (Nr. 38—53), nach deren Erledigung Riese abermals des lateinischen Buches Erwähnung thut.

Naturgemäss wirft sich hier die Frage auf, welches jenes „alte" oder wie Riese in der Widmung sagt, jenes „alte verworffene buch" gewesen sei. Berlet, der Herausgeber von Riese's Coss (S. 20, Anm.) versteht**) unter demselben das geschriebene Buch des in der Einleitung von uns erwähnten (oben S. 12) Andreas Alexander und will seine Ansicht begründen durch den Hinweis auf das Riese'sche Exempel Nr. 93, wo Riese von der Zeit spricht, „ehe mir das alte buch ader die exempla Andree Alexandri Zu handen komen seint". Das hier gebrauchte „ader" und die vorhin angegebene Stelle, wo er von seiner Unkenntniss des Verfassers redet, weisen aber Berlet's Ansicht zurück. Stichhaltiger scheint mir eine andere zu sein, auf welche man bei näherer Betrachtung der erwähnten ersten 53 Exempel wohl kommen kann. Es stehen da zunächst die Theilungen der Zahl 10 in zwei Theile von gegebener Beziehung zu einander, also Aufgaben, welche, wenn auch nicht mit denselben Zahlwerthen, bei Mohamed ben Musa vorkommen, aber auch in Fibonacci's Werk einen breiten Raum einnehmen; dann kommen die Aufgaben 14—21, welche nach dem Einen oder Andern gebildet sein können; kennzeichnend aber sind weiter folgende Aufgaben, welche in des Arabers Buch sich nicht finden, wohl aber in dem des Pisaners, und hier mit derselben Einkleidung,

Ru 1	= *W* 47^{r}	*Ru* 62	(=) *W* 151^{r}	*Ru* 145	= *W* 139^{r}
Ru 2	= *W* 47^{v}	*Ru* 63	= *W* 149^{v}	*Ru* 146	= *W* 140^{v}
Ru 3	= *W* 46^{v}	*Ru* 74	= *W* 161^{r}	*Ru* 147 (148, 149)	(=) *W* 141^{r}
Ru 20 (21—26)	= *W* 51^{v}	*Ru* 89	= *W* 166^{v}	*Ru* 150	(=) *W* 133^{r}
Ru 27	= *W* 52^{r}	*Ru* 107	= *W* 142^{v}	*Ru* 151 (152—156)	(=) *W* 175—180
Ru 11	(=) *W* 68^{r}	*Ru* 110	= *W* 142^{r}	*Ru* 183	= *W* 120^{r}
Ru 30	(=) *W* 65	*Ru* 123 (124—126)	= *W* 195^{v}	*Ru* 217	= *W* 157^{v}
Ru 31	= *W* 70^{v}	*Ru* 127	= *W* 195^{r}	*Ru* 220	(=) *W* 65^{r}.
Ru 38	= *W* 208	*Ru* 132 (133—140)	= *W* 118^{r}		
Ru 39 (40—47)	= *W* 228	*Ru* 142 (144, 145)	= *W* 139^{v}		

*) Dass in dieser Beispiele aus Widman's Rechenbuch vorkommen, lässt sich nach dem oben Gesagten als selbstverständlich erwarten.

**) Gerhardt (Monatsber. d. Berl. Akad. a. d. J. 1867, S. 49) schliesst sich Berlet an.

jedoch geänderten Zahlwerthen, oder auch wörtlich gleichlautend. Die gleiche Beziehung lässt sich auch für die letzten 25 von Riese's sämmtlichen 144 Aufgaben leicht ermitteln*).

Diese Thatsachen, in Verbindung mit dem aus Widman's Beispielen Gefolgerten, scheinen die Annahme wie aufzudrängen, dass in dem von Riese benützten „alten verworffenen Buch" zum mindesten eine Blumenlese von Beispielen nach Fibonacci's Abbacus enthalten gewesen ist.

Ich sage mit Absicht, dass in dem Buche das Genannte enthalten war — denn dass der von Riese benützte Manuscriptenband, wie wir wohl füglich jenes Buch bezeichnen können, auch noch Anderes enthielt, zeigen die Worte, mit welchen Riese seine Beispiele von Nr. 54 ab einleitet und zeigen auch diese Beispiele selbst.

Libri hat nämlich in Paris drei lateinische Handschriften eines Werkes aufgefunden und veröffentlicht**), welches von einem gewissen Abraham (nach Libri vielleicht Abraham Ebn Ezra?) *„secundum sapientes Indos"* ausgearbeitet wurde; in diesem wird eine Reihe von 25 auf Gleichungen des ersten Grades führenden Textaufgaben gestellt und durch den sog. falschen Satz gelöst: nicht weniger als dreizehn dieser Aufgaben, in derselben Reihenfolge, mit demselben Wortlaut und mit denselben dabei gegebenen Zahlwerthen enthält nun Riese's Coss (Nr. 54—67)! Hierdurch erklären sich denn auch Riese's Worte, welche er diesen Aufgaben vorausschickt (S. 22): „Volgenn hernach andere exempel so ich Adam Ries eyner anderen schrifft Im lateinischen buch an einer andern stel gefunden Die selbigen Ins Deutsch gebracht also . . ." — und es begründet sich damit meine Ansicht betreffs des alten Buches, welches Riese als Quelle diente.

Freilich konnten unsere Cossisten Aufgaben, wie die genannten, nicht unmittelbar übernehmen; für sie war nur die Hauptsache, dieselben mit Hülfe der Coss zu lösen, und wie hoch man solches Lösen schätzte, ergibt sich z. B. schon daraus, dass Riese's Freund, Hans Conrad, für eine solche

---

*) Ich füge, von den erklärten Abkürzungen Gebrauch machend, folgende Identificirungen bei:

Ri Nr. 25	= *F* 190	*Ri* 45	= *F* 212	*Ri* 126	= *F* 334
Ri 26 (27, 28)	(=) *F* 190	*Ri* 47	= *F* 245	*Ri* 128 (129)	(=) *F* 330
Ri 31	= *F* 228	*Ri* 48	(=) *F* 242	*Ri* 133	(=) *F* 179
Ri 33 (34)	= *F* 177	*Ri* 120	= *F* 229	*Ri* 140	(=) *F* 234
Ri 35	(=) *F* 278	*Ri* 121	= *F* 231	*Ri* 142	(=) *F* 177
Ri 37	(=) *F* 323	*Ri* 122	(=) *F* 240	*Ri* 143	(=) *F* 229
Ri 40	(=) *F* 177	*Ri* 123	(=) *F* 342	*Ri* 144	(=) *F* 397

**) *Libri*, *Histoire des Sciences mathématiques en Italie.* I, p. 124 u. p. 304 bis 369 unter dem Titel: „*Liber augmenti et diminutionis vocatus numeratio divinationis, ex eo quod sapientes Indi posuerunt, quem Abraham compilavit et secundum librum qui Indorum dictus est composuit.*"

Lösung „hat gegebenn eynem schwartzen munich prediger ordens, welcher aquinas genant wartt 1 fl.“

Aehnlich mussten auch algebraische Lösungen aufgesucht werden für Aufgaben, die man aus anderen, bisher noch nicht erwähnten Quellen entnahm. Besonders kennzeichnend sind in dieser Beziehung gewisse Aufgaben, die wir bis jetzt absichtlich noch nicht hervorgehoben haben. Da wird z. B. eine gewisse Stückzahl Vieh von drei Arten, jede zu bestimmtem Preis, im Ganzen um eine der Stückzahl gleiche Anzahl von Münzen verkauft, — oder von zwei Geldbesitzenden wünscht jeder vom anderen die Münzeinheit zu erhalten und sagt, dass er dann 2, bezw. 3 mal soviel als der andere habe, — oder das Alter Jemandes wird dadurch angegeben, dass es heisst, das doppelte Alter vermehrt um das Halbtheil und ein Drittheil plus 1 gebe die Summe gleich 100 Jahren, — oder ein Hund verfolgt einen Hasen bis zum Einholen, — oder ein Sterbender hinterlässt eine schwangere Wittwe und den letzten Willen betreffs der Vermögenstheilung, falls sie einen Sohn und falls sie eine Tochter gebäre, während sie in Wahrheit dann Zwillinge, Sohn und Tochter, zur Welt bringt. Diese und noch wenige ähnliche Aufgaben finden sich bald bei allen, bald nur bei einzelnen unserer Cossisten und lassen sich bis zu Fibonacci, ja noch weiter zurück verfolgen: sie alle finden sich schon unter den spätestens dem 10. Jahrhundert angehörigen und gewöhnlich dem Alcuin, dem Zeitgenossen Karls des Grossen, zugeschriebenen „Aufgaben zur Verstandesschärfung“. Besonders interessant sind unter den angegebenen die erste und die letzte: die erste, weil bei Alcuin (Nr. 38, 39) von 100 Ochsen, Eseln, Schafen die Rede ist, welche zusammen um 100 verkauft werden, während Fibonacci (I, 165) beide Zahlen auf 30 erniedrigt, während die Deutschen dagegen wieder zu der ursprünglichen Stückzahl 100 zurückkehren, also wohl die alcuinischen Aufgaben oder deren Aequivalente selbst benützt haben — und die letzte, weil Cantor überzeugend nachgewiesen hat*), dass sie entschieden römischen Ursprunges und durch Einführung aus Rom auf deutschen Boden gekommen ist.

53. Wenn wir nun zum Schlusse das Ergebniss unserer Untersuchung zusammenfassen, so können wir anknüpfen an das, was wir oben in der Vorgeschichte (S. 5 ff.) dargelegt haben. Von den Arabern, und zwar von dem berühmten Werke des Mohamed ben Musa, geht der Hauptantrieb zur Betreibung der Algebra aus, und wie dieses zunächst für Italien der Grundstein wurde, welchen der grosse Meister Fibonacci in seinen Bau übernahm und auf welchem er den ganzen von der Algebra handelnden Theil desselben errichtete und ausführte, so ist jenes Werk auch in den folgenden Jahrhunderten für Deutschland von grundlegender Bedeutung

*) Cantor, Die röm. Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst; S. 146—149.

geworden, indem man hier auch später wieder zurückkehrte zu ihm, das vielleicht schon im 13. Jahrhundert — ob aus Italien oder auf dem Umweg über Spanien und Frankreich, ist vorerst nicht zu entscheiden — nach Deutschland kam und in lateinischen Uebersetzungen daselbst bekannt blieb. Es wäre aber fast wunderbar, wenn bei den vielfachen Beziehungen zwischen Deutschland und Italien Werke und Leistungen Leonardo Fibonacci's den über die Alpen südwärts Gewanderten unbekannt geblieben wären, da ja er selbst einst vor dem Kaiser Friedrich II. erschien, „dem es gefiel, von den Subtilitäten der Geometrie und der Zahlen zu hören" *) und da er diesem sein *Liber quadratorum* übersandte, weil er hörte, „dass Kaiserliche Majestät sein *Liber abaci* zu lesen würdigte", und gar erst im 15. Jahrhundert, wo die bedeutendsten deutschen Mathematiker nach Italien pilgerten und sich oft lange daselbst aufhielten! Freilich eine direkte Erwähnung seiner ist mir bis jetzt unbekannt geblieben, und so mag es wohl sein, dass dritthalb Jahrhunderte nach seinen Lebzeiten sein Name, vielleicht auch seine Werke nicht mehr bekannt waren; dann müssen wir aber dem oben Nachgewiesenen zufolge annehmen, dass der Inhalt seiner Algebra, zum mindesten seine Aufgaben, in Bearbeitungen nach Deutschland gelangten. Was aus dieser Quelle zufloss, wurde im Anschlusse an Mohamed's Algebra und nach deren Methode allmählig verarbeitet, zugleich mit dem, was aus anderen Quellen kam, bezw. was auf anderen Wegen früher gekommen war und in Bruchstücken sich erhalten hatte.

Denn so müssen wir doch wohl sagen, wenn wir einige von Alcuin's Aufgaben zur Verstandesschärfung, und gerade die der Einkleidung nach am meisten charakteristischen, bei Fibonacci durch Raisonnement gelöst, bei unseren Cossisten aber als Beispiele zur Anwendung der Coss verwerthet finden. Und war hier ein, soweit wir bis jetzt zu sehen vermögen, dem römischen Boden entsprossenes Element mit aufgenommen worden, so fehlte es auch nicht an einem, welches, wenn unsere Quellen die Wahrheit sagen, weitab davon erwachsen war: „*secundum sapientes Indos*" will ja der genannte Abraham gearbeitet haben, so dass sich jetzt nach Jahrhunderten wieder eine Spur beigemischt hätte nahezu unmittelbar dem Gedankenkreise entnommen, aus dem die Araber selbst wohl ihr ganzes Wissen von Algebra geschöpft haben.

Wir sehen so, wie sich eine Reihe verschiedener Ingredienzien dem arabischen Safte beimischt, wie aber die einzelnen Bestandtheile nicht lose neben einander liegen bleiben: es tritt ein Assimilirungsprocess ein, dessen Ergebniss in Rudolff's und Riese's Coss sich zeigt, doch so, dass es Stifel's Geist vorbehalten bleibt, die ganze Entwickelung zu einem vorläufigen Abschlusse zu bringen.

*) *Scritti di Leon. Pis. ed. Boncompagni.* II. p. 253.

Der

Traktat des Jordanus Nemorarius

„De numeris datis“.

Herausgegeben

von

P. Treutlein,
Professor am Gymnasium zu Karlsruhe

Vorwort.

In meinem unmittelbar vorangehenden Aufsatze über „die deutsche Coss“ habe ich bereits angegeben, wie ich bei meinen Nachforschungen bezüglich der Quellen, aus welchen die deutsche Algebra beim Anfange der Neuzeit geschöpft hat, auf das von Widman (1489) citirte „buch. Data genant“ aufmerksam wurde, und wie ich nachträglich Bestätigung fand für meine Vermuthung, dass jenes Buch kein anderes sei als des Jordanus Nemorarius Traktat *„De numeris datis“*, von welchem ich manchmal freilich den Titel, aber kaum je eine genauere Inhaltsangabe gelesen hatte.

Den Inhalt dieses Traktats im Einzelnen kennen zu lernen, musste mein Bestreben sein: so liess ich mir denn die Baseler Handschrift desselben kommen und bringe nun, was diese enthält, auf den nachfolgenden Blättern zum Abdruck, weil ich glaube, dass es der mathematisch-historischen Forschung nur angenehm sein kann, wenn solche Dokumente zur Veröffentlichung gelangen.

Zuvor möchte ich aber noch einige Bemerkungen vorausschicken, Bemerkungen, welche sich auf die Persönlichkeit des Verfassers unseres Traktats und dann auf den Inhalt des letzteren selbst beziehen sollen.

Was man über die Persönlichkeit des Jordanus Nemorarius bis jetzt als der Wahrheit vermuthlich am nächsten kommend wusste, findet sich in den Mittheilungen, welche Chasles im J. 1841 hierüber machte (*Comptes Rendus des séances de l'Acad. des sciences à Paris*, *tome* 13, p. 520 u. 506) und welche ich hier in Uebersetzung beifüge. „Jordanus Nemorarius — so sagt Chasles — hat unter dem Titel *De numeris datis* eine Abhandlung über Algebra verfasst, in welcher er eine grosse Anzahl von Gleichungen des ersten und zweiten Grades auflöst. Dieses Werk, welches die Historiker wenig citiren und von dessen Gegenstand man vielleicht noch niemals gesprochen hat, ist gleichwohl von grosser Wichtigkeit in der Geschichte der Algebra. Es hatte die Aufmerksamkeit von Regiomontanus*) auf sich gezogen, dann die von Maurolycus, welche sich beide vornahmen, es heraus-

*) Regiomontan sagt von diesem Werke: *„Tres libros de datis numerorum pulcherrimos edidit Jordanus“* (*Oratio in praelectione Alfragani. Norimbergae* 1537).



zugeben*). Die Methode des Verfassers ist sehr bemerkenswerth; er macht alle seine Ueberlegungen an Buchstaben, eine Methode, welche er auch in seiner Abhandlung über den Algorismus befolgte. Das Werk ist eingetheilt in vier Bücher, welche zusammen 113 Fragen umfassen**).

„Jordanus war ein sehr gelehrter Geometer, welcher über alle Zweige der Mathematik geschrieben hat, selbst über die Statik, denjenigen Theil, in welchem er erst sehr spät Nachahmer fand. Man weiss nicht genau das Datum seiner Werke. Man hat ihn in das 11., 12. und endlich in das 13. Jahrhundert versetzt, indem man sich dabei auf eine Thatsache stützte, welche ich für ungenau halte, dass nämlich Jordanus den Campanus citirt habe; und die Verfasser der *Histoire littéraire de la France* sagen, dass er seine Arbeiten ein wenig nach 1185 begonnen und seinen Lebenslauf im Jahre 1235 beendigt haben kann, so dass er also ebensowohl dem 12. als dem 13. Jahrhundert angehören würde. Ein eingehendes Studium einiger seiner Werke, besonders seines Algorismus, hat mich überzeugt, dass sie früher sind als die von Fibonacci, von Alexander von Villedieu, von Sacrobosco, von Campanus etc., sämmtlich Schriftsteller des 13. Jahrhunderts. Deshalb habe ich Jordanus in meinem Memoire über die Buchstabenalgebra gegen das Ende des 12. Jahrhunderts angesetzt."

Diese Angabe von Chasles über des Jordanus' Lebenszeit wäre auch das Einzige gewesen, was ich mitzutheilen vermochte, wenn ich nicht durch Prof. Cantor in Heidelberg erfahren hätte, dass der um die Geschichte der Mathematik so verdiente Fürst Boncompagni zu Rom im Besitze genauerer Nachweise über unseren Gegenstand sei. Auf meine Bitte übersandte mir dann Fürst Boncompagni mit liebenswürdiger Bereitwilligkeit Nachrichten von den Ergebnissen seiner Forschungen und veranlasste zugleich Prof. Cantor, mir die Briefe zur Verfügung zu stellen, in welchen er selbst Letzterem schon früher ausführlichere Mittheilungen über unseren Gegenstand gemacht hatte. Mit ausdrücklicher Ermächtigung des Fürsten Boncompagni — dem ich wie Prof. Cantor deshalb auch hier meinen besten Dank sage — entnehme ich nun jenen am 19. und 21. December 1876 und am 13. Januar und 2. November 1877 an Cantor gerichteten Briefen und dem an mich gerichteten vom 20. November 1878 die nachstehenden Aufklärungen.

Boncompagni macht da zunächst aufmerksam auf eine (ihm selbst,

---

*) Vgl. das Leben des Regiomontan von Gassendi, p. 88; Weidler, *Hist. Astron.* p. 311. — Und die Liste der Arbeiten, welche Maurolycus herausgeben wollte . . . bei Libri III, p. 243.

**) Dieses Werk ist Manuscript geblieben; es existiren davon drei Abschriften in den Pariser Bibliotheken, nämlich *Manuscrits* 8680 *A*, *anc. fonds et Résidu Saint-Germain*, *paquet* 2, Nr. 6 der königl. Bibliothek, und *Manuscr.* Nr. 1258 der *Bibliothèque Mazarine*.

wie er sagt, schon seit sehr langer Zeit bekannte) Stelle im *Chronicon* des Nicolas Trivet, eines englischen Schriftstellers des 14. Jahrhunderts. Diese bedeutsame Stelle lautet wörtlich*) wie folgt:

„*Hoc anno* (— *i. e.* 1222 —) *in Capitulo Fratrum Praedicatorum generali tertio, quod Parisiis celebratum est, successor beati Dominici in Magisterio Ordinis Fratrum Praedicatorum factus est frater Iordanus, natione Teutonicus, dioecesis Moguntinae, qui cum Parisiis in scientiis saecularibus et praecipue in Mathematicis magnus haberetur, libros duos admodum utiles, unum de Ponderi — (sic!) et alium de Lineis datis dicitur edidisse. Postea ad studium Theologiae se transferens tandem ad praedicationem Fratris Reginaldi de quo supra facta est mentio, ordinem Praedicatorum ingressus in die Cinerum, dum Fratres illam Antiphonam »Immutemur Habitu« decantarent.*“

Schon diese eine Stelle, welche nicht oberflächlich nur einen gewissen Jordanus, sondern ihn als Mathematiker erwähnt, und selbst zwei der in der That ihm zukommenden mathematischen Werke hervorhebt, schon diese eine Stelle beweist, sofern man überhaupt Urkunden der genannten Art als beweiskräftig annehmen will, die Identität des Meisters vom Predigerorden und des Mathematikers Jordanus, und sie gibt selbst bestimmten Aufschluss über die Nationalität und die Lebenszeit unseres Jordanus.

Hiermit stimmt überein, was Boncompagni aus dem *Chronicon quinque priorum ordinis magistrorum quod vulgo dicitur chronicon Humberti* anführt: „. . . *fuit Teutonicus de Saxonia villa quae dicitur Boreberge in dioecesi Moguntina oriundus*“.

Boncompagni hat aber auch noch andere Zeugnisse ausfindig gemacht, welche mit den besprochenen durchaus im Einklange stehen.

So verweist er auf das Manuscript I.I. 32. der Magliabechiana zu Florenz, welches aus der St. Marcus-Bibliothek ebendaselbst stammt und am obern Rande des Blattes 124^{v} die Notiz trägt:

*) Boncompagni hat mir sowohl als Cantor eine doppelte, ja dreifache Abschrift der obigen Stelle übersandt. Der Wortlaut der ersten ist entnommen aus: *Nicolai Triveti Dominicali Annales Sex Regum Angliae E praestantissimo codice Glastoniensi nunc primum emendate edidit Antonius Hall A. M. Coll. Reg. Oxon. Socius. Oxonii. E Theatro Sheldoniano.* M.DCC.XIX. p. 177—178. — Der Wortlaut der zweiten Abschrift stammt aus: *Veterum Aliquot Scriptorum qui in Galliae Bibliothecis maxime Benedictinorum latuerant Specilegium Tomus Octauus continet etc. Prodeunt nunc primum in lucem opera et studio Domni Lucae Acherii e Congregatione Sancti Mauri Monachi Benedictini. Parisiis.* CIƆ.IƆC.LXVIII. p. 572—573. — Die dritte erwähnte Abschrift der gleichlautenden Stelle ist einer spätern Ausgabe des eben genannten Werkes entnommen, mit dem Titel: *Spicilegium Siue Collectio Veterum Aliquot Scriptorum Qui in Galliae Bibliothecis Delituerant Olim editum operâ ac studio D. Lucae d'Acherey . . . . per Ludovicum Franciscum Joseph De La Barre. Tomus III. Parisiis.* M.DCC.XXIII. p. 188.

lib iordani de tangul de almania;“

und als dem entsprechend citirt Boncompagni den von Montfaucon mitgetheilten*) Katalog der zur St. Marcus-Bibliothek zu Florenz gehörigen Manuscripte, wo jene Schrift aufgeführt ist mit den Worten:

„Liber Jordani de Alamania de triangulis“.

Wie vorsichtig man übrigens bei solchen Citaten sein müsse und wie nöthig oft eine specielle Nachprüfung sei, hat Boncompagni gelegentlich unseres Falles dargethan.

Antoine Marie Zanetti schreibt**) nämlich (1741) in Bezug auf das der St. Marcus-Bibliothek zu Venedig angehörige Manuscript Nr. CCCXXXII, welches jetzt als „Klasse XI. *(codices latini)*, Nr. 6“ catalogisirt ist, es sei darin enthalten *„Iordani de Nemore de Alamania Arithmetica“* — und Tiraboschi***) entscheidet hiernach (1774) über die Nationalität des Jordanus — und ganz neuerdings führt Joseph Valentinelli†), wahrscheinlich Zanetti folgend, jenes selbe Manuscript an mit den Worten: *„Iordani de Nemore, alemanni, de elementis arithmeticae artis libri decem“.* Boncompagni ersucht nun André Tessier in Venedig, diese Angaben zu verificiren, erhält aber von diesem die von einer Beschreibung der Handschrift begleitete briefliche Mittheilung (8. Jan. 1877), er habe in derselben den Jordanus Nemorarius weder als *„de alemania“* noch auch als *„alemanni“* bezeichnet auffinden können. Wenn es sich vielleicht gar auch mit der einem Oxforder Manuscript beigelegten††) Benennung *„Iordani [de Saxonia] liber de ponderibus . . .“* in gleicher Weise verhalten sollte, so ist doch durch die vorhin beigebrachten Angaben, wie mir scheint, im höchsten Grade wahrscheinlich gemacht, wenn nicht bewiesen, dass der zweite Ordensgeneral vom Predigerorden Jordanus und der Mathematiker Jordanus ein und dieselbe Persönlichkeit ist, welche aus dem Gebiete der Mainzer Diöcese stammt.

In voller Uebereinstimmung hiermit und mit der durch Chasles aus „eingehendem Studium einiger seiner Werke“ abgeleiteten Lebenszeit (= um 1200) steht das, was uns über Leben und Tod des Ordensgenerales Jordanus überliefert ist. Dass derselbe im J. 1222 zum Ordensmeister

---

*) *Bibliotheca Bibliothecarum manuscriptorum noua, tom. I. Parisiis* 1739, p. 419—429, insbes. 427 Zeile 30.

**) In seinem Katalog der Manuscripte der St. Marcus-Bibliothek zu Venedig: *Latina et italica D. Marci Bibliotheca etc.* 1741, p. 141, Z. 20.

***) *Storia della letteratura italiana, t. IV. Modena* 1774, p. 137: *„Ma finalmente mi è avvenuto di osservare, che in un codice della Biblioteca di S. Marco in Venezia* („*Codic. Latin. Bibl. S. Marci*, p. 141“) *egli è chiaramente detto Tedesco: Jordani de Nemore de Alemania Arithmetica; e noi perciò non abbiam più alcun diritto ad ammoverarlo tra i nostri.*“

†) *Bibliotheca manuscripta ad S. Marci Venetiarum. Codices Mss. Latini. tom. IV., Venetiis* 1871, p. 218.

††) Berichtet in: *Scriptores Ordinis Praedicatorum etc., tom. I.*, p. 97, Zeile 6—9.

erwählt wurde, habe ich schon oben angegeben*); und dass er am 13. Februar 1236 starb, ist uns ebenfalls sicher überliefert.

Wir werden also in Zukunft die Blüthezeit des Jordanus Nemorarius auf den Anfang des dreizehnten Jahrhunderts festsetzen müssen.

Wenn ich nun auf den Inhalt desjenigen Werkes unseres Jordanus eingehe, welches weiter unten zum ersten Male, freilich nicht ganz vollständig, zum Abdruck gelangt, so habe ich zunächst über meine Quelle mich zu äussern. Als solche benutzte ich den der Stadtbibliothek zu Basel gehörigen, unter F. II. 33 verzeichneten Folioband von Manuscripten, welch letztere im Allgemeinen dem 14. Jahrhundert angehören und meist mathematischen oder astronomischen Inhaltes sind. Speciell unser Manuscript ist wohl in den Jahren zwischen 1350 und 1380 geschrieben und findet sich auf fol. 138^v bis 145^v des genannten Bandes.

Es zeigt, zunächst rein äusserlich betrachtet, auffällige Unterschiede gegenüber den vorhin mitgetheilten Angaben: während Regiomontan von drei und Chasles von vier Büchern redet, aus welchen das ganze Werk bestehen soll, zeigt unser Manuscript durchaus keine grösseren Abtheilungen, welche als Bücher oder Kapitel sich bezeichnen liessen, sondern es sind fortlaufend an einander gereiht lauter einzelne Abschnitte, deren jeder im ersten Satze fast regelmässig einen arithmetischen Lehrsatz ausspricht, welchem eine Erklärung oder ein Beweis sammt Zahlenbeispiel nachfolgt. Die Numerirung dieser Abschnitte ist offenbar von späterer Hand und in leichtsinniger Weise beigefügt; denn der Abschnitt z. B., welchem ich im Abdruck des Textes Nummer 50 gegeben habe, trägt im Manuscript 41 trotz anfänglich richtiger Numerirung, und im weiteren Verlaufe bringt dieses nach der auf fol. 142^v stehenden Nummer 49 auf dem Anfange der nächsten Seite als folgende Nummer nochmals 40 statt 50. So kommt es, dass der Traktat im Manuscripte scheinbar nur 83 Abschnitte enthält. Ich habe nun die Nummern richtig gestellt, und so zählt der unten folgende Text im Ganzen 95 einzelne Abschnitte, deren letzter mitten im Satze mit dem Worte *rintfleiz* abbricht, vermuthlich dem Namen (Rintfleisch) des Abschreibers unseres Manuscriptes. So zeigt sich, dass dieses den Traktat des Jordanus nicht vollständig gibt; wie viel an demselben fehlt, würde eine Vergleichung der drei Pariser Handschriften zeigen, welche mir jedoch nicht möglich war. Es gibt übrigens die oben mitgetheilte Aussage von Chasles, dass das ganze Werk „113 *questions*“ umfasse, der Vermuthung Raum, dass unserem Manuscripte nicht zu Vieles fehlt: es würden also im Ganzen 18 Abschnitte, d. h. wenn auch nicht

---

*) *Bernardus Guidonis: Scriptores Ordinis Praedicatorum, tom. I.*, p. 98: *„Idibus februarii anno Dñi MCCXXXVI“*.

nach Umfang und Bedeutung, so doch der Anzahl nach etwa 16 Procent des gesammten Traktates fehlen.

Ich möchte noch beifügen, dass das Manuscript Spuren genug zeigt, aus denen sich schliessen lässt, dass der Schreiber desselben kein sachverständiger Mann war. An manchen Stellen des Manuscriptes hat desshalb schon eine spätere zweite Hand Zufügungen oder Veränderungen vorgenommen, welche ich in [ ] eingeschlossen und in den Text aufgenommen habe. An anderen Stellen habe ich offenbare Verschreibungen richtig gestellt und meine Lesart in runden Klammern ( ) beigefügt; gab letztere Zweifeln Raum, so fügte ich meiner Lesart ein ? bei; wollte ich eine eigene Lesart nicht geben, obwohl ich die vorhandene für unrichtig hielt, so habe ich im Ausdrucke nach dem betreffenden Worte ein (?) eingeschaltet. Die Interpunktion des Manuscriptes wurde beibehalten, doch habe ich an einigen Stellen zur Erleichterung des Verständnisses einen Trennungspunkt (.) eingeschoben. Dass die §§ 18 und 42 wohl Verstümmelungen des Textes zeigen, ist leicht zu vermuthen.

Geht man nun näher auf den Inhalt ein, so erweist sich dieser als eine Zusammenstellung einer ganzen Reihe von Fällen, in welchen, und der gleichzeitigen Angabe der bezüglichen Bedingungen, unter welchen jedesmal eine einzelne oder mehrere jenen bekannten Bedingungen genügende Zahlen selbst als bekannt anzusehen sind. Der Ausspruch einer solchen Thatsache steht regelmässig am Anfange des einzelnen Abschnittes, ist im Manuscripte fast immer durch besondere stehende Schrift hervorgehoben und wurde entsprechend auch bei der Wiedergabe des Textes durch gesperrten Druck ausgezeichnet. Auf die Anführung des betreffenden Lehrsatzes folgt dann stets eine Verdeutlichung desselben, welche wir im Sinne des Autors als einen Beweis zu betrachten haben, dessen Sinn sich aber oft genug nur erschliessen lässt aus dem jedesmal als Drittes im Bunde nachfolgenden Zahlenbeispiele. In Bezug auf jenen Beweis hat nun Chasles als besonders bemerkenswerth hervorgehoben, dass der Verfasser des Traktates „alle seine Ueberlegungen an Buchstaben macht". Nun möchte es im ersten Augenblicke scheinen, als ob an dieser Bezeichnung von Zahlen durch Buchstaben nichts besonders Auffälliges sei: ein Blick in den *Liber Abbaci* des Leonardo Fibonacci (1202) oder in den vielleicht gleichzeitigen *Algorithmus demonstratus,* den man lange genug fälschlicherweise dem Regiomontanus zuschrieb, der aber vielleicht eben unserem Jordanus zuzuweisen ist, belehre uns, dass jene Buchstaben eigentlich Bezeichnungen sind für die geometrisch dargestellten Strecken, welche die Grösse der in Betracht kommenden Zahlen versinnlichen; in den beiden genannten Werken seien diese Strecken stets mitgezeichnet, bei Jordanus dagegen ausgelassen. Aber doch ist ein beträchtlicher Unterschied: denn Jordanus bezeichnet nicht nur die zu Anfang einer Aufgabe auftretenden gegebenen oder die

gesuchten Zahlgrössen durch Buchstaben, sondern er stellt auch bei den Zwischenrechnungen die Ergebnisse der einzelnen Rechnungsarten je durch besondere Buchstaben dar, benutzt aber auch die einfache Nebeneinanderstellung der Summanden, um deren Summe anzudeuten. Da übrigens des Fibonacci Erwähnung gethan wurde, so sei hier gleich beigefügt, dass Manches in unserem Texte an des grossen Pisaners *Liber Abbaci* erinnert: so etwa die §§ 21 und 22 an Stellen der von Libri veröffentlichten Redaktion (Libri II, p. 436 und 468; II, 474), insbesondere aber die in den ersten 29 Paragraphen nicht weniger als 21 mal beliebte Wahl des Beispieles einer Theilung der Zahl 10 in zwei Theile; dass dies auf arabischen Ursprung hinweist, habe ich oben (S. 121) hervorgehoben Das Verfahren, zur Lösung zu gelangen, besteht meist darin, dass die complicirteren Aufgaben auf zuvor behandelte einfachere zurückgeführt werden, und eben in dieser Rückführung zeigt der Verfasser oft genug Klugheit und Gewandtheit, die entschieden einer besonderen Erwähnung würdig ist. Gerade auf diesen Umstand ist beim Streben nach Verständniss seiner Ausführungen hauptsächlich zu achten, und es wäre wohl angezeigt gewesen, wenn ich den Text mit erläuternden Bemerkungen in der heute üblichen Zeichensprache begleitet hätte; doch wäre dadurch der Umfang des vorliegenden Heftes noch mehr als schon geschehen und ursprünglich bewilligt ausgedehnt worden, so dass ich vielleicht ein ander Mal hierauf zurückkommen werde.

Verfolgt man den Inhalt des im Texte Gebotenen ins Einzelne, so sieht man leicht, dass die 29 ersten Paragraphen einen besonderen Abschnitt bilden, in welchem die Möglichkeit aufgezeigt wird, dass und wie aus bekannten Beziehungen der Theile eines Ganzen unter einander und etwa noch zu gegebenen Zahlen die Theile selbst bestimmt werden. Der Paragraph 30 geht dann über zu Verhältnissen von Zahlen und zu der daraus möglichen Ableitung anderer Verhältnisse und der Grösse der Zahlen selbst, und ich möchte den mit § 30 beginnenden Abschnitt bis § 58 (exclus.) ausdehnen, von wo ab der Text sich speciell mit Proportionen beschäftigt. Dass jedenfalls mit § 30 das zweite „Buch" unseres Traktates beginnt, geht aus dem oben schon (S. 115) mitgetheilten Citate des Adam Riese hervor, welcher das Beispiel des § 52 unseres Textes geradezu als die „23. proposicion des andern buchs" in seine Coss aufgenommen hat. Besondere Erwähnung verdient hier, dass Jordanus zur Lösung seiner Aufgaben 31, 56 und 57 die schon von den alten Indern benutzte Regel vom sog. falschen Satze verwendet und dabei ausdrücklich diese Methode als *„opus arabum in partibus"* (56) und (in § 57) als *„opus parcium quo vtuntur arabes"* namhaft macht, und dass an der genannten Stelle unser Manuscript auch indisch-arabische Zahlzeichen enthält, ja diese auch in unmittelbarer Zusammenstellung mit dem römischen X unter Benutzung des Stellenwerthes. Ob man dann das dritte Buch unseres Traktates

bis § 85 erstrecken*) oder ob man ihm von § 58 ab den ganzen Rest zuweisen will, ist mehr Sache des Beliebens; doch hätte man mit ersterer Wahl vielleicht das Richtigere getroffen, da von der genannten Stelle ab bis zum Schlusse wenigstens unseres Manuscriptes die rein und gemischt quadratischen Gleichungen in compakter Masse auftreten; bezüglich deren Lösung und der ihnen zugeschriebenen Anzahl von Wurzeln muss ich auf den Text verweisen.

So ist es möglich, aus dem ohne Hauptabtheilungen uns vorliegenden Texte dennoch drei oder gar vier Bücher herauszulösen und damit der Angabe von Regiomontanus oder der von Chasles Genüge zu leisten. Sicheren Aufschluss bieten wohl die Pariser Manuscripte, und ich dachte mir, man könne solche vielleicht auch gewinnen aus der (nach Berlet's Angabe) von Adam Riese veranstalteten deutschen „Uebersetzung" unseres Traktates, welche noch handschriftlich vorhanden ist und der Kirchen- und Schulbibliothek zu Marienberg in Sachsen angehört. Ich liess mir daher den von Riese's eigener Hand geschriebenen Sammelband kommen, fand darin auch (S. 507—531) dessen „Exempla ausz den Datis Jordani Durch die Coss gemachet", fand aber keine Uebersetzung, sondern, wie auch schon die angegebene Ueberschrift zeigt, eine Bearbeitung. Riese citirt stets den in unserem Abdruck schräg gedruckten Anfang einer jeden Nummer in lateinischer Sprache, fast durchgehends wörtlich übereinstimmend mit dem Texte der Baseler Handschrift**), fügt sofort eine deutsche Uebersetzung des betreffenden Lehrsatzes bei und wählt das bei Jordanus stehende Beispiel, um dieses dann mit Hülfe der cossischen Bezeichnungen und Regeln zu lösen.

Leider reicht Riese's Bearbeitung nicht weiter als bis Nr. 33 unseres Textes, doch so, dass die letzten drei Nummern schon durch 1, 2, 3 bezeichnet sind, was also eine Bestätigung ist dessen, was ich oben über die Ausdehnung des ersten Buches angegeben habe. Eine weitere Bestätigung liegt auch in den Worten Riese's, mit welchen er zu der genannten neuen Nummer 1 übergeht: „Volget also der ander tractat von den proportionibus".

Zum Schlusse habe ich noch beizufügen, dass mir beim Lesen des

---

*) Vgl. übrigens die in § 93 sich findende Verweisung: „. . . . secundum operacionem decime presentis . . ." Dieselbe scheint ebenfalls für ein „Viertes Buch" zu sprechen, kann sich aber doch wohl nur auf § 90 beziehen; wie aber dann die Numerirung gemacht werden muss, weiss ich nicht — es sei denn, dass man eine Auslassung von (5) Paragraphen anzunehmen hätte.

**) Die Riese'schen Nummern 1—16, 18—20, 23, 25, 26, 30 entsprechen bezüglich den Nummern 1—16, 17—19, 23, 24, 25, 29 bei Jordanus; seine Nummern 21, 22, 28, 29 hat Riese vereinfacht abgeleitet aus 22, 23, 27, 21 unseres Textes von Jordanus, als Nr. 27 hat er eine unbestimmte Aufgabe aufgenommen, und auch seine überaus einfache Nummer 17 hat Riese eingeschaltet.

Baseler Manuscriptes mein gelehrter Freund und ausgezeichneter Handschriftenkenner, Herr Hof- und Landesbibliothekar Dr. Holder in Karlsruhe, behülflich war, dass er insbesondere das Alter der Handschrift bestimmte und mit mir die Collation meiner Abschrift derselben vornahm. Ich sage ihm dafür auch hier meinen herzlichen Dank.

Jordanus De numeris datis.

fol. 138 v.

1) *Numerus datus est cuius quantitas nota est.* §. *Numerus ad alium datus est cum ipsius ad illum est proporcio data.* §. *Data est autem proporcio cum ipsius denominacio est cognita.* §. *Si numerus datus in duo diuidatur quorum differencia data est utrumque eorum datum.* §. Quia enim minor proporcio et differencia faciunt maiorem tunc minor porcio cum 5 sibi equali et cum differencia facit totum sublata ergo differencia de toto remanebit Duplum minoris datum quo diuiso erit minor porcio data est et maior. §. Uerbi gracia . X . diuidatur . in duo quorum differencia duo que si auferatur de . X . relinquentur octo cuius medietas est quatuor et ipse est minor porcio altera sex. 10

2) *Si numerus datus diuidatur . per quodlibet quorum continue differencie date fuerint quodlibet eorum datum erit.* §. Datus numerus sit . a . qui diuidatur in . b . c . d . e . sit que e minimus et quisque eorum continue sit differencie date singulorum ad c . date erunt differencie . sit igitur . f . differencia . b . ad . e . et . g . h . differencie . c . ad . e . et. d . ad . e . et quia . e . cum 15 singulis illorum facit singula istorum . manifestum est quod triplum e . cum . f . g . h . facit illos tres . Quadruplum ergo . e . cum f . g . h . facit . a . singulis iis ergo demtis de . a . remanebit quadruplum . e . datum . quare . e . datum erit et per addicionem differenciarum erunt reliqua data. § hoc opus est . uerbi gracia . XL diuidantur per III quorum per . ordinem differencie 20 sint IIII . III . duo. Differencia ergo primi ad ultimum . IX . et secundi ad illum . V . et tercij ad eum duo que simul faciunt . XVI . quibus demptis de . XL . remanebunt . XXIIII . quorum quarta pars . VI . et hoc erit minimus IIII . additis . a . IX . V . et duobus prouenient ceteri tres . VIII . XI . XV.

3) *Dato numero per duo diuiso si quod ex ductu unius in alterum pro-* 25 *ducitur datum fuerit et utrumque eorum datum . esse necesse est.* § Sit numerus a b c . diuisus a b et . c . atque ex . a . b . in . c . fiat d . datus itemque ex a b c in se fiat e sumatur itaque quadruplum . d . qui sit . f . quo de e (sublato?) remaneat g . et ipse erit quadratum differencie a b ad . c . extrahatur ergo radix ergo et sit b . eritque b . differencia a b . ad c . tum quod sit b c 30 datum erit et c et a b datum. § Huius opera facile . constabit huius modi uerbi gracia sit X . diuisus in numeros duos atque ex ductu unius eorum in alium fiat . XXI . cuius quadruplum et ipsum est . LXXXIIII . tollatur de

quadrato . X . hoc est C . et remanent . XVI . cuius radix extrahatur que erit quatuor et ipse est differencia ipsa tollatur de . X . et reliquum est VI . dimidietur eritque medietas . III et ipse est minor porcio et maior . VII.

4) *Si numerus datus fuerit in duo diuisus quorum quadrata pariter* 5 *accepta sint data erit utrumque datum modo premisso.* § Si enim g . s . (?) quadrata coniunta fuerit notus erit et e . subtrahendo quadrata parcium coniuncta de quadrato totius numeri remanebit . h . quadratum differencie cuius radix extracta . c . sit . numero erunt omnia data § opus idem diuisus quippe sit . X . in duo quorum quadrata sint LVIII quo . c . (?) remanebunt . XVI radix 10 cuius est IIII et ipse est differencia porcionum que fient VII . et III vt prius.

5) *Si numerus in duo diuidatur quorum differencia data. atque ex ductu unius in reliquum prouenerit numerus datus numerum quoque diuisum datum esse conueniet.* § Maneat superior disposicio et . l . differencia porcionum sit datus (!) et si hoc . d . qui est productus ex eis . cuius duplum est . 15 e . sed et e duplicato addatur . hic (huic?) qui est quadratum differencie et conpositus sit . f . qui erit quadratus . a . b . c . datus quare et a b c datus est § uerbi gracia . differencia porcionum sit VI . et ex ipsis proueniat XVI . cuius duplum XXXII illius quoque duplum LXIIII huic addatur . XXXVI . s . quadratum . VI . et sicut C . cuius radix extracta erit . X . numerus diuisus 20 in VIII et duo.

6) *Si uero differencia data fuerint et quadrata eorum coniunctim data numerus et totus datus erit.* §. Quadrata eorum coniuncta erant . g . qui sit datus de quo tollatur . hic quadratus differencie si hoc datus et remanebit e datus qui est duplum unius in alterum addid (addito) . e . ad . g . fiet f . 25 quadratus diuisi extracta ergo radice f . erit totus . a . b . c . datus. § Uerbi gracia . LXVIII sint duo quadrata . a . quibus tollatur . XXXVI . qui est quadratus differencie et remanebunt . XXXII . qui est duplum unius in alterum coniunctis itaque . LXVIII . et XXXII . prouenient C . huius radix est X . et ipse erat diuisus in VIII et duo.

30 7) *Si diuidatur numerus in duo quorum alterum tantum datum . ex numero dato autem in se et in datum prouenerit numerus datus erit et numerus qui diuisus fuerat datus.* § Sit numerus diuisus in a et b . sitque b datus atque ex . a . in se et in . h . (?) hoc est in totum a b proueniat . d . qui sit datus addatur . a . c . ad . a . b . et ipse sit equalis a . ut sit 35 totus a b c diuisus in a b et c . qui igitur ex a b in . c . fit . d . datus atque differencia a b ad c . s . b est datus erit a b c . et c . datus similiter et a etiam a b. § Hec operacio est § Uerbi gracia sit . VI . unum diuidencium et ex reliquo in se et in . VI . fiant . XL . quorum duplum id est . LXXX . duplicetur et erunt . CLX . quibus addatur quadratum VI . hoc 40 est XXXVI . et fient . CXCVI . cuius radix est XIIII de quo sublatis . sex et reliquo mediato fient . IIII . qui est reliquum erit quod (eritque) totus diuisus . X . coniunctis IIII et VI. ||

8) *Si numerus datus in duo diuidatur . et ex ductu tocius et in differenciam et minoris diuidencium in se prouenerit numerus datus erit et utrumque illorum datum.* § Ila . enim . coniuncta sunt tamquam quadratum maioris vnum extracta radice illius habebis maius diuidencium et ita reliquum § uerbi gracia diuidatur . X . in duo et ex ductu ipsius in differenciam et minoris porcionis in se fiant . LXIIII . radix cuius est VIII . qui erit maior porcio et duo minor. fol.139r. 5

9) *SI uero ex ductu tocius in differenciam et maioris diuidencium in se . fiat numerus datus utrumque etiam datum erit.* § Esto a b . diuisus in a et in b . quorum differencia . c . atque ex . a b . in c . fiat . d . et ex a qui est maior in se fiat . e . eritque totus d e datus est (sed?) et . a . b . in se faciat . f . quare totus . d . e . et f . datus est . sed quia a b c id est duplus est a . erit . d . f . quod fit ex . a . b . in duplum a . Erit ergo . d . f . quod fit ex duplo a . b in a . sic igitur . d e f . erit quod prouenit ex a in se et in duplum . a . b . cumque d . e . f . sic datum est et duplum . a . b . erit et . a datus et ideo . b. §. Uerbi gracia . X in differenciam porcionum . et maior porcio in se faciant . LVI . quibus iungantur . C . et erunt . CLVI . quorum duplum hoc est CCC . XII . duplicetur et fient . D . CXXIIII . quibus addatur quadratum . XX . qui est duplum . X . et fient . M . CC . XXIIII . (MXXIIII) huius radix XXXII . de quo tollatur . XX . et remanebunt . XII . cuius dimidium est . VI . et ipse est maior porcionum . et reliqua est . IIII . 10 15 20

10) *Quod si quadrata diuidencium ambo cum eo quod ex toto in differenciam fecerint numerum datum quemlibet eorum datum esse necesse esse* (!) *est.* § Omnia . enim hec sunt tamquam duplum quadrati maioris diuidentis . dimidietur itaque et dimidii extrahatur . radix et habebitur . maior porcio. § Uerbi gracia diuiso . X . quadrata porcionum et quod fit . ex . X . in eorum diffciam . omnie sunt . XCVIII . cuius medietas est . XLIX . cuius radix est VII . et ipse est maius diuidens minor uero est III . 25

11) *Si item qui fit ex toto in differenciam cum eo qui ex uno diuidencium in reliquum producitur fuerit datum erunt singula eorum data.* § Cum sit autem totum ex differencia et duplo minoris diuidencium conpositum . tantum erit totum in se quantum seuūm (totum?) in differenciam et minor porcio hiis in ipsum (??) sed (nam?) minor in totum tantum est quantum in maiorem et in se . est (si?) ergo quod fit ex toto in differenciam cum eo quod ex minore diuidencium in reliquum tollantur (tollatur) de quadrato tocius remanebit . quod fit ex minore in se et in totum datum sic ergo ex premissis et ipsum datum erit et reliquum §. Operis execucio Uerbi gracia . quod fit ex . X . in differenciam cum eo quod ex uno diuidencium in alterum faciat . LXXXIX . quo sublato de C . remanent XI cuius duplum duplicetur . et fiet XLIIII que cum . C . sunt C . et XLIIII quorum radix est XII huius ad X differencia est duo quorum medietas est unum et ipse minus diuidens et maius . IX . 30 35 40

12) *SI numero dato per duo diuiso quadrata ipsorum cum quadrato differencie fuerint data utrumque eorum datum erit.* § Detractis siquidem omnibus hijs de quadrato . tocius remanebit minus duplo unius in alterum . quantum est quadratum . differencie (.) quare minus duobus quadratis diuidencium . du-
5 plo eiusdem quadrati minus ergo toto detracto eius triplo . Cum ergo ipsum residuum de detracto sublatum fuerit reliqui sumatur . tercia cuius radix erit differencia et data . omnia ergo data § Uerbi gracia diuiso . X . in duo sint quadrata eorum cum quadrato differencie LVI . qui tollatur de C . et remanebunt XLIIII . et hic auferatur . de LVI et relinquntur . XII quorum
10 tercia est . IIII . Huius radix est duo et ipse est differencia porcionum Maior itaque erit . VI . et minor IIII .

13) *Qui uero qui fit ex ductu alterius in alterum cum quadrato differencie fuerit datum datum erit et utrumque ipsorum.* § Totum duplicetur et fient tamquam duo quadrata et quadratum differencie que quoniam data
15 sunt data sunt etiam et que proponuntur (queruntur?) . § Uerbi gracia . ductum vnius in alterum cum quadrato differencie sunt XXVIII . que duplata faciunt . LVI . que sunt quadrata ut supra et eodem modo.

14) *Si numerus datus in duo diuidatur . et quadrato minoris de quadrato maioris detracto reliquum datum fuerit erunt et ipsa data.* § Illo
20 enim detracto de quadrato . tocius relinquitur (duplum?) quadratum minoris b et quod fit ex ipso in reliquum . b . (. a . ?) si ipsum igitur dimidietur proueniet medietas . quadratum minoris semel et quod fit ex ipso in maius . et hoc tantum est quantum si ducatur . totum in minorem porcionem .
e
Diuidatur ergo porcionum (? medietas?) et exibit minus diuidencium . § Mo-
25 dus operis uerbi gracia diuisus sit iterum . X . in duo et quadrato minoris . detracto de quadrato minoris (maioris) reliquuntur . LXXX . quod minuit . XX . de C . cuius medietas est . X . quo diuiso per X . exit vnum et ipsum est minus diuidencium et IX . maius diuidencium VII et III. („VII et III.“ gehört an das Ende von Nr. 15 verschoben).

30 15) *Numero dato per duo diuiso quadratis corumdem differencia addita si numerum datum fecerit singula eorum data erunt.* § numero de quadrato tocius si detractum fuerit manifestum est reliqui minus detracto quantum est differencia bis cum quadrato ipsius hoc est quod fit ex ipso in se et in binarium qui est datus quare et differencia data erit . § Uerbi gracia diuisus
35 sit iterum . X . per duo quorum quadratis addita differencia fiant LXII ista tollantur de . C . remanebunt . CCCVIII (XXXVIII) . he si auferantur de LXII . relinquentur XXIIII qui fit ex ductu differencie in se et in binarium . huius ergo dupletur duplum et fient XCVI quibus addantur . IIII quod est quadratum binarii et fient . C . huius radix est . X . de quo subtractis duo-
40 bus reliqui dimidium hic IIII erit differencia sunt ergo (VII . et III).

16) *Quod si addita eadem differencia ei quod fit ex vno in reliquum fuerit totum datum . datum erit singulum eorum.* § Sit a b numerus diuisus et quod fit ex a in b addita differencia sit c et ipsum duplicatum sit d . quadratum autem tocius sit est (e) de quo detracto . d . remaneat . f qui si fuerit minor . d videatur quanto quia si minor . differencia (differencie?) erunt duo si tribus differencia erit III uel vnum est hoc deteriori (?) non
non uero preter si equalis fuerit d et f . differencia erit IIII si uero f . excedat d uideatur quanto sit que g. quod fit ex ductu illius quod differencia excedt duplum binarii in se et in illud . duplum quare et ipsum datum erit et tota differencia a . ad b data . § hoc opus est huius uerbi gracia diuidatur . IX . in duo et ex ductu vnius in alterum . addita differencia fiant . XXI . cuius duplum quod est XLII tollatur de . LXXXI . et remanebt . XXXIX . que minuunt . III . de . XLII . potest ergo esse differencia . I et III et utrumque contingit vnum erit et diuisus fuerit . IX . in . V . ęt IIII . et . V . in IIII addito vno et faciunt XXI . Tria ‖ erunt diuiso . *fol.* 139v. IX . in . VI . et III et si hoc III in . VI additis tribus facient . XXI . In hoc error incidit. Item diuiso IX proueniant . XIX . cuius duplum XXXVIII . hic si auferatur de LXXXI relinquentur . XLIII qui illum . excidit . V . huius duplum duplicetur et fient . D . X . (XX) huic quadratum additur IIII qui est duplum duorum et erunt XXXVI . cuius radix . VI . de quo actrato (detracto)IIII reliqui dimidium erit vnum et hic cum IIII . facit . V . et ipse est est differencia porcionum que sunt . VII . et duo.

17) *Dato numero in duo diuiso si qui fit ex uno in reliquum per differenciam diuidatur et quod exigerit fuerit datum erit et utrumque diuidencium datum.* § Quia enim quod fit ex vno in reliquum quater continue in quadrato tocius cum quadrato differencie erit ut differencia ducta in se et in quadruplum dati numeri qui exigeatur faciat quadratum numeri diuisi data ergo erit et differencia. § uerbi gracia diuidatur . X . in duo et quod fit ex vno in reliquum diuiso per dffciam exeat . XII . huius quadruplum est XLVIII dupli igitur . C . sumatur . duplum huic addatur quadratum . XLVIII quod est . II . CCCXIIII (II . CCCIIII) et fient . II . DCC . XIIII (II . DCC . IIII) . cuius radix est LII de quo subtracto XLVIII reliqui medietas est duo et ipse est differencia porcionum.

18) *SI uero quadrata eorundem coniuncta per differenciam diuidantur et quod exigerit fuerit datum et eorum quodlibet datum erit.* Sit datus numerus a b diuisus in a et in b quorum quadrata sint . c . et differencia eorum . d . cuius quadratum est et quadratum e et f sunt duplum . c . erit ut d . in h . l . faciat e . f . sit a . l equale d . et quia l in se faciat . e esse . l . in . h . faciat f qui est notus et quia h l est notus erit et l . et h datus sit que . d . et omnis § uerbi gracia diuisus sit . X . in duo quorum quadrata diuisa per differenciam reddant XXVI . cuius duplum est LII huius

quadratum IIDCC . et IIII ab hoc tollatur . C . quater et remaneb^{t} IICCCIIII . cuius radix est XLVII (III) hic detrahatur a . LII . et reliqui medietas que est duo est differencia porcionum.

19) *SI numerus datus in duo diuidatur . unoque corum per reliquum . diuiso exigerit numerus datus et ipsa data esse ostendetur.* § Diuidatur a per b et exeat . c . datum cui addito vno fiat . d . et quia . b . in c faciat a . et c in . d . faciat a b . Diuidatur ergo a b per d . et exibit . b . § uerbi gracia . diuidatur . X in duo et vno diuiso per reliquum fiat IIII cui addito vno fient . V . per quod diuisus . X . faciet duo qui est porcio.

20) *Quod si utrumque per reliquum diuidatur et que exierint coniuncta dat quid fecerint erunt et ipsa si hoc* (!) *data.* § Diuidatur a per . b . et exeat . c . et b . per a . et prodeat d . singule etiam vnitates addantur (ad?) . c . et d . et fiant e et f . et atque ex . a . in . b . fiat . g . quia igitur . a . in . f . facit . a . b . atque . b . in e facit a . b . et erit e . ad . f . sicut . a . ad . b . quare ef ad f sicut ab . ad b . et per $\overset{\text{imi}}{\text{unitatim}}$ (uicissitudinem?) ab ad ef . sicut . b . ad . f . et quia a in . b . et in f facit g et a . b . erit . g . ad a . b . sicut b . ad . f . quare g . ad a . b . sicut a b . ad . e f Quadratum igitur . a b . diuidatur per e f . quod est datum et exibit g datum erit ergo et a et b . datum § Opus ergo bene § uerbi gracia . diuidatur . X . in duo quorum utrumque per reliquum diuidatur . et quod exigit totum sit duo et sexta quibus addatur duo et fient IIII et sexta per quod diuidatur . C . et exibunt XXIIII et ipsum fit ex vna porcione in reliquum quater ergo ut solet detrahatur . de . C . et remaneb^{t} IIII cuius radix est duo et ipse est differencia diuidencium que sunt . VI . et IIII .

21) *Dato numero in duo diuiso si ƒ (per?) utrumque corum quilibet numerus diuidatur . et que exigerint fecerint numerum datum corum quodlibet datum erit.* § c numerus datus per a et b diuidatur . et exegat (!) coniunctim . d . e datum Iterum que . c . per a b diuisus reddat . f . et quia quod fit ex . f . in quadratum a b quod facit . g . est quantum quod fit ex . d e . in productum ex . a . b . quod . sit . h . itemque quod fit ex f in g est quantum quod est ex a . b . in . c . ideo ducatur . a . b . in . c . et productum diuidatur per d . e . et exibit . h . datum quare a et b datum erit § uerbi gracia diuiso . X . in duo per utrumque diuidatur . XL . et exeat . XXV . ducatur . a . (autem?) X . in . XL . et productum diuidatur . per XXV . et . exibit . XVI et ipse fiet ex vno diuidencium in reliquum.

22) *Si uero ex ductu unius in reliquum prouenerit aliquod datum utrumque corum datum esse conueniet.* Fiat enim . f . ex d in e atque ex . a . in . b . fiat h . quia igitur ex h in b . et . d . fiunt . h (a!) . et c . erit . c . ad . h . sicut d a (ad) b Itemque quia ex . e . in . b . et d . fiunt c'. et f . erit f ad c . sicut d ad . b . et sicut c . ad . h . si ergo quod fit ex . c . in se diuidatur . per f exibit h § uerbi gracia diuiso . X . L . per porciones X . et

vno in aliud ductu fiant . C . per quod si diuidatur . quod fit ex . X . L . in se exibit . XVI ut prius.

23) *Quod si unum eorum per reliquum diuidatur . et quod prouenerit datum fuerit singulum eorum datum erit.* § Esto ut prius quod cum (c) diuidatur . per a . et . b . et proueniant d . e . atque d . diuidatur per . e . et exeat . f . datum et quia . quod facit ex a . in . d . est quantum quod ex b . in . e . s (siue) . c . erit a . ad . b . sicut e . ad . d . Diuiso ergo . d . per e tantum erit . § quantum si . b . diuidatur per a . quod c datum sit palam quia (quod) omnia data esse constat § uerbi gracia diuiso . X . in duo per utrumque diuidatur . XL . et eorum quod exigerint vno diuiso per alterum exeat . quarta erunt ergo porciones . X . duo et VIII .

24) *Numero dato per duo diuiso si alterum per alterum diuidatur et illius quod exierit quotalibet pars diuiso addatur ut totum datum sit utrumque eorum datum erit.*

Diuidatur . a . per . b . et quod exierit sit c . cuius medietas (d) addatur . a . ut fiat a d . datum perpende igitur utrum sit maius . a b . an . ad . sit que u^{t} a b . et maiori super addatur tota pars vnius quota pars . ‖

c additur . a . ut a . b e . sit quod . e . dimidium unius quia igitur d . *fol.* 140^{r}. in b . bis facit a . et in e bis facit d precipuum erit ut in e b . bis ductum faciat totum . a . d . proposito ergo quod g . sit differencia . a . b . e super a . d . itaque d bis in se et in g facit . ad , semel ergo ductum in se et in g faciet dimidium ad . et ita si hoc dc̄ā . erit vo (omnia erunt nota .) si uero a d . et a b . sunt equalia erit ut . b . in se et in dimidium vnius quod est . e . faciat dimidium . a d . et sic eadem ˜racio erit § sed hoc etiam et opus triplex contingt uerbi gracia diuiso X . in duo ponatur . alterum per alterum diuidi et medietas eius quod prodierit addatur . diuiso ut si (sic?) totum $\overset{or}{\text{IIII}}$. et tercia cuius ad X . et dimidium differencia est . VI . et sexta . Itaque $\overset{or}{\text{IIII}}$ et tercia dimidiet (dimidietur) et dimidium ut solet quadruplicetur . cui addatur . quod facit . ex sex et sexta in se et erit 46*) et due tercie et $\overset{a}{\text{XXXVI}}$ cuius radix est | VI . et due tercie et sexta ad (ab) hoc tollantur . VI . et $\overset{a}{\text{sex}}$ et relinquentur . due tercie cuius dimidium tercia est qua sublata IIII et tertia . remaneb^{t} $\overset{or}{\text{IIII}}$ et ipse est altera porcionum.

25) *Dato numero in duo diuiso et altero diuidencium per datum numerum multiplicato productoque per alterum diuiso si eius quod exigerit quotacumque pars producto addita totum fecerit . data singula esse necesse est.* § Vt si a per . c . datum numerum multiplicetur . et proueniat d qui diuidatur per .

---

*) Die Handschrift bietet hier zwei Zahlzeichen, welche 46 bedeuten sollen; das eine derselben (4) stimmt auch in der That mit der sonst aus dem 14. Jahrhundert überlieferten Form überein, das andere (6) weniger.

b . et exeat . e . cuius pars quotalibet sit . f . que addatur . d . ut fiat d . f . numerus datus qui totus diuidatur . per c et . prodeat g . h . sicque g equalis . a . erit que . h . qui multiplicatus per c . faciat . f . et quia c ad . b . sicut est [c] ad a et quia . c . in . h . facit . f . erit ut . b . in . h . faciat totam partem a et quia totum g h . datum erit et . a h . et ob hoc et a et b . datum § uerbi gracia diuidatur . X . in duo quorum alterum per V . multiplicetur . et producto per reliquum diuiso medietas eius quod exigitur eidem producto addatur . ut sit totum L . quod diuidatur . per . V . et exibunt . X . restatque nunc opus premisse ubi incid^{t} equalitas (.) medietas itaque . X . quadruplicetur et fiet . XX . cui addatur quadratum . dimidii hoc est quarta et erunt . XX . et quarta cuius radix est IIII^{or} . et medietas unius de quo sublato . dimidio et reliquo mediato . exibunt duo et ipse est vnum diuidencium .

26) *SI numerus datus in duo diuidatur . que per singulos datos numeros diuidantur et que proueneri(n)t . coniuncta datum numerum constituant quemlibet eorum datum esse conueniet .* § A per c . et b . per d datos numeros diuidantur et exigant . e . et f . sitque e f . datum maior aut minor c . et d . sic c . cuius ad . d . differencia sit g ducatur . ita que d in e f . et fiet . . . . u^{t} enim . sit equalis h [b] est quo in minus est . a . fit l (ducatur itaque d in ef et fiat productum eorum equale . h . et id quo . h . minus est . a b . sit . l . ?) . diuidatur . que . l . per g . et exibit . e datum quare et a . et b data . § uerbi gracia ut solet . X . in duo secetur . quorum alterum diuidatur per III et alterum per duo et exeant quatuor . in que ducantur . et duo et fient octo et reliquo (i) duo de . X . diuidantur per vnum quod est differencia trium ad duo et erunt duo in que ducantur . tria et fient . VI . que est vna porcio.

27) *SI uero alterum in alterum ducatur . fuerit que productum datum | omnia data esse demonstrabitur.* § Ducatur e in f . et fiat . g . datum ducatur que c in g et fiat . h . quod tantum erit quantum si f ducatur in productum ex . c . in e . hoc est in a ducatur . Item . d . in h et producetur . l . quod etiam tantum erit quantum si a ducatur . in productum ex d . in f hoc est in b quod cum sit datum erit et a et b datum . § uerbi gracia diuiso ergo . X . in duo unum quod per IIII^{or} alterum per duo parciatur . et quod exierit unum ductum in alterum . faciat duo que duo multiplicentur . per IIII et productum per duo et exibunt . XVI . et ipse erit qui fit ex ductu . vnius diuidencium in reliquum . que ex hinc constabit esse VIII et duo.

28) *Diuidatur alterum per alterum . tunc si exierit qui dat̄ omnia data esse consequetur.* Diuidatur . e . per f et exeat . h . datum diuidatur item . h . per d et prodeat k multiplicetur per c . et . fiet . l . quia . igitur . f in h . fac^{t} . e etiam . b in . k . faciet . e . et sit b : in . l . producet . a . si . ergo . a . diuidatur per b . exibit . l . quod . c . sic datum erit . a . et . b . data

§ uerbi gracia . X . diuidatur . in duo et quarta vnius diuidatur per dimidium alterius et exeat tercia . cuius dimidium quadruplicetur exibit quod due tercia diuidatur . ergo ut solet . X . per vnum et duas tercias et prouenient . VI . et ipse est vna porcio . X .

29) *SI numerus datus in duo diuidatur . atque quod fit ex toto in alterum equale sit quadrato alterius erit utrumque datum ad proximum.* § Sic vt ex a b . in . b . sic (sit) quantum ex a . in se et quia quod ex . a b in se est quantum quod ex . a . b . in a . et in . b . erit et quantum quod ex . a . in se et in . a . b cumque sit . a . b . datum et a . et . b . datum . § uerbi gracia . X . diuidatur in duo . ita quod . X . in alterum si (sit) quantum reliquum in se atque . X . in se faciat . C . cuius dupli duplum sumatur et erunt . CCCC . huic addatur . ut solet quadratum . X . et erunt . D . cuius extrahatur . radix . ad proximum et erit . XXII . et tercia de quo tollatur . X . et reliqui medietas erit . VI . et sexta et ipsum erit maior . porcionum que ducenda est in se.

30) *Si fuerit IIII numeri proporcionales et tres eorum dati fuerint et quartus datus erit .* § Facta enim altera multiplicatione idem numerus producitur . similiter ergo alternatim quoniam duo sunt dati alter in alterum ducatur . et productus per vnum reliquorum qui datus est diuidatur . et exibit reliquus datus qui prius fuerat non datus . § . uerbi gracia sint . XX . ad aliquod sicut V ad IIII quia igitur ducemus est antecedens datus in consequentem alterius datū . ducatur . XX . III (V) . IIII . et fient . LXXX . qui diuidatur per V . qui (o) erit consequens . XX (XVI) . prius non datus.

31) *SI dati numeri ad aliquod fuerit proporcio data . et illum datum esse consequitur .* § In multiplici proporcione ubilibet facile in alijs qui facile quidem si consequens datur quoniam ad referuntur partes quas datas esse hanc absurdum (?). Ipsum ergo multiplicabitur . si necesse fuerit et partes quas omnes adiunguntur . et habebitur antecedes si uero antecedes detur . idem diuidetur per denominacionem et exibit compositus . Vel aliter sumetur numerus qui huius partes . habeat . ponatur . quod consequens et inuenietur . antecedens in illa proporcione et sit premissa operacio § uerbi gracia . sit numerus qui cum tanto et iterum tanto atque dimidio et dimidii dimidio faciat . C . Diuidatur ergo . C . per tria et dimidium ‖ et quartam et exibunt . XXVI . *fol.* 140^v.

et due tercie et hoc est compositus Item est numerus cuius quarta et . LX^a [C] XXVI et due tercie . sumatur . numerus qui habeat quartam . LX^{am} et ipse est LX . est XVI Ducatur ergo . LX . in XXVI . et duas tercias et fient . M . D . C hic diuidatur per XVI . et exibit . C . qui est compositus.

32) *Si primi ad secundum fuerit proporcio data et secundi ad primum . proporcio data erit.* § Diuidatur . enim vnum per denominaciones proporcionis primi ad secundum et quod exierit erit denominacio secundi ad primum

§ uerbi gracia primum continet secundum bis et eius duas tercias per duo ergo et duas tercias diuidatur vnum et exibunt tres octaue erit ergo secundus tres . octaue primi insuper terciam („insuper terciam" gehört an das Ende von 33).

5 33) *Si tocius ad detractum proporcio data et residui . ad detractum proporcio data . quod autem residui ad detractum data fuerit proporcio et tocius ad detractum similiter data erit.* Hoc facile est . si enim a proporcione tocius ad detractum . tollatur . unum remanebit . proporcio residui ad detractum si item proporcioni quod est residui ad detractum addatur . vnum fiet 10 proporcio tocius ad detractum § uerbi gracia . X continet tria ter et eorum terciam itaque . VII . continet tria bis et eorum terciam conuerso modo . VII . continet tria bis et terciam . ergo . X . continet tria ter . (insuper terciam).

34) *Si tocius ad detractum fuerit proporcio data et tocius ad residuum* 15 *erit proporcio data.* Si enim tocius ad detractum fuerit data . et residui ad detractum erit data . quare detracti ad residuum ergo et tocius . ad residuum § . X . continet . VI . et eius duas tercias IIII et due tercie . Diuidatur . ergo unum per duas tercias et exib^t vnum et medietas quare . VI . continet . IIII semel . et dimidium . ergo . X . bis et dimidium .

20 35) *Si numerus datus diuidatur in duo quorum proporcio fuerit data, utrumque eorum datum erit.* Si enim proporcio vnius ad reliquum data fuerit et tocius ad idem data erit . proporcio Cum ergo totum sit datum erit et illud datum et ob hoc reliquum . § uerbi gracia diuidatur . X . in duo quorum vnum quadruplum alteri itaque . X . erit ei . quintuplum et ipsum est duo.

25 36) *Si primum ad secundum datum et ad quod secundum habet proporcionem datum (datam) erit datum quod si ad illud datum et ad secundum datum erit.* § Denominacio enim proporcionis primi ad secundum . in denominacionem proporcionis secundi ad tercium ducatur . et fiet proporcio primi ad tercium . Item proporcio secundi ad tercium diuidatur . proporcioni primi ad tercium et 30 exibit . proporcio primi ad secundum § uerbi gracia Primum continet secundum et eius tres septimas et secundum tercium et eius duas quintas . Ducatur . ergo vnum et tres septime in vnum et duas quintas et prouenient duo quare primum . est duplum . tercio . Item duo diuidantur . per vnum et duas quintas et exibunt vnum et tres septime . Itaque alijs positis primum continebit 35 secundum et eius tres septimas .

37) *Si quilibet numeri ad unum proporcionem habuerint datam et totum eorum ad eundem proporcionem . habebit datam.* § Denominaciones proporcionem omnium ad illum coniugantur . et compositum erit denominacio totius ad illud § uerbi gracia Primum contineat quartum semel et terciam se- 40 cundum bis et quartam tercium bis et dimidium . quod faciunt . VI . et duodecim(am) quare primum et secundum et tercium continebunt quartum et sexies et eius duodecimam.

38) *Si unius (unus) numerus ad quotlibet proporcionem habuerit datam et ex illis compositum proporcionem habebit datam.* Si enim ille ad illos et ipsi ad eum proporcionem habebunt datam quare et compositus eorum ad eundem ergo et ipse ad compositum Uerbi gracia Sit ut vnum contineat et eius duas tercias et alium et eius dimidium . Diuidatur . itaque vnum per vnum 5 et duas tercias et exibunt tres quinte et iterum per vnum et dimidium . et exibunt due tercie coniunctim erunt vnum et quinta et quintadecima . per hec diuidatur vnum XV . XIXe . Itaque illud erit . XV . XIXe illorum coniunctorum.

39) *SI a duobus numeris datis duo numeri detrahantur fueritque de-* 10 *tractorum . et residuorum proporcio . data non autem que tocius ad totum . erit et quodlibet eorum datum.* § Sint numeri dati . a . b . c . d . detracta (i) . a . c . et quia a . ad . c . non sicut totum . ad totum . non erit . a . ad c . sicut d . ad . b . sic igitur . ad e . sicut . b . ad d . erit ergo . a b . ad . cd . sicut . b . ad d . et quia a b . datum sunt hoc et c . d . quare et differencia 15 c . ad e . data proporcio data erit et ad g̅ (?) . est g dat̅ quare et à (etiam) singula ergo data . § Uerbi gracia sint dati numeri . XX . et XII et detractum XX sit duplum detracta (i) XII et residuum . XX . sesqualterum residuum XII sit autem . XX . duplum ad quiddam et ipsum est . X . cuius differencia ad . XII . est duo et quia siquid est sesqualterum ad totum et duplum ad 20 detractum est sescuplum ad reliquum erit residuum . XX . sescuplum ad duo erit erit ergo XII . et detractum . VIII et detractum uero . XII . erit . IIII . et residuum ipsius erit VIII .

40) *Si duo numeri fuerint ad inuicem dati . numeroque dato ab altero detracto alterique addito . eiusmodi proporcionem habuerint datam ut prius* 25 *sumpta data erunt* . § Sint dati numeri . a . b . c . et ab . a . b detrahatur . a datus numerus (?) et c addatur . d datus numerus ut . sit . et (a?) b . ad . c . d . (c d) proporcio data sic item . e . ad . a . sint (sicut) . c . d ad . b . quare c . d . e . ad . a b erit proporcio data est c . ad . a . b . proporcio data ergo et d . e . ad . a b . proporcio data . atque d . e . est datus ergo et a . b . c . dati 30 erunt . § uerbi gracia sit maior minori sesquitercius maiorumque detracto . VII . et alij addito . VI sit totum minorum duplum residuo alterius . sit igitur numerus duplus . VII . et ipse est . XIIII . qui addatur . toti minorum . et compositus fiet duplus maiorum additque super minorem . XX . et quia minor est tres quarte maiorum auferantur . tres quarte et duobus remanebt . V . 35 quarte . § Itaque . XX . continet maiorem semel et quartam et ipse est . XVI . minor itaque erit XII .

41) *Si duobus numeris dati numeri alternatim addantur et detrahantur et post mutuam addicionem et detractionem sint super ad inuicem dati uter-que erit datus.* § Sint numeri a b [c] . d e . dati quia enim a . b c . est 40 ad . e detracto que ab eo Itaque que dati . c . et f . si ergo a b c . fuerit

fol. 141ʳ datus ‖ ad . e . et d . et d . et e . et f ad be a . b et d . e . (??) et dati sint a . et d dati quia . enim a . bc . est | est datus ad e . detractoque ab eo dato numero . a . c et alteri dato addito qui est d . f . fit d . ef . ab datus per premissam operare(m) . § uerbi gracia . minori detrahatur . IIII et alij additis 5 duobus sit totum minoris duplum residuo alterius atque minori additis tribus et maiori demptis IIII sit totum residuo sesquitercium per operam ergo premisse(am) totum minoris erit XVI . et maioris residuum . XII maius et minus XIII non coequales.

42) *Si a duobus numeris datis duo numeri ad inuicem dati detrahantur.* 10 *ū (et) residuorum sit differencia data singula eorum data esse necesse est.* § Sint dati numeri a . b . et c d . adque (?) ad e . datus et differencia b . ad . d . data que fit e . sit que f differencia quam addit a b . super cd . et differencia a et c . sit g . si igitur b . et (est) minus d . atque e . maior f siue minor que eorum diffcia eorum et a . et c . quod si b minus d . c̄c̄ . e . et f . 15 facient g quare s per g . dat̄ ergo et a et b . sitque g b . et δ . (Z. 13 bis 15 = ??) § uerbi gracia dati sunt . XV . et IX . detractum autem a . XV . sit triplum . ad detractum . de IX et differencia residui IX ad residuum . XV . sit duo que addantur . super differenciam . XV . ad IX . et fient octo qui est diffcia detractorum ideoque erit (erunt) . XII . et IIII 20 residua . III et V.

43) *Si a duobus numeris datis numeri demantur . qui sint ad se dati et ex reliquo in reliquum datus numerus . proueniat quilibet eorum datus erit .* § Sint dati numeri a . b . d . e et a . ad . d . datus et quod fit ex b . in e sit datum quod fit f . sit autem sicut a . ad . d . ita . a . b c . ad . d . e . 25 quare . b . c . ad . e . dat̄ e ergo quod fit ex b . in . b . c . sit dat̄ ad f . et diffcia b . c . ad . b . que est e . sit data erit et b . et bc . datum et sic omnia . § . uerbi gracia . sint dati XII et . X . demptumque a . XII . ad demptum ex . X sit sesqualterum et ex reliquo in in reliquum fiant XXXVI . est autem . XV . ad X . sequalterum et LIIII ad XXXVI sequalterum qui . C 30 . contineatur . sub duobus numeris quorum differencia III que est XV ad XII . erit vnus IX . et alter VI qui est vna porcio XII . et alia VI porciones que X . erunt IIII et VI . dimidium.

44) *Si numerus in quotlibet diuidatur quorum numeri dati et ad reliquorum singula proporcionem habuerit datam . erit totus numerus datus.* § Si 35 enim ad singula eorum proporcionem habuerit datam et ad conposicionem ex eis quare et ad . residuum et quia illud est datum erit ipsum totum datum. § Uerbi gracia . diuidatur . totum in . IIII . quorum vnum eius tercia alterum quarta alterum quinta et relinquentur. VI et dimidium est (·) tercia . quarta . et quinta . sunt . XLVII . LX[a] . erunt ergo VI . et dimidium XIII . LX[a] . est ũ n̄. 40 (igitur numerus?) XXX . ergo . XXX . diuisus est cuius porciones (X) . XVII . et dimidium sex . et . (etc.?)

45) *Numero in quotlibet diuiso si numeri eorum cum dato numero fecerit (fecerint) numerum qui ad totum sit datus reliquis ad ipsum datas habentibus proporciones ipse numerus datus diuisus datus erit.* § Cum enim singula eorum ad diuisum proporciones habeant datas et conpositus ex omnibus ad eum proporcionem habebit datam quare et residuum quod est datus numerus habebit . ad eum proporcionem datam quare et ipse datus erit. § uerbi gracia . diuidatur numerus in tria quorum vnum sit tercia alium quarta reliquum cum ternario sit eius due tercie quare omnia cum ternario continebunt eum et eius quartam ternarius ergo eius quarta et ipse erit . XII.

46) *Diuiso numero in quotlibet si eorum quod (?) cum numero ad totum datum fecerit numerum datum et reliqua ad totum proporciones datas habuerint ipsum numerum diuisum datum esse conueniet.* § Cum enim ad singula reliquorum proporcionem datam habeat . et adiuncta habebit . et sic ad prius sumpt̄ et e ad ei dadic̄ (?) et ad conpositum habebit proporcionem . datam quod c. sit dat̄ et ipsum datum erit . § uerbi gracia . diuidatur ut prius in tria et vnum sit medietas et vnum tercia . et tercium cum eius quarta faciat . V . et quia dimidium et tercia sunt . V . sexte erit reliquum sex[a] . que quoniamcum quarta . facit . V . erit . V . eius quarta et sex[a] hic est . V . XII[e] . quare ipse est XII.

47) *Si numerus datus in quotlibet diuidatur que continue proporcionem habuerint datam erit quodlibet eorum datum.* § . Diuidatur . LX . in tria quorum maius duplum secundo . secundum triplum tercio quare primum sescuplum tercio quare secundum et tercium due . tercie primi . Totum ergo continet primum et eius duas tercias . erit ergo illud . XXXVI . secundum . XVIII . tercium . VI . que simul faciunt . LX. — § Demonstracio quia . enim . primum ad secundum datum et secundum ad tercium . erit . primum ad tercium datum . quare simul ad secundum et tercium . et ob hoc totum ad tercium datum et erit totum datum . sic erit etiam et primum et ideo secundum atque tercium.

48) *Numero dato per quotlibet diuiso . si singulis eorum dati numeri addantur ut conpositorum sic continue proporcio data (·) erit prius superiorum diuidencium proporcio similiter data et ipsa data.* § Numeri dati additi pariter . dato numero diuiso addantur et fiet numerus totus datus . quod constat diuisum esse in numeros ad se continue . datos qui constat ex condiuidentibus . primi numeri et numeris datis . quare conpositos illos datos esse constat ex quibus si dati numeri auferantur relinquentur porciones propositi (nume)ri date(i) . § uerbi gracia . XX . diuidatur in tria quorum vni addantur . IIII . alij vnum alij . V . ut sit primum secundo sesqualterum . secundum tercio duplum . Itaque IIII . V . vnum addantur . XX . quod si diuisus fuerit secundum illas proporciones exibunt XV . X . et . V . auferantur . ab illis . dati numeri . a .

XV . IIII . et . a . X . V . et a . V . vnum et remanebunt . XI . V . IIII . in que constat diuisum esse . XX .

49) *SI sumantur quilibet numeri quorum precedentes cum datis numeris ad sequentes habuerint proporciones datas . ita ut et ultimus adiuncto dato numero*
5 *habeat proporcionem datam ad primum* (·) *singulos eorum datos esse demonstrabitur.* § Sint tres numeri . a . b . c . et dati numeri totidem . d . e . f . sitque a . d . ad . b . et . e b . ad c . et . f . c . ad . a . dati sicut igitur est a d . ad . b . ita sic . g . ad . e ut . sic totus . g . d . a . ad . e . b . sicut . d . a . ad . b . hoc . datus . c[um] ergo sit . e . b . ad . c . datus erit . g . d . a .
10 etiam datus ad . c . sic(ut) . h [ā [i]] . ad . f . sicut . g . d . a . ad . c . eritque . h g . d . a . ad . f . c . datus est . f . c . ad . a . datus . ergo . h . g . d . a . ad . a . [est] datus quare et h . g . d . ad . a . datus est . h . g . d . datus . ergo . et . a . datus . si hoc . b . etc. § uerbi gracia . sint numeri III . sic quod primus cum . VI . contines secundum . et eius duas . tercias . secundus cum . IIII .
fol. 141ᵛ. continens tercium bis . tercius cum duobus sit . ‖ quinque septime primi et
15 quia . VI . et due tercie continent . IIII . et eius duas tercias addantur primo . ut sit ipse et XII . et due tercie continens secundum tum (cum) . IIII . et eorum duas tercias continebt ergo tercium ter et eius terciam . est et . VI . et due tercie continent due [[o]] ter et eius terciam . Itaque primus cum .
20 XIX . et tercia continet tercium cum duobus ter et eius terciam est quia tercius cum duobus est . V . septime primi primus et . XIX . et tercia continebunt primum bis et eius duas septimas et duas vicesimas primas . quare . XIX . et tercia continebunt eum semel etiam erit ergo . XIIII et secundus XII tercius autem VIII.

25 50) *Si numerus datus in duo diuidatur quorum altrum uel numerus ad ipsum datus cum numero ad reliquum dato fecerit numerum datum utrumque datum erit.* § Diuidatur . a . b . et . sit . c . datum ad . b . atque a . c . sit numerus datus cuius differencia ad a . b . sit . e . data . et ipsa est differencia et quia c . ad b . datum . erit . e . ad b . datum cumque sic e datus erit et . b .
30 et . a . datus . § uerbi gracia . XII . diuidatur . in duo quorum vnum cum tercia reliqui faciat . VI . cuius ad XII differencia est . VI . que etiam est differencia tercie ad totum suum quare . VI due tercie et totum . IX . residuum tres quod cum tercia . IX . hoc est cum tribus facit . VI .

51) *Numero dato in duo diuiso si alterum uel numerus ad ipsum datus*
35 *cum numero dato fecerit numerum ad reliquum datum utrumque eorum datus erit.* § Vt prius . a . b . datus parciatur in a . et b . atque . a . cum . c . dato faciat . a . c . numerum ad . b . datum . addatur . ergo . c . ad . a . b . ut sit totus datus . b . a . c . qui diuisus est in b . et . a . c . quorum proporcio data vtrumque ergo datum . uerbi gracia . XII diuidantur in duo quo-
40 rum alterum cum duobus faciat tres quartas reliqui (·) duo iungantur . XII et

fient XIIII qui diuisus erit secundum illam proporcionem . quare alterum erit . VIII . alterum . VI . a quo subtractis . duobus remanent . IIII .

52) *Si numerus datus in quotlibet diuidatur quorum quodlibet sumpto (um?) precedens semper ad compositum ex reliquis proporcionem habeat datam . quodlibet eorum datum erit.* § Diuidatur . datus numerus . in . a . b . c . d . atque a . ad b . c . et b . ad . c . d . et d . ad . a b . proporcionem habeat datam . Diuidatur . ergo a . in e . et . f . sic . que b . ad . e et c . ad . f . sicut b . c . ad a . Item quia b . ad . c d . habet proporcionem datam atque b . et (ad) e . erit e ad . c . d . datum quod diuidatur . in g . h . secundum proporcionem . c . ad . d . Cum igitur . f . g . ad c . sit datum atque c . ad d . a . erit et . f . g ad . d . a . datum resolua(n)tur g in k l . secundum proporcionem ad . d . a . [d ad . a] erit que . a . tamquam ad . h . k . l . cumque sit l . ad a datum erit si quis et h . k . secundum h . k . ad . d . datum quare d . ad . a . atque d . ad a . b quare . a . ad b . et similiter a . c . omnia ergo ad se et ad totum quare singula data (·) quod si quinque fuerint . vt . a . b . c . d . e . resoluetur numero dato . a . in d . e . a . quare in d . e atque eundem racionem . e . in d . c . et d . in c . b . et . c . in . b . a . et sit . a . in . b . a . erit itaque . a . ad b . datum et sic de terciis (Z. 16 u. 17 = ?) . § uerbi gracia . ut sit exemplum . (numerus) in . IIII . diuidatur . siquidem . XXXII in IIII quorum primum sit septima secundi et tercii (·) secundum quinta tercii et quarti . tercium medietas quarti et primi . Ducatur itaque septima . in . V quintam et erit . XXXV et septima in dimidium . et fiet . XIIII . et XXXV . in dimidium et fiet . LXX fiet que primum tamquam sua . LXX . et XIIII hoc est VI . LXXe . et LXX . et . XXXV . et . XIIII quarti . hoc est VIII . LXXe . Itaque LXIIII . LXXe . primi sunt VIII° . LXXe . quarti et quia . VIII est VIII^{a} . LXIIII erit primus VIII^{a} quarti (·) est et primus . VII^{a} . secundi et tercii . quare . quartus continet secundum et tercium et eorum septimum sed secundus est quinta tercii et quinta quarti (·) et (sed) quinta quarti tamquam quinta et . XXXV^{a} secundi et quinta . et . XXXV tercij quare secundus est tamquam quinta et XXXV^{a} . sui . hoc est VIII XXXV^{a} et due quinte et XXXV^{a} tercij hoc est (tercii) . XV . XXXVe . Itaque eius (equal.?) . X . X . VII . XXXVe . tercij (secundi .) secundus ergo ad tercium sicut XV . ad . XXVII . sed secundus ad tercium et quartum ut . XV . ad . LXXV . erit igitur ad quartum ut . XV . ad XLVIII (·) est primus ad quartum sicut . VI . ad . XLVIII quare primus ad secundum v̄t . VI . ad . XV et quia VI . XV . XXVII . XLVIII faciunt . XCVI . qui est triplus . XXXII . erit XXXII . diuisus in duo (·) quinque . IX . . XVI . est sumptas (secundum eas?) habitudines.

53) *Si sumantur quilibet numeri quorum alter cum numero dato habuerit proporcionem datam ad compositum ex reliquis omnibus* (·) *singulos eorum*

(datos) esse necesse est. § Sint numeri . IIII . a . b . c . d . datus numerus est (e sit) et quia . a . e . est datus ad . b . c . d . esto a . e diuisus in . f . g . h . vt . sit . f . ad . b . et g . ad c . et h . ad . d . datus sicut . a . e . ad . b . c . d . sit $\overline{cc}$ (etiam?) k . ad . e . sicut . f . ad . b . et quia b . e . est ad c . d . a . datus
5 atque f . k . ad . b . e . erit . f . k . ad c . d . a . datus . Diuidatur ergo secundum proporcionem eorum in . l . m . n . sit que $\overline{cc}$. c . ad a . sicut g . ad c . quare . k . e . a . c . erit ut . c . n . l . g . m . h est e . b . ad . a . c . d . est datus atque a . e . d . ad . n . c . l . g . m . h . cui est equalis . k . e . a . c . quare . e b . ad . k . e . a . c . datus erit est k . e . a . c . ad . e . a . est
10 datus quare . e . b . ad . ea . datus similiter . e . a . ad . e c . atque e . d . Itaque . e a . ad triplum . e et . b . c . d . datus est . e . a . ad . b . c . datus . quare . triplum . est ad . b . c . d . datum ipsum ergo datum et . a . datum et sic de omnibus diuisim . § uerbi gracia . datus numerus . VI . sintque IIII numeri quorum primus et . VI . sit nona reliquorum . secundus et . VI . sit tercia reliquorum (·) ter-
15 cius et . VI . sit tres quinte residuorum . quartus vero et . VI . sit reliquis coniunctis equalis . Ducatur itaque tercia in nonam et fiet XXVII[a] . Itaque tercia ducatur in vnum et nonam et fiet tercia et XXVII[a] que diuidantur . per nonam et . XXVII . et exibunt duo et dimidium quare secundus et . VI . continet primum et . VI . bis et eius dimidium . Itaque nona duca(n)tur . in
20 tres quintas et exibit . XV[a] . atque tres quinte in vnum et nouam et erunt tres quinte et XV[a] . que diuidantur per nonam . et XV[am] . et exibunt tres et tres quarte (·) quare tercius et sex continent primum et VI . ter et tres . quartas . quia uero quartus et VI . sunt ut residua semel (·) ducenda erit . nonum (nona) in vnum et fiet . nona . quod si etiam vnum ducatur in vnum et
25 nonam fiet vna et nona que diuidantur . per duas . nonas et exibunt . V. quare quartum et . VI est quintuplum primo cum . VI . Itaque secundum tercium quartum et ter . VI . continet primum et VI . XI[s] . et quartam (·) sed illa tria continent ea nonies . quare ter . VI . hic (hoc) est . X . et VIII . continet primum et VI . bis et quartam (·) sunt ergo VIII dem-
30 ptisque . VI . remanent duo quod est primum est et secundum et . VI . erit . XX . quare secundum est XIIII . tercium . cum . VI . XXX atque ipsum . XXIIII . quartum cum . . VI . XL . quia quintuplum . VIII . ipsum ergo
fol. 142r. . XXXIIII. ‖

54) *Si proponantur in ordine quotlibet numeri quorum singuli cum*
35 *numero ad proximum sequentem dato datum numerum constituant quilibet eorum datus erit.* § Sit datus numerus . e . et . IIII numeri a . b . c . d . atque . f . datus ad . a . et g . ad b . et h . ad c . et k . ad . d atque . a . cum g . et b . cum h et c . cum k et d . cum . f . faciat . e . sicut a . g . ad . b ita . sicut b . ad . h . et sic[ut] l ad c . ita . m . ad k . et sicut m . ad . d .

ita n . ad . f . itaque g . l . ad l m . et m . n dati erunt et quia quod est differencia a . g ad . g . b . ea est . a . ad . l erit differencia . a . ad l . data similiter . differencia l . ad . n . quare et differencia . a . ad . n data est t[er] sic a . ad . n . datus erit vterque ergo datus cumque sit . a datus si detrahatur . a b e . relinquitur . g . datus quare et b . datus erit et reliqui similiter quod si quinque fuerunt primus . a . g . l . m . n . c . t[er] sic differencia a . ad . l . data atque l ad . n erit et a . ad . n differencia data cumque . n . c . dat sit si . sit a . numerus . n et dato numerus ipso detracto . de . n . t . dato remanebt . t . a . datus quare vtrumque datum . si vero maius quia dato maius . ipso addito ad . n c . fiet a . t . similiter dat et vtrumque datum. § uerbi gracia . datus numerus sit CXIX . sint que alij IIII numeri quorum primus cum dimidio secundi faciat . CXIX . secundus cum tercia tercii tercius cum quarta quarti quartus cum quinta primi constituat ipsum (·) ducatur . itaque medietas in terciam et erit sexta et sex^{a} in quartam et fiet XXIIII . et . XXIIII . in quintam et proueniet . CXX^{a} . quia igitur primus et medietas secundi ft CXIX . et medietas secundi et sex^{a} . tercii sunt . LIX . et dimidium (·) primus excedit . VI^{tam} tercii . LIX . et dimidio et quia sex tercii et XXIIII^{a} quarti sunt . X[IX] et IX . et quinque sexte et XXIIII^{a} . quarti et CXX^{a} primi sunt IIII et XXIII . XXIIII^{c} quod si multiplicetur . CXX . fiet . VIII . milia . D . C (CCCC) . et XXV . quia primus ad illud sicut . CXX . ad . CXIX . si productus diuidatur per CXIX . exibit . LXXV . et ipse est primus . quo detracto . de . CXIX . remanebt . XLIIII quo duplicato fiet secundus LXXXVIII . secundo tunc dempto de . CXIX relinquentur . XXXI . quo triplicato fiet tercius XCIII . et isto sublato . de . CXIX . residuus erit XXVI . quo quater sumpto fiet quartus . CIIII . et si iste auferatur . de . CXIX . remanebt . XV que est quinta . LXXV qui est primus.

55) *Propositis quotlibet numeris si quilibet eorum cum numero ad compositum ex reliquis dato fecerint numerum datum singuli eorum dati erunt.* § Si datus numerus etiam et numeri propositi a . b . c . d sitque . e . f . g . ad a . b . c . qui cum d . faciat . etiam . atque . h . k . l . datus ad . b . c . d . qui cum . a . faciat . etiam est et m . n . o datus ad . d . c . a . et ipse cum . b . faciat etiam atque p . k . r . datus ad . d . b . a . qui cum . e . faciat etiam sitque . h . k . l . ad b . c . d . minor . proporcio quam m . n . o . ad . b . c . d . a . et istorum minor quam . p . q . r . ad . d . a . b . et horum minor quam e . f . g . ad . a . b . c . quia igitur k . l . minores st quam . n o . tollantur ab eis et remanent s . t . eruntque a . h . maius m . b . sed si h est maius . b . erit a . minor . m quoniam maior est proporcio . m ad . a . quam h . ad . VI ablatis ergo . a . de . m et b . de h remaneant . XV . eritque . enim tamquam . X . sit et quia . m . o . minus . p . r . et b .

minor . h . erit . c . minor n et quia p . q . minus e . f . et . c . minus g
quia minor . n erit . d . minor . r . sic ergo quia . V . resoluitur in X . s .
t . que sunt data ad a . c . d similiter et b resoluetur in tria data . ad . a .
c . d . et quodlibet e//// dat in tria data et a . b . d . est et quodlibet dat .
5 d . in tria data ad a . b . c . et sit tantum . a . non resoluitur Atque si . h .
esse numerus . b . fitque a . maior . m . et cc a . b . c . resoluentur in reliqua .
(i)u . d . si ergo . a . non resoluitur . quodlibet reducetur in dat . ad . a . et dat
ad vnum reliquorum . Est enim V tamquam X . s . t sed sunt tamquam .
l . z . y . data ad . c . a . b . Dempto ergo . y . de . b . remanet f . e . eritque
10 f . e . vt x . z et c . i . similiter . t . i . erit ut . ne pc . data . i . p . e dat
ad . a . erit . b . dat ad a . et item quodlibet eorum dat ad . a . erit ergo .
a . dat ad h . k . l . quare et ad z conpositum singula igitur eorum data .
§ uerbi gracia . sit datus numerus . XXVIII et sint . IIII numeri quorum primus
cum triplo reliquorum faciat XXVIII (·) secundus autem cum triplo . reliquo-
15 rum et quarta . tercius cum triplo residuorum et IIII septimis (·) quartus cum
quadruplo . reliquorum XXVIII constituat . ablatis ergo primo de triplo et
quarta*) atque tribus de tribus et quarta . secundo autem de triplo ipsius
remanebit duplum secundi quantum duplum primi et quartum (quarta) atque
quarta tercii et quarti. Eadem racioni duplum tercij et quarta . erit ut duplum
20 secundi et IIII VII[e] . et . IX . XXVIII primi et quarti et quia duo et quarta
continent quartam nouies (·) si diuidatur per nouem duo et IIII VII[e] . et . IX .
XXVIII fiet quarta tercii ut II[e] . VII[e] (secundi et) XXVIII[(a)] primi et quarti . demptis
quoque duobus . VII . de duobus fient unum et V (septimae) secundi tamquam
duplum primi et quarta et XXVIII . itemque quarta . et XXVIII quarti . verum
25 quia duplum quarti et quatuor . VII[e] . quarti sunt ut triplum . tercii et
tres . VII[e] . primi et secundi et quia duo et IIII . VII[e] continent quartam et .
XXVIII nouies (·) erit quarta et (X) XVIII . quarti quantum tercia tercii et XXI[(a)] .
primi et secundi . et quia duplum tercii et quarta continet terciam . sexies
et eius tres quintas (quartas) erit tercia tercii . vt . VIII . XXI[(e)] . secundi et vna XXI[a] .
30 primi et quarti . sublata . igitur . XXI[(a)] . quarti de quarta et [X]XVIII remanebunt
. XX . LXXXIIII quarti u[t] (quantum?) IX . XXI . secundi et due XXI primi**) .
et due tibi [[v] auf Rasur] b . eiusdem***) . quia igitur secundum semel . et . V . VII[(e)] . sunt

---

*) Am Rande steht (aus dem 16. Jahrh.): sui | atque triplum tercij et triplum 4^{i} de triplis et quartis eorum.

**) 16. Jahrh.: igitur quarta . et secunda 4^{i} hoc est 24 octuagesimo quarto suo sunt tamquam (3) proportio . et tres trigesimo quinto pro[i] . et duo XXI[e] et duo CV . . . primi.

***) et . . . eiusdem] einfach auszulassen.

tamquam duplum et quarta et . XXVIII . primi atque quarta . et XXVIII quarti . sublatis tribus septimis et tribus XXXV^{is} . de uno . et . V . septimis remanebit vnum et VII^{a} et due . XXXVe . secundi tamquam duplum primi et quarta . et . XXVIII^{a} . et due XI [XXIe] . et due . C quin[te] eiusdem hoc est . vt D . et IIII^{or} CCCC . XXe . secundi u^{t} (quantum) mille . VIII° . eorum (CCCC) XXe primi et quia M . VIII$^{[e]}$ continent[ur] . bis . D . IIII$^{e\ (aus\ or)}$. erit secundus duplus primi . et quia secundum semel et . V . VIIe (minus bis primum et II . VIIe?) . hoc est XXXII . XX . VIII . quantum quarta et XXVIII quarti hoc est VIII XXVIII ‖ et quia XXXII^{us} . *fol.* 142^{v} est quadruplus . VIII . erit quartus quadruplus primo et quia duplum secundi . et IIII^{or} . VII . atque . IX . XXVIII . primi et quarti sunt ut (quantum) primum sexies et tres quarte (·) erit duplum tercij et quarta . tantumdem et quia . VI . et tres . quarte est triplum . duobus et quarta (·) erit tercium triplum primo . Triplum igitur secundi tercij quarti est . vt . XXVII ad vnum que $\overline{\text{C}}$ (coniunctim?) faciant . XXVIII erit primum vnum et ob hoc secundum duo . tercium tria . quartum quatuor.

56) Opus autem arabum in partibus tantum consistit est que huius . Exempli causa sumendi sunt . IIII^{or} . numeri quorum primus cum medietate reliquorum faciat . XXXVII . secundus cum tercia . tercius cum quarta . quartus cum quinta . omnium reliquorum faciat XXXVII . ponatur igitur numerus partes ex hijs partibus habens ut est . XII . cuius medietas est. VI . tollaturque de XII numerus qui cum tercia . reliqui faciat . VI . et ipse est . III . Item alius qui cum quarta . residui constituat . VI . et hic est IIII tercius quoque qui cum quinta . reliqui faciat ipsum . VI . qui erit IIII et dimidium . coniunganturque . III . IIII . IIII . et dimidium et facient XI et dimidium quod si nominarent (ipsi nominarunt) ad XII . in po^{le} esse fi$^{\overline{cc}}$ (in positione esse falsi). Reliquum . igitur ad XII hoc est dimidium parciatur . per tria et eueniet sexta et habebimus loco primi . sextam loco secundi tria . et sextam loco tercii . IIII et . sextam loco quarti . IIII dimidium et sextam . Cumque sex qui est dimidium . XII . cum sexta continet sextam . XXXVIIes . de quesitis numeris primus erit vnum secundus XIX . tercius XX . V . quartus XXVIII . Demonstracio . sint . IIII . numeri . a . b . c . d . sitque in ter partes maioris denominacionis . e . que cum . a . facit datum numerum . sitque . f . vt . b . c . d . erit igitur . a . minimum . Esto enim . g . pars a . c . d . que cum V [b] coniungetur . et quia pars . c . d . quarta . est e . est maior . qua pars eorum quota est g . erit e . et pars a . quota . est g maius quam a . cum parte V [b] quota . est e . Demptis igitur illis partibus de . a . et b . erit

residuum . b . maius residu[o] a . quare et parti simili g . detracta . a . b . quia minus est residuum quoque maius etiam residuo . a . Itaque . b . maior . a . et . alij simili modo . Auferantur ergo a . singulis equalia . et sint . h . k . l . reliqua m . n . o . quia igitur . b . cum parte . a . c . d . facit a . 5 e et . m cum tota . parte . eorundem faciet . e . quia . b . equale . m . et ideo . m cum tota parte . [A] et c . d . hoc . est cum tota parte residui sui . ad . f . faciet . e . similo enim cum parte que adiuncta . e . facit a . e . facit . e . hoc . est cum parte . k . d . b . quod est reliquum ad . f . atque o cum parte que cum . d . facit a . e . faciet . e . hoc est cum parte . l . b . c . 10 quod est . residuum ad . f . detractis . que m . n . o . de . f . remanebt . h . k . l . quod si diuidatur per numerum . b . c . d . fient . h . k . l . equalia . a . abebimus ergo a . et adiunctis . h . k . l . cum m . n . o . fient . b . c . d . secundum quod in opere factum est.

57) *Non dissimili modo preter opus precedere (praecedens) in qualibet propor-* 15 *cione adiuntorum. hoc preostenso que omnia ad iuncta uel similiter erunt maiora hijs ad que data sunt.* Si enim est alteri po[le] ponatur . sint que quatuor . numeri vt superius . a . b . c . d . atque . a . cum . e . f . g . dato . ad . b . c . d . faciat . t . atque b . cum h . k . l . dato . ad c . d . a . facient . eundem . sitque . e . f . g . maior . b . c . d . et h . k . l . minor . c . d . a . Maior . 20 est igitur . e . quam b . addatque . m . Itaque . a . cum m f . g . fa[t] . h . k . l . et quia a . maior . h . erit . k . l . maior . m . f . g . est . f . g . maior . c . d . et . c . d . maior . k . l . quare . f . g . maior . m . f . g . quod est in po[le] . Reducamus igitur suprapositum exemplum in quo primus cum triplo reliquorum trium facit . datum numerum . sumamus itaque . XXVIII . loco . XII . 25 superius posito sit que super primum quod cum illo additur . quod ad reliqua minorem . habet proporcionem si fuerit maius ut hic triplum . sit . igitur triplum . XXVIII . LXXXIIII . et minuamus numerum . a . XXVIII qui cum triplo et quarta . residui faciat . LXXXIIII . et ipse est tres et nona . itemque alium . qui cum tripla(o) et IIII septimis residui faciat . 30 LXXXIIII . et hic est . VI . et due none . tercium etiam qui cum quadruplo residui faciat . LXXXIIII . et ipse . IX . et none . que similiter iuncta faciunt . XVIII . et . VI . nonas super que . XVIII . et addit . IX . et tres nonas cuius tercia . est tres et nona . et hic erit proprimo Ipsum etiam addatur singulis aliorum et fiet loco secundi . VI . et due . none . loco tercij . IX . et tres 35 none . loco quarti . XII . et IIII none . imo . que est proporcio inuenta . In ista autem operatione uero [non (?)] erit . 8X . quasi numerus datus est quod aggregatur . ex ipso et primo inuento . s . 8Λ . et . i. {nonum (?) primum . sicut patet et proporcionem et per rationem . et istius aggregati ad primum propositum inuentum considerabitur . proporcio . s . 8Λ . et . i . q [9[a]] ad 3 . et . i .

[9][um] . et est uigetupla octupla . et talis erit . [28][auf Rasur] ad primum suorum . s . ad vnitatem . et hoc manifeste docet in opere parcium quo vtuntur . arabes comparat . enim . VI . et qua tamquam numerum datum inuentum qui componitur . ex . σ . et . VI[a] . ad VI[a] . quod est loco primi ut sunt . inueniatur proporcionum 3 Λ ad . I. 5

58) *Trium numerorum continue proporcionalium si duo extremi dati fuerint et medius datus erit.* Extremus in extremum ducatur . et tantum erit quantum medius in se ductus . Illius ergo radix . extrahatur . et habebitur medius . uerbi gracia . IX . et IIII extremi sint . ducatur que vnus in alium et . XXXVI . cuius radix est . VI . et ipse est medius in continua pro- 10 porcionalitate IIII[or] . IX . et IIII .

59) *SI trium numerorum continue proporcionalium medius cum altero extremorum datus . fuerit et reliqus datus erit.* Si enim medius in se ducatur . et productum per alterum extremorum datum . diuidatur . exibit reliqus . uerbi gracia . sit IIII . alter extremorum . et . VI . medius . 15 Ducatur . ergo . VI . in se et fient . XXXVI . qui diuidantur per . IIII . abent . IX . et ipse est tercius in continua proporcionalitate post . IIII . et . VI .

60) *Si trium numerorum continue proporcionalium primi ad secundum fuerit proporcio . data et primi ad tercium data erit.* Proporcio siquidem 20 primi ad secundum in proporcionem secundi ad tercium fa[c] proporcionem || primi . ad tercium in se ergo ducta fa[c] eandem . c . ergo ipsa nota sit in *fol.* 143[r] se ducta faciet extremorum proporcionem datam . uerbi gracia . proporcio primi ad secundum sit sesquitercia . Ducatur ergo vnum et tercia in se et fient vnum et due tercie et nona . primum ergo continebit tercium et duas 25 tercias et nonam ipsius.

61) *Trium numerorum continue proporcionalitatis (ium) si primi ad tercium fuerit proporcio data* (·) *et primi ad secundum data erit.* Quia enim proporcio primi ad secundum (in) se ducta facit proporcionem primi . ad tercium si proporcionis primi ad tercium radix extrahatur . habebitur . proporcio primi ad 30 secundum data . uerbi gracia . primus contineat tercium bis et eius quartam . hoc est . IX . quartas eius radix est tres medietates quare primus continet secundum semel et medietatem.

62) *Si trium numerorum continue proporcionalium medius datus fuerit et compositus ex reliquis* ( ) *singuli eorum dati erunt.* Sit . a . ad . b . sicut b . 35 ad . c . sitque . b . datus et a c . datus et quia quod fit ex . b . in se tantum est quantum quod ex . a . in . c . producitur . datum quare vtrumque datum . uerbi gracia . sit XII . medius et conpositus ex extremis sit XXVI . qui (in) se ductus faciet . D . C . LXXXVI . vnus . a . ductus in alium faciat . C .

XLIIII quo quater detracto . de . D . C . LXXVI . remanebit C. cuius radix . est X et ipse est differencia extremorum erunt ergo . VIII et XVIII .

63) *Trium numerorum proporcionalium si compositus ex primo et tercio datus fuerit ad medium uterque ad illum datus erit.* Sit a . c . ad . b . datus et quia ipsi ad . b . est proporcio conposita . ex proporcione . a . ad . b . et proporcione c . ad . b . c . [f]it[auf s] proporcio . a . ad . b . ad vnum . sicut vnum ad proporcionem que est c . ad . b . c . sicut vnum quod est medium datum et conponitur[sitis (?)] ex illis proporcionibus dat̄ . erit vtraque data . uerbi gracia . conpositum . ex extremis . contineat medium bis et eius . XII . Itaque . duo et . XII . ducantur . in se et . fient IIII et XLIX . C . LXIIII[e] (XLIIII) . dempto ergo quod fit ex vno in se quater . id est IIII[or] remanebunt . XLVIIII . C[e] . XLIIII . eius radix . est VII . XII[e] . ipsum si tollatur . a duobus . et XII . relinquentur . vnum et due quarte cuius medietas est tres quarte . quare minor . erit tres quarte medii . et medio (medius) similiter maioris.

64) *Tribus numeris proporcionalibus si alter extremorum fuerit datus reliquusque cum medio fecerit numerum datum quilibet eorum datus erit* . Sint proporcionales a . b . c sicque . a . datus et b . c . faciat numerum datum ducaturque . a . in . b . c . et . fiat . d . e . ut sit . d . ex ductu . a . in b . et . e . ex ductu . a . in . c . itemque et ipse fiet ex . b . in se quare quod fit ex . b . in se et a . qui datus est erit datum (·) ipse ergo datus . uerbi gracia . Alter extremorum sit . IX . et compositus ex reliquis XXVIII . Ducatur itaque . IX . in XXVIII et fient . CC . LII . quod quater sumptum facit . mille . et . VIII . quibus addatur . quadratum . IX . et fient mille . LXXXIX . cuius radix est . XXXIII . sublato . IX remanent . XXIIII . cuius dimidium est XII et ipse est medius trium . terciusque erit . XVI.

65) *Si alterum extremorum cum medio ad reliquum extremorum datum fuerit . utrumque ad medium datum erit.* Ut sit . a . b . ad . c . proporcio data . atque ipsa constat ex proporcione . a . ad . c . et b . ad . c . est proporcio . a . ad . c . ad proporcionem . b . ad . c . sicut proporcio . b . ad . c . ad vnum . propter missa ergo vtrumque earum data erit . Uerbi gracia . sit alterum extremorum . cum medio sescuplum ad tercium . itaque sex quater sumptum facit . XXIIII . cui addito vno fient . XXV . cuius radix . V . de quo dematur . vnum et reliqui dimidium erunt duo . quare medium minori et maius medio duplum erit.

66) *Si duplus medii cum uno datum numerum fecerit reliquo extremorum exeunte* (?) *dato* (·) *singuli ipsorum dati erunt.* Ut si . a . cum duplo . b . fecerit numerum datum atque c . datus fuerit . Ducatur ergo . c . in se et fiat . d . et in a . et fiat . e . et in b . bis et fiant . f . g . eritque totus . d . e . f . g . datus est et quia e . quantum quod ex . b . in se erit . d . e . f . g . quod

sit . ex . b . c . in se . Extracta igitur radice habebimus . b . c . datum et quia
c . datus et . b . atque . a . Uerbi gracia . Alter extremorum sit duo duplum
que medii cum reliquo faciat . XVI . Ducatur ergo duo in se et XVI . et fient .
XXXVI . cuius radix est . VI . dempto que binario remanent . IIII et ipse
medius (·) tercius VIII (·) 5

67) *Tribus numeris proporcionaliter sumptis si conpositus ex omnibus datus fuerit extremorumque proporcio data quilibet eorum datus erit.* Si
enim proporcio fuerit data . et extremi ad medium et medii ad tercium .
erit proporcio . data conpositus ergo secundum hoc proporcionaliter diuidatur
. et habebimus illos tres . Uerbi gracia . conpositus ex tribus fit (sit). XIX. et 10
extremorum alter alterum contineat bis et quartam (·) duorum . ergo et quarte
extrahatur radix et erit vnum et dimidium . Diuidatur igitur . XIX . per tria
u^{t} p^{so} s^{t} . secundum sesqualterum et secundum . tercio et fient . IIII^{or} . VI . IX .

68) *Si compositus ex tribus numeris proporcionabilibus fuerit datus atque extremorum differencia data ipsi etiam dati erunt.* Data autem differencia aufera- 15
tur . et item addatur . ‖ conposito et prouenient data duplum minoris trium *fol.* 143^{v}
cum medio itemque duplum maioris cum medio . vnumque in alterum ducetur
. et quia quod ex duplo minoris in duplum maioris ducitur . est quantum quod
ex medio in se quantus (quater) erit quod producitur . quantum quod ex medio
in se ter et in compositum . bis datum (·) quare quod fit ex medio in se et in 20
duas tercias compositi datum erit cumque tercia sicut data erit medium datum
. et sit extrema . Uerbi gracia . (Compositum ex tribus sit) XXXVIII . differencia
extremorum . X . quo detracto a XXXVIII . et addito fient XXVIII . et XLVIII . vno
quod in alterum ducto fient . M.CCC.XLIIII . cuius tercia . CCCC . XLVIII . hec
quadruplicetur et erunt . M . DCCXC (II) . cui addatur quadratum duarum ter- 25
ciarum . XXXVIII . hoc . XXV . et tercia et fient . II . CCCC . XXXIII et
due tercie et . IX$^{(a)}$. cuius . radix est . XLIX . et tercia de quo ablatis . XXV .
et tercia reliqui medietas est . XII et ipse est medius conpositusque ex
reliquis . XXVI . quare vnus . VIII . et alter . XVIII.

69) *Tribus numeris proporcionaliter sumptis si conpositus ex duobus extremis . itemque conpositus ex minimo extremorum et medio dati fuerint. omnes eos datos esse conueniet.* Sint tres numeri proporcionales . a . b . c . 30
maximo . a . sintque dati . a . c . et . b c . medietas quod (que) differencie a . ad .
c . sit . d . manifestumque quod c . d . est medietas . a . c . quadratum .
itemque . c . d . est u^{t} quadratum . b . et quadratum . d . quantum quadratum . 35
c . d . est u^{t} quadratum . d . et quod fit ex . d . in . c . et . c . d . in c . est .
c d . cum . d . fac^{t} . a . atque . a . in . c . u^{t} . b . in se et quia c . b (über a)
tot . et c . d . dat erit differencia eorum data . que est differencia . d et . b .
quare cum quadrato eorum data conpositus ex eis et . vterque datus erit .
cumque sit . b . datus . et . a . c . erit et a . et c . datus . Uerbi gracia . conpositus 40
ex maximo et minimo fit XXXIIII . et ex medio et minimo . sit XXIIII .

atque medietas . XXXIIII . est XVII . cuius quadratum est CC . et LXXXIX .
et ipsum constat ex quadratis medii et dimidie differencie extremorum quo-
rum etiam differencia est . VII . quadrato igitur VII . hoc . est XLIX sublato .
de . CC . LXXXIX . remanebt . CC . XL . cui cum aliis iuncti facient . D .
5 XXIX cuius radix XXVIII (XXIII) . de quo ablato VII . reliquo que demidiato
fient . VIII . et residuum de XXIII . erit . XV . qui est medius et sic duo ex-
tremi prouenient . IX . et XXV.

70) *Si uero conpositus extremis itemque ex maximo . et medii(o) dati
fuerint ter(m)inos proporcionales dupliciter assignari continget.* Ut si a c .
10 et a . b . sint dati posil[e] (positione?) . erit dupliciter sumi a . b . c . Esto . enim
. quod . d sit medietas . differencie porcionum a c . que sint . e . maior et .
f . minor . semper enim a . c . maior . duplo . b . Dico ergo quod d . pro-
porcionalis erit inter c et f . atque c . d . quantum . [f] . b . et enim f . b
est medietas a c . erit quadratum eius tamquam quadratum . b . et d . re-
15 manet ergo quadratum . d . quantum quod fit ex . b in . f b[is et f] in f
et quia f . b . et [i][(item?)] e b . sunt ut e . erit quadratum . [d] quod fit ex . e . in .
f . quare . d in ter c . et f . est et . c d . constat . ex dimidio [ac] . et b . et d .
et a . b . simili modo equalia ergo sunt data . cum erunt . d . et . b . Cum
enim a . b . dati atque dimidium datum erit . d . b . est quadrata . eorum data
20 . vtrumque ergo datum . ob hoc etiam et e . f . atque . a . et . c . data erunt
. Uerbi gracia . Conpositum ex maximo . et medio . sit . XXVIII . et
maximo et minimo XXV . Dimidium autem . XXV . est XII . et dimidium
cuius quadratum est C . LVI et quarta . eiusdem differencia ad . XXVIII .
[est] . XV [et] dimidium . Huius quadratum est CC . XL . et quarta . de
25 quo tollatur CLVI et quarta et relinquentur . LXXXIIII . cuius ad . C . LVI .
et quartam differencia est LXXII . et quarta cuius radix . VIII et dimidium .
quo dempto . XV . et dimidio et reliquo mediato exibunt tria et dimidium .
quod cum XII facit ipsum igitur . tam . XII quam tria et dimidium potest
esse dimidium et si fuerit XII erunt extrema . XVI et nouem si tria et di-
30 midium erunt extrema . XXIIII . et dimidium maius et dimidium tantum
erit minimum.

71) *Si fuerint IIII[or] numeri proporcionales fuerintque primus et quartus
dati atque compositus ex secundo et tercio omnes quoque dati erunt.* Quia
enim primus et quartus dati et quod fit ex primo in quartum quantum
35 quod ex tercio in secundum erit quod ex tercio in secundum producitur
datum . et c (cum?) . compositus ex ipsis datus sit vtrumque eorum datus erit
Uerbi gracia . primus . XV . quartus . VI . conpositus ex secundo et tercio .
XIX . ducatur ergo . XV . in . VI . et erunt . IX (XC) est et quadratum . XIX
. est . CCC . LX . I . de quo quater tollatur . X . C . et remanebit vnum cuius
40 radix vnum et ipsum est differencia tercij et secundi . quae ipsa erunt . X .
IX . sed non est distincio quod sit tercium quod secundum.

72) *Primo autem et secundo datus (quarto dato) si differencia et secundi et tercii data fuerit uterque eorum datus erit.* Eadem enim de causa qua et prius quod fit ex secundo in tercium datum erit est ergo sic eorum differencia data consequitur eos datos . esse . Uerbi gracia . primus XII . quartus tres (·) differencia est secundi et tercii quinque . Itaque ex ductu . XII . in tria fiunt . XXXVI . quod quater sumptum cum quadrato V . faciet . CLXIX . cuius radix est . XIII . de quo dempto . V . reliqui medietas . erit IIII . qui est unus et reliquus . IX . erit sed indistincte quis tercius quis secundus.

73) *Si item primus et quartus dati fuerint et proporcio secundi ad tercium data quilibet eorum datus erit.* Si enim dati sunt primus et quartus erit eorum proporcio data que constat ex proporcione primi ad tercium et secundi ad quartum sed est proporcio tercij ad secundum data . sit diuisa per ipsum proporcionem primi ad quartum (·) data erit et conposita ex proporcione primi ad tercium et secundi ad quartum Totius ergo radix extrahatur et habebitur proporcio primi ad tercium quare tercium datum est et proporcio secundi ad quartum et ob hoc secundum . datum . Uerbi gracia Primum sit . XVIII . quartum duo . ‖ secundum quadruplum tercio . secundum (primum) *fol.* 144r [X] VIII continet duo nouies . Itaque nouem diuidantur per quartam et exibunt . XXXVI cuius radix extrahatur et erit . VI . Primum ergo continebit sexies tercium . cum igitur tercius tres et secundus sexies duo et ipse secundum hoc erit XII .

74) *Si fuerint IIII[or] numeri proporcionales primus que et quartus dati fuerint compositus que ex primo et secundo ad tercium datus* (·) *singulos eorum datos esse conueniet.* Sint proporcionales numeri a . b . c . d . datique sint . a . et . d . et . a . b . ad . c . datus et quia proporcio . a . b . ad . c . constat ex proporcione a . b . [ad] . a . et . a . ad . c . sed proporcio . a . b . ad . a . sed uero proporcio . b . ad . a . et vnum . erit ut proporcio . a . ad . [c .][auf b] ducta in proporcione[m] . b . [ad . a .] et in vnum faciat proporcionem a . b . ad . c . sed proporcio . a . ad . [e] . ducta in proporcionem . e . ad . d . fac[t] proporcionem . a . ad . d . sicut ergo proporcio . a . ad . d . ad proporcionem . a . b . ad . c . ita proporcio . c . ad . d . ad proporcionem . b . ad a . et ad vnum . sed quia proporcio . c . ad . d . ad vnum sicut vnum ad proporcionem . b . ad a . vtrumque ad medium datam esse consequitur . quare vtraque data et sic . b . et . c . data erunt . Uerbi gracia . Primum sit . XVI . quartum tria atque primus et secundus quadruplum . sicut tercio cumque sit . XV (XVI) . contine(n)s . III quinquies et eius terciam . V . et tercia continebit IIII . et eorum quartam et XII[a] et IIII[or] erit in quarte quinarii et vnus tercie . Itaque tres quarte quater sunt tria quibus addatur . vnum et fient IIII[or] cuius radix est duo de quo subtracto . vno et reliquo mediato proueniet medietas vnius (·) secundus ergo medietas . XVI . et est VIII . tercius duplus

tribus et est . VI . Aliter sumatur quarta XVI que est IIII . sicut tercius est primi et secundi et ducatur . III . in . IIII . et fient . XII . cuius quadruplum addito quadrato IIII faciet LXIIII . cuius radix . VIII . de quo demptis IIII et reliquo mediato fient due que cum IIII^{or} facient . VI . et ipse est tercius secundus VIII quartus IIII^{or} .

75) *Quatuor numeris proporcionalibus sed conpositus(o) ex primo et secundo itemque ex tercio et IIII dato . fuerint primusque ad quartum datus singulos eorum datos esse necesse est.* Quum enim compositi dati sunt et proporcio eorum data est que proporcio conpositi ex primo et secundo ad conpositum ex tercio et quarto . ea primi ad tercium ergo data cumque primi ad quartum data . erit primi ad conpositum ex tercio et quarto . datum . Datum primum sic que tercium que secundum et quartum . Uerbi gracia . conpositum . ex primo et secundo . XXV . e(t) . ex tercio et quarto X . est et quartus sit IIII . XV . primi cumque sit X . due . V^{e} . XXV . erunt quartus tercius . XXVe . primi cumque tercius et quartus sit . X . erit primus XV . secundus X . tercius . VI .

76) *Si uero compositus ex primo et quarto atque ex secundo tercio dati fuerint et proporcio primi ad tercium data quilibet eorum datus erit.* Ut si . a . d . atque . b . c . dati c̄c̄ que proporcio . a . ad . c . data erit ergo proporcio a . b . ad . c . d . data cumque totus a . b . c . d datus ert . a . b . et c . d dati . Differencia ergo . b . ad . d . data . atque differencia . a . ad . c . est que proporcio differencie . a . ad . c . ad differenciam . b . ad . d . ea est proporcio . a . c . ad . d . b toto ergo a . b . c . d . dato dati ert . a . c . et . b . d . cumque differencie . a . ad . c . et b et d . date sint eis omnes datos esse consequitur . Uerbi gracia . sit primus cum quarto . XVI . secundus cum tercio XIIII atque primus sequaliter (sesquialter) tercio . Juncto igitur uno cum vno et dimidio (totus?) erit conpositus ex omnibus . hoc est XXX . atque conpositum ex tercio et quarto compositus duplus sesqualter (?) ipse ergo erit XII . est (et) quartus cum primo erat . XVI . ergo primus superat tercium . IIII . ergo quartum est dimidium tercii ipse ergo erit VIII et primus XII secundus VI . quartus IIII .

77) *Si fuerint quatuor numeri proporcionales toto que ex omnibus conposito dato fuerint differencie primi ad secundum et tercii ad quartum date* (·) *omnes eos datos esse demonstrabitur.* Si enim differencie primi ad secundum et tercii ad quartum date fuerint erit . differencia primi et tercii ad secundum et quartum . data . quare (uero?) est conpositus ex omnibus datus (·) sic uterque eorum datus erit que vnius ad alium proporcio (data?) ea primi ad secundum et tercii ad quartum primus ergo ad secundum et tercius ad quartum est datus primus igitur et tercius ad differencias suas ad illos dati erunt . cumque sint differencie date et ipse(i) erunt dati et reliqui . Uerbi gracia . conpositus

ex omnibus sit . XXXV . et differencia primi ad secundum . V . et tercii ad quartum . duo (·) primi ergo et tercii . differencia ad secundum et quartum . erit VII . quo subtracto de . XXXV . residui medietas erit XIIII . qui conponitur ex secundo et quartus(o ·) conpositus que ex primo et tercio XXI que
[—]
c . sit triplus ad VII . que est differencia ipsius ad XIIII . erit pri(m)us triplus 5
ad . V . et tercie (us) ad due que sunt differencie ipsorum ad secundum et quartum primus ergo XV . secundus . X . tercius VI quartus IIII .

78) *Quatuor numeris proporcionaliter dispositis et conposito ex omnibus dato si differencie primi ad quartum et secundi ad tercium date fuerint* (·) *singulos eorum datos esse consequitur.* Conposito ex . a . b . c . d . dato sit e 10
differencia . a . ad . d . et h . differencia . b . ad . c . data (·) posito quod a . sit maximus et . b . maior . c . quia igitur differencia . a . ad b . et . b . ad . c . et . c . ad . d . si de e tollatur . h . remanebit differencia . a . ad . b . cum differencia c . ad . d . faciens quiddam datum quod erit differencia . a . c . ad . b . d . data cumque totus . a . b . c . d . sit datus . erit . a . c . et . b . d . dati erunt . b . 15
et . c . similiter . b . et d . dati . Uerbi gracia . sit conpositus ex omnibus . XLV . differenciaque primi ad quartum . VII et secundi ad tercium duo Demptis ergo duobus . de . VII . remanient . V . quibus detractis de XLV reliqui medietas erit XX et ipse conponitur ex secundo et quarto primusque et tercius erunt . XXV . Iterum . Juncta VII . cum duobus faciunt IX . quibus 20
demptis de . XLV . residui dimidium erit XVIII qui constat ex tercio et quarto et XXVII . et (ex) primo et secundo et quia XXV . addt. sio (continet?) . XX (et) eius quartam (. simili modo) primus continebit secundum et eius quartam Itaque XXVII . continet secundum bis et eius quartam ipse ergo erit XII et pri(m)us XV sicque tercius . X . et quartus . VIII . ‖ *fol.* 144v.

79) *Si tres numeri proporcionales tribus aliis continue proporcionalibus* 26
comperantur primus ad primum atque tercii ad tercium fuerit proporcio . data (·) *medius quoque ad medium datus erit* . Ut si . a . ad . b . sicut . b . ad . c . itemque . d . ad . e . sicut . e . ad . f . sitque proporcio . a . ad . [d .] et . [c .] ad . f . data (·) erit . b . ad . e . proporcio data . continuentur . enim pro- 30
porcio . a . ad . d et proporcio . c . ad . f . et conposite extrahatur radix et ipsa proporcio . b . ad . e . Uerbi gracia . primus contineat primum et eius octauam . tercius sit duplus tercie Ducantur ergo duo in vnum et octauam et fient duo et due octaue quod erit denominatio proporcionis . conposite si continentur . eius extrahatur radix et prouenient XII . et VIII hoc est vnum et 35
dimidium . Itaque medium continet medium semel et eius medietatem (·) proporcio enim ex proporcionibus extremorum continuata est tamquam proporcio mediorum duplicata.

80) *Si quotlibet numeri continue proporcionales todidem aliis continue proporcionalibus conperentur fuerint que primi ad primum* (·) *secundi ad secun-* 40
dum proporciones date (·) *reliquorum ad reliquos per ordinem porciones data*

esse conueniet. Quot enim differencia proporcionis primi ad primum ad proporcionem secundi ad secundum ea . erit proporcionis primi ad secundum ad proporcionem primi ad secundum ea etiam proporcionis secundi ad tercium . ad proporcionem secundi ad tercium et ita per ordinem est que
5 differencia proporcionis secundi ad tercium ad proporcionem secundi ad tercium ea proporcionis secundi ad secundum ad proporcionem tercii ad tercium . quare continue que differencia proporcionis primi ad primum ad proporcionis secundi ad secundum ea proporcionis secundi ad secundum ad proporcionem tercii ad tercium similiter in addendo et diminuendo et ista
10 ad extremos Illa ergo differencia continue dempta . relinquetur relinquorum ad inuicem proporcio . Uerbi gracia . quatuor comparantur ad . IIII . primus continet primum et eius terciam secundus est secundo equalis. Itaque per vnum a quo denominatur . equalitas diuidatur unum et tercia et exibunt vnum et tercia et per vnum et terciam diuidatur . vnum et exibunt tres
15 quarte . tercius ergo tercii erit . tres quarte atque tres quarte diuidantur . per vnum et terciam et exibunt . IX . XVIe . quartus igitur quarti erit . IX . XVIe .

81) *Si duo numeri per alios duos diuidantur et istorum et illorum fuerint proporciones date* (·) *diuidencia quoquę proporcionem ad inuicem habebunt*
20 *datam.* Ut si . a . et . b . per . c . et . d . diuidantur et exeant . e . et . f . fueritque . a . ad . b . et c datum . ad . d . diuidatur proporcio . a . ad . b . (per) proporcionem c . ad . d . et exibit proporcio . e . ad . f . quam proporcio . a . ad . b . continuatur ex proporcione . c . ad . d . et proporcione . e . ad . f . Uerbi gracia . diuisoris ad diuisorem sit proporcio dupla . et in ter diuisos
25 sit dupla proporcio . Diuidantur ergo tria per duo et exibunt vnum et dimidium quare in ter diuidencia . erit proporcio sesqualtera . nota quod diuisor uocatur . hic numerus per que(m) fit diuisio numerus diuidens uocatur numerus quociens.

82) *Quot si inter diuisores et diuidencia fuerint date proporciones et numeri*
30 *diuisi erunt ad inuicem dati.* Ducatur . siquidem altera in alteram et producetur illorum (proporcio) simili de causa. Uerbi gracia . diuidens diuidenti est sesqualterum . et diuisor diuisori sesquialterius (sesquitercius?) Itaque vnum et dimidium in vnum et terciam ducantur . et fient duo quare numerus diuisus alii duplus erit atque diuidencia differencia .

35 83) *Si numerus datus per duos numeros diuidatur quorum differencie date fuerint ipsi etiam dati erunt.* Sit numerus datus . a . qui diuidatur . per . b . et c . quorum differencia . d . data et exeant . e . et f . quorum differencia g . data sitque sicut . b . ad . d . ita . h . ad . c . est sicut b . ad . d . ita . f . ad . g . quare . f . ad . g . sicut h . ad . c . est . f . in . c .
40 facit . a . ergo . et h . in g fait . a . Iterum . b . in . c . faciat . l . igitur et d in h . faciet . l . Itaque a . ad l . sicut . g . ad . d . quare . a . ducatur in .

d . et diuidatur . productum per g et exibit l . datum . quare . c . differencia . b . ad . c sic data erit . b . et c . data et ob hoc . b . et . f . Uerbi gracia . XXIIII diuidatur per duos numeros quorum differencia sit vnum et exeant duo numeri quorum differencia duo Ducatur ergo vnum in XXIIII et erunt . XXIIII . que ducantur (diuidantur) per duo et fient XII quorum qua- 5
druplo addatur quadratum vnius fientque XLIX cuius radix . VII de quo sublato vno et reliquo mediato prouenient tria et ipse erit minor diuisorum maior IIII^{or} diuidencia . VIII et VI .

84) *SI uero diuidentium differencia data fuerit conpositusque ex diuisoribus datus quilibet eorum datus erit.* Disposicio superior remaneat preter 10
quod . b . c . datus est et non d . sed etiam proporcio . a . ad . g . que . l . ad . d si igitur l diuidatur per . d perueniet quoddam datum cumque d . sit differencia e (c) . et b qui faciunt vnum datum et b fient ex c in b . erit . a . et b . datum et sic . e . et f . data . erunt . Uerbi gracia . XX diuidantur per duos numeros ex quibus conponitur VII et prouenerint duo nu- 15
meri quorum differencia est . VI . diuidatur ergo . XX . per VI . et exibunt tria et tercia cuius quadruplum est XIII et tercia . cuius quadratum si addatur . quadruplo quadrati VII . fient (C) CC . LXXIII . et VII none cuius radix est XIX et tercia . de quo subtracto XIII . et tercia . reliqui medietas est III . quo subtracto de VII reliqui dimidium est duo qui est unus diuisorum 20
(·) reliquus . V . diuidencia quoque . X . et . IIII.

85) *Si duo fuerint numeri ad inuicem dati et unus in alium ductus fecerit numerum datum* (·) *uterque eorum datus erit* . Ut si . a . ad . b . datus et vnus in alium fecerit . c . datum esto ergo aliquis ad . c . sicut . a . ad . b . qui fit . d . et datus atque ipse fiet ex a . in se (·) extracta ergo radice illius 25
habebitur a . datus et sic . b . datus erit. Uerbi gracia . vnus alteri sit sesquitercius vnusque in alium faciat XLVIII addatur ergo XLVIII . sua tercia et fient . LXIIII cuius radix est VIII et ipse est ille vnus et reliquus erit VI.

86) *Duobus numeris ad se datis si quadrata eorum fecerint numerum datum ipsi etiam dati erunt* . Ut . a . et . b . datus et ex . a . in se fiat . c . 30
et ex . b . in se fiat . d . sitque . c . d . datus . Est autem c . ad . d . proporcio a . ad . b . duplicata quare et data (est) . et c . et d . datum erit. Uerbi gracia . alter alteri duplus erit et quadrata eorum coniuncta faciunt . D . quia ergo vnum vni quadruplum erit erit . D . eidem quintuplum ‖ et ipsum *fol. 145r.*
erit C . cuius radix est . X . et ipse est minor maior autem erit . XX . duo 35
et reliquus . IV . („duo et reliquus . IV ." gehört an das Ende von 87.)

87) *Datis numeris duobus ad inuicem si quot fit ex conposito ex ips̄ (is) in eorum differenciam datum fuerit uterque eorum erit datus.* Quod enim fit ex conposito in eorum differenciam est quod addit quadratum maioris super quadratum minoris . cumque quadrati ad quadratum sit proporcio data et 40
illius ad ipsum data erit (·) quare quadratum datum ob hoc oblatus eius

(datum ipsum?) et simpliciter reliquum. Uerbi gracia . alterum alteri triplum est et conpositum ex ipsis in eorum . differenciam facit XXXII . cum ergo quadratum quadrato sit nonuplum et ipsum erit eidem octuplum quare quadratum minoris erit IIII et ipse erit . (duo et reliquus . IV .)

88) *Si quadratus (m) cum addicione radicis sue per datum numerum multiplicate datum numerum fecerit ipse etiam datus erit.* Sit quadratus . a . radix eius . b . multiplicata per . c . d . ut . et c . et d . sit eius medietas . atque ex . b . in . c . d fiat . e . sitque . a . e datus quia igitur b . c . d secundum b . multiplicatus facit . a . e . quadrato . d . adiuncto . ad . a . e . fiat a . e f . eritque . a . e f . quod fit ex b c in . se cum que sit . a e . f . datus erit et b . c . datus subtacto igitur . c . remanebit . b . datus et sic . a . datus erit . Uerbi gracia . Est quadratus cuius radix si multiplicetur per . V . et productum . ei . addatur . fient XXXVI cui addatur quadratum duorum et dimidium . et fient XLII . et quarta cuius radix est sex et dimidium de quo ablatis duobus et dimidio remanent . IIII . qui est radix et quadratus XVI.

89) *Quadratum qui (si) cum addicione dati numeri facit numerum que (m) radix ipsius per datum numerum multiplicata producit contingit dupliciter assignari.* Sit enim idem quadratus . a . radix . b . numerus datus additus . c . atque d . e datus in quem b . ductus facit . a . c . cuius medietas d . et ipsius quadratum . f . atque differencia . b . ad . d . sit . g . quia igitur . b . in . d [e] facit . a . c addunt a . et f . super . a . c quadratum g Itaque a . vtrobique dempto . addit f . super c . quadratum g . Dempto ergo . g . de . d . potest remanere . b . et addito . g . ad [d] potest fieri . b . quare duplic(ab?)itur assignabitur . a . Uerbi gracia . Sit quadratus qui cum addicione VIII . faciat numerum quem radix sua per . VI . multiplicata producit. Medietas ergo sex que est III in se ducta facit . IX . qui addit vnum super VIII . cuius radix vnitas que erit differencia radicis predicti quadrati et ternarij . Hac igitur differencia dempta et addito ternario habebimus duo et IIII . q^{or}uorum quadrata IIII . et . XVI. Vtrique igitur addantur VIII . et fient . XII et XXIIII . qui fiunt ex ductu senarii in duo et quatuor secundum quod propositum fuerat .

90) *Si ex multiplicatione radicis sue per datum numerum addito dato numero fiat quadratus ipse etiam datus erit.* Sit ut prius . a . et . b radix et c . d . datus numerus multiplicans et . c additus differencia igitur . b . ad . c . d . sit g ut sit g . c . d . tamquam . b . et quia b . in se facit . a . quam etiam producit in . c . d . addito e . constat . e . fi(eri?) ex . b . in g et quia g c . in se est quantum . b . in g . [c] . d . in se [i]g[itur] erit etiam quantum d . in se cum e q̄t (quot) data sint erit et . g . c datum quare et g . datum utque g . c . d . qui est b . sitque . a . Uerbi gracia . est quadratus qui fit ex addicione . XII . super multiplicationem radicis sue per IIII . Itaque quadrati dimidii IIII . quod est IIII . addatur super XII . et fient . XVI . cuius

radix est IIII . de quo dimidio IIII . dempto remanebunt duo que addita simili modo IIII . faciunt . VI . et ipse est radix quadratus que XXXVI .

91) *Si numerus ad quadratum datus cum addicione numeri ad radicem ipsi dati fecerit numerum datum et quadratum et radicem datos esse consequetur.* Sit . a . radix et . b . quadratus et . c . datus ad . a . et d . datus . ad . b . ut sit c . d . datus Esto . autem sicut . b . ad . d . ita sit g . ad c . Itaque g . b . ad . c . d . sit b . ad . d . quare . b . g datus est autem et g . ad . a . datus ipsius que ad illum proporcio sit e quare . a . in e datum faciet g . qui . c . b . quadrato facit numerum datum erit igitur et a . et b datus . Uerbi gracia . Tercia radicis et quarta quadrati faciunt . XI . igitur quadratus cum radice et tercia eius faciet . XLIIII . Huic itaque addatur quadratum duarum terciarum que sunt dimidium unius et tercie et fient XLIIII . et IIII none cuius radix . est XX tercie hoc est VI . et duo tercie ablatis igitur duobus tercijs manent VI et ipse est radix quadratus uero XXXVI .

92) *Si numerus ad quadratum datus cum numero dato fecerit numerum datum ad radicem et radix et quadratus datus erit.* Sit ut prius . a . radix et . b . quadratus et . d . datus ad . b . qui cum . c . dato numero faciet . c . d . datum ad . a . sicut igitur . b . ad d . sit . e . ad c . quare c datus atque . b . e . erit numerus datus ad . a . erit ergo simili modo et a . et b . datus. Uerbi gracia . Vicesima pars quadrati cum XXV . faciat triplum radicis Itaque quadratum cum quingentis faciet sexagincuplum radicis . Medietas igitur LX . in (se) facit DCCCC qui addit CCCC super . D . cuius radix . XX . et ipse est differencia radicis quadrati et XXX addita ergo . hac differencia et ea . dempta . a . XXX . habebitur radix et X . et . L . quorum quadrata . C . et $\overline{\text{II}}$D (·) de utriusque vicesima sumatur que sunt V et CXX(V) vtrique additis XXV . fient hinc . XXX . triplum X . et llinc . CL . triplus ut propositum fuerat .

93) *Si numero ad radicem dato addatur numerus ut proueniat numerus ad quadratum datus uterque sed hoc (sed hoc = eorum?) datus erit.* Disposicio eadem sit preter quod . d . sit datus ad . g . et . c . d . totus datus ad . b . Eodem autem modo sit . b . ad . c . d . ita sit f . ad . c . et f . ad d . quare e datus et . f . ad . a . datus atque e f . equalis . b . itaque ex hoc et a et b . datus . Uerbi gracia . triplum radicis cum XII . facit . sesqualterum quadrato ergo duplum radicis et VIII . facit quadratum secundum operacionem ergo decime presentis proueniet radix IIII . et quadratus XVI . ‖ *fol.* 145v.

94) *Si compositus ex duobus numeris fuerit ad tercium datus quique ex illis producitur ad quadratum ipsius datus uterque ipsorum ad eundem datus erit.* § Ut si . a . sit . b . c . datus atque ex a . in se fiat . d . et ex . b . in . c . fiat e . datus ad . d (·) sit autem proporcio . b . c . ad a . (equalis) . f . g . composita ex proporcione . b . ad . a et c . et a . proporcio . autem .

e . ad . d . sit . h . et ipsa producitur ex . f . in g . Cum ergo . f . g . datum et ex . f . in . g . fiat datum (·) erit et f et g . datum . Itaque et b . et c ad a datum . Uerbi gracia . Sit conpositus ex duobus ad tercium quintuplus et quod ex vno in alterum fit sic quadrato eius sescuplum igitur VI . tolla-
5 tur quater de quadrato . V . et remanebit vnum cuius radix vnum quod tollatur de . V et reliqui medietas erit duo vnum ergo illi duplum et reliqum . erit triplum.

95) *Si uero conpositus ad tercium datus et quadrata corum similiter ad quadratum illius data* (·) *illa quoque ad ipsum data erunt.* § Disposicio supe-
10 rior remaneat preter quod quadrata . b et c sint e et (o?) . atque ex . f in se fiat . h . et ex g . in se fiat l . erit . h . proporcio e ad . d . et . l . proporcio o (?) ad . d sic que h . l . datum erit cumque . f . g datum erit et f g datum. Ita et . b . et . c . erit datum ad e (a) . § Uerbi gracia . conpositum sit triplum illi et conpositum quadratis sit simili modo quadratum
15 (quintuplum) quadrati . eius etc .

Zur Geschichte der Mathematik.

I. Das Trapez
bei Euklid, Heron und Brahmegupta

von

Dr. H. Weissenborn,
Professor am Grossherzogl. Realgymnasium zu Eisenach.

Das Trapez

bei Euklid, Heron und Brahmegupta.

Wenn ich diese gewiss Manchem auffällig erscheinende Ueberschrift für die erste dieser Abhandlungen wähle, so geschieht es nur deshalb, weil alle Fragen, Bedenken und Ansichten, welche den Gegenstand des Folgenden bilden, mehr oder weniger direkt mit der Betrachtung des Trapezes zusammenhängen, und weil sich alle an letztere, ohne dass diese doch gerade den Schwerpunkt bildete, als an einen leitenden Faden, freilich oft lose genug, aufreihen lassen.

Die Figur des Trapezes, d. h. des von zwei parallelen und zwei nicht-parallelen Seiten gebildeten Vierecks, tritt uns schon auf dem ältesten uns bekannten, Geometrie überhaupt und speciell ägyptische Geometrie behandelnden Documente entgegen, auf dem nunmehr veröffentlicht vorliegenden Papyrus Rhind[1]). Wir ersehen aus demselben, pag. 125—129, dass die alten Aegypter sich bei ihren Flächenberechnungen häufig des gleichschenkligen Dreiecks und des durch eine Parallele zur Basis aus diesem entstehenden gleichschenkligen Trapezes bedienten, und dass sie zur Ermittelung der Fläche eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Basis a und dem Schenkel b, sowie der eines gleichschenkligen Trapezes mit den parallelen Seiten a und c und den nicht-parallelen b die Formeln bezüglich $\frac{ab}{2}$ und $\frac{b(a+c)}{2}$ anwandten. Dass aber diese irrigen Methoden nicht blos in den frühesten Zeiten, sondern bis zu denen der Ptolemäer angewandt wurden, wird durch eine zweite Urkunde bewiesen, durch eine Inschrift an dem von diesen wieder aufgebauten Tempel zu Edfu (Apollinopolis magna). Wann diese Wiederherstellung erfolgte, ist genau bekannt, denn Brugsch theilt mit[2]): „Es ist inschriftlich erwiesen, und zwar nach Jahr und Tag,

1) Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter, übersetzt und erklärt von A. Eisenlohr. Leipzig, Hinrichs. 1877. Vergl. Hankel: Die Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter. Leipzig, Teubner. 1874, p. 84; Cantor: Die römischen Agrimensoren. Leipzig, Teubner. 1875, p. 32. Letzteres Werk soll im Texte kurz mit A. bezeichnet werden. — Siehe Anmerkung 7) der folgenden Abhandlung.

2) Brugsch-Bey: Geschichte Aegyptens unter den Pharaonen. Leipzig, Hinrichs. 1877, p. 258.

dass unter den Ptolemäern zum Wiederaufbau des grossen Sonnentempels zu Edfu, des besterhaltenen im ganzen heutigen Aegypten, auf dem Gebiete der alten Stadt Gross-Apollinopolis, mit geringen Unterbrechungen im Fortgange der Arbeit, die Werkmeister volle 180 Jahre 3 Monate und 14 Tage Zeit gebrauchten, vom Jahre 237 bis zum Jahre 57 vor Christi Geburt.“ In diese Zeit also, und zwar in die Jahre 107—88 v. Chr., A. 34—35, fällt das Anbringen der Inschriften, in denen der Grundbesitz der Priester dieses Tempels genau angegeben wird. Auch hier finden wir dieselben unrichtigen Methoden wie auf dem Papyrus Rhind, selbst der Flächeninhalt eines unregelmässigen Vierecks, in welchem a und c, b und d je gegenüberliegende Seiten sind, wird berechnet nach der Regel

$$F = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2};$$

zugleich aber auch wird hier in höchst eigenthümlicher Weise das Dreieck als ein Viereck betrachtet, dessen eine Seite die Länge Null besitzt, A. 34—35, Hankel 86—87. Gegen das Ende dieses Tempelbaues nun, im zweiten Jahrhundert v. Chr. bis in das erste, jedoch nicht bis zur Mitte des letzteren[3]), lebte Heron von Alexandria, der Verfasser eben so wichtiger als interessanter Schriften, welche herausgegeben zu haben das nicht hoch genug anzuschlagende Verdienst Hultsch's[4]) ist. Derselbe nimmt an, Heron habe seine Schriften „im Auftrage der Regierung“ verfasst, Z. 227—228, da die Ptolemäer die alt-ägyptische Weisheit mit der griechischen Wissenschaft zu verschmelzen und das daraus gebildete System der praktischen Geometrie eben so populär zu machen suchten, als es bisher die Regeln der einheimischen Landesvermesser waren. Auch Cantor, A. 30—31, tritt dieser Ansicht bei, indem er in den Heronischen Werken ein officielles Lehrbuch erblickt, welches die ägyptische Regierung, gesonnen der Anwendung der falschen Regeln, welche mehrere Tausende von Jahren bestanden und sich, wie zumal die Tempel-Inschriften in Edfu beweisen, immer noch erhielten, ein Ende zu machen und dieselben durch richtigere zu ersetzen, abfassen liess. So wenig nun auch Jemand die Möglichkeit, dass sich dieses so verhalten, leugnen wird, so möchte ich es doch noch nicht als gewiss ansehen, da ich für die Ansicht, Heron habe sein Werk „im Auftrage der Regierung“ geschrieben, weder in den genannten noch

---

3) Hultsch: Metrologicorum scriptorum reliquiae. Vol. I, II. Lipsiae, in aedibus Teubneri, 1864—66, I. p. 9; A. 8—9.

4) Hultsch: Heronis Alexandrini geometricorum et stereometricorum reliquiae. Berolini. Apud Weidmannos 1864.

Hultsch: Der Heronische Lehrsatz über die Fläche des Dreiecks als Funktion der drei Seiten. Im 19. Band von Schlömilch's Zeitschr. f. Math. u. Phys. 225—249. Dieser Aufsatz soll im Texte kurz mit Z. bezeichnet werden.

in einer anderen Schrift[5]), bestimmte auf sie hinweisende Gründe und Thatsachen gefunden habe; ich glaube daher einstweilen bei dem Natürlichsten und Nächstliegenden verbleiben zu sollen, bei der Meinung, Heron habe sein Werk aus eigenem Antriebe verfasst. Sei dem aber, wie ihm wolle, jedenfalls geben Cantor's Worte zum Denken Veranlassung. Sie lauten, A. 35—36: „Das (Beibehalten der falschen Regeln) war zu viel der Anhänglichkeit an Hergebrachtes in einem Lande, welches 200 Jahre früher einen Euklid, 100 Jahre früher einen Eratosthenes zum Bürger hatte", und, A. 42: „Gerade das gleichschenklige Trapez und das rechtwinklige halten wir für so echt heronisch, wie irgend einen Theil seiner Schriften. Jenes, die Lieblingsfigur der ägyptischen Feldmesser, durfte er unter keinen Umständen unbesprochen lassen; dieses behandelte er, um zu zeigen, dass es in der That einen Fall gebe, in welchem wenigstens das arithmetische Mittel eines Seitenpaares vervielfacht zwar nicht mit dem Mittel des anderen Seitenpaares, aber mit einer der beiden anderen Seiten wirklich den Flächenraum des Vierecks genau angebe." Diese Worte also geben zum Nachdenken Anlass. Wohl erscheint es auf den ersten Anblick wunderbar, dass noch zwei Jahrhunderte nach Euklid's epochemachenden „Elementen" in Aegypten die unrichtigen Regeln sich behaupten konnten; betrachten wir aber dieses sein wichtigstes Werk genauer, so finden wir zwar viele die Vergleichung der Flächen enthaltende Sätze, Lehren, wie sich Dreiecke von gleicher Grundlinie und verschiedener Höhe, und umgekehrt ferner, wie sich Dreiecke zu Parallelogrammen, wie sich Parallelogramme unter einander verhalten u. s. w., und der Kundige kann sich aus denselben leicht die Regeln für die Berechnung der Flächen ableiten, nicht so aber der Ungeschulte und Ungeübte. Von einem solchen kann es nicht allzu sehr Wunder nehmen, wenn er mit den allgemeinen Theoremen Euklid's im concreten Falle nichts anzufangen weiss, wenn es ihm nicht gelingt, die geometrischen in Rechen-Regeln umzusetzen, und wenn er daher bei den ihm bekannten und verständlichen Verfahrungsweisen beharrt. Wenn ferner Euklid den Gnomon, eine lebhaft an den bei praktischen Arbeiten zur Anwendung kommenden Winkelhaken erinnernde Figur, ausführlich betrachtet, muss es nicht auffallen, dass er das Trapez, diese in der Praxis so häufig sich darbietende Figur, einer Betrachtung gar nicht würdigt, ja dasselbe gar nicht erwähnt? Denn nicht das Viereck mit zwei parallelen Seiten, sondern ganz allgemein jedes von Quadrat, Oblongum, Rhombus und Rhomboid verschiedene Viereck nennt er in seiner 34. Erklärung Trapez. Des eigentlichen Parallel-Trapezes aber gedenkt er nicht, und noch weniger des gleichschenkligen insbesondere, obschon dieses

5) Hultsch: Griechische und römische Metrologie. Berlin, Weidmann'sche Buchhandlung. 1862.

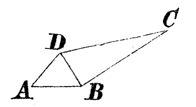
doch, wie Cantor mit Recht bemerkt, die Lieblingsfigur der ägyptischen Feldmesser war, und bei der Flächenvergleichung finden wir weder das eine noch das andere berücksichtigt. Müssen wir nicht ferner die Frage aufwerfen: Wenn, woran wohl nicht zu zweifeln, jene falschen Methoden der Flächenberechnung zu Euklid's Zeiten im Gebrauche waren, warum berichtigte er dieselben nicht? Sollten sie ihm unbekannt geblieben sein? Es wäre nicht zu glauben. Wollte er grundsätzlich alle Logistik von seinem Werke ausschliessen? Er brauchte ja kein Zahlenbeispiel vorzubringen, sondern nur etwa in einem Zusatze das Bestehende als falsch zu bezeichnen und das Richtige anzugeben. Die Befolgung verkehrter Methoden in einem ganzen, grossen Lande, in welchem Einkünfte und Steuern so wesentlich vom Grundbesitze abhingen, war gewiss wichtig genug, in wenigen Zeilen besprochen zu werden. Hielt ihn National- oder Gelehrtenstolz ab? Derselbe würde hier besonders übel angebracht gewesen sein. Zweifelte er, dass seine Belehrung Beachtung finden würde? Glaubte er, den Hass der Priesterkaste befürchten zu müssen, wenn er Neuerungen einführte? Oder welches waren sonst die Gründe, welche ihn abhielten? Das sind Fragen, welche ich nirgends aufgeworfen finde, und welche zu beantworten ich selbst ausser Stande bin.

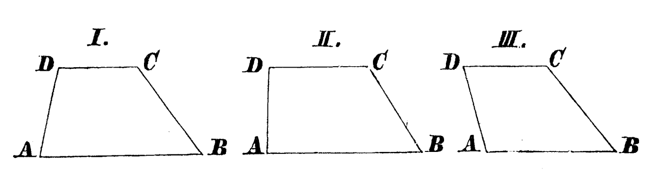
Während also Euklid in seinen Elementen, wie es scheint, geflissentlich Alles vermeidet, was zur Aufklärung der bei den ägyptischen Feldmessern herrschenden Irrthümer führen kann, ist im Gegentheil eine solche zu geben gerade das Ziel, welches sich Heron gesteckt. Allein seine Bemühungen hatten nicht den erwarteten Erfolg, und trotz seines Werkes und trotz der weiten Verbreitung, die dasselbe erlangte, erhielten sich die falschen Methoden noch lange Zeit. Ja, der unrichtigen Formel

$$F = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$$

für die Fläche des Vierecks begegnen wir sogar bei Heron in dessen „liber geeponicus“, 212, 15—20, und haben die Wahl, ob wir mit Cantor, A. 43, 192 Note 87, 190 Note 69, diese als in früher Zeit eingeschmuggelt und den liber geeponicus für eine der meist entstellten Sammlungen in Heron's Schriften halten, oder ob wir, in Hinsicht darauf, dass Hultsch, Heron. Praef. XVII, den liber geeponicus als einen „liber, qui non ultimum auctoritatis locum inter Heronianas reliquias obtineat“ bezeichnet, einen Irrthum Heron's annehmen wollen. Welche dieser beiden Meinungen das Wahre trifft, bin ich nicht im Stande zu entscheiden. Offenbar liegt dagegen ein Irrthum vor, wenn Cantor A. 191 Note 84 behauptet, bei Heron bedeute „παραλληλόγραμμον“ ohne Zusatz das Rechteck, da dieser doch in seiner Geometrie 84—91 das Rechteck stets als „παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον“ bezeichnet und letzteres Epitheton nur dann weglässt, wenn er dasselbe („παραλληλόγραμμον τὸ αὐτό“) Parallelogramm, welches er

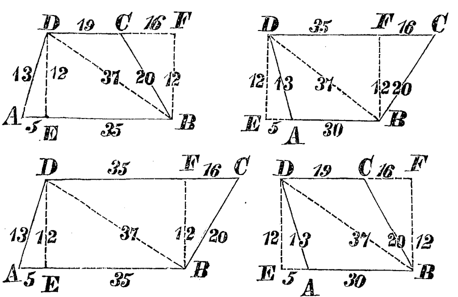
bereits ein für alle Mal als „ὀρθογώνιον“ charakterisirt hat, noch einmal betrachtet. Zu weiteren Betrachtungen aber führt die Behandlung des Trapezes bei Heron. Abweichend von Euklid versteht er unter „Trapez“ dasselbe wie wir jetzt gewöhnlich, nämlich ein Viereck mit zwei parallelen und zwei nicht-parallelen Seiten, und unterscheidet in seiner Geometrie das rechtwinklige, 98—103, das gleichschenklige, 103—108, das spitzwinklige, 108—109, das stumpfwinklige, 109. Für jedes der beiden letzteren giebt er nur ein Beispiel, und zwar für das spitzwinklige die folgenden Längenzahlen: die Basis (eine parallele Seite) habe die Länge 6, die kleinere (nicht-parallele) Seitenlinie die Länge 5, die grössere Seitenlinie die Länge 12, die Scheitellinie (andere parallele Seite) die Länge 13, die Diagonale, welche von der Ecke ausgeht, welche die Seiten 5 und 13 bilden, ebenfalls die Länge 5. Mit Recht hat Cantor, A. 191 Note 85 darauf aufmerksam gemacht, dass bei den hier angegebenen Maassen: $AB = 6$, $BC = 12$, $CD = 13$, $AD = BD = 5$, die Basis und Scheitellinie nicht parallel sein können, und nimmt daher, soweit sich nach einem einzigen Beispiele urtheilen lässt, an, das spitzwinklige Trapez bezeichne bei Heron ein Viereck, in welchem eine Diagonale einer Seite gleich sei, vergl. A. 42. Und in der That, hält man sich streng an das vorliegende Beispiel, so bleibt kaum eine andere Annahme übrig; und doch will dieselbe keine rechte Befriedigung gewähren. Denn nach der Definition von „Trapez“, 21, 10, wäre nicht einzusehen, wie eine solche Figur unter die Trapeze gerechnet werden könnte, andrerseits lässt auch die bestimmte Eintheilung in spitz-, recht- und stumpfwinklige Trapeze annehmen, Heron habe wohl bemerkt, dass, wie an einem Dreieck, so auch an einem Trapez drei verschiedene Formen möglich sind, nämlich das von ihm als spitzwinklig bezeichnete Trapez I., in welchem an der einen parallelen Seite zwei spitze, an der anderen zwei stumpfe Winkel liegen, mit dem Specialfall des gleichschenkligen Trapezes, dann II. das rechtwinklige, in welchem an der einen parallelen Seite ein rechter und ein spitzer, an der anderen ein rechter und ein stumpfer Winkel liegt, und das von ihm als stumpfwinklig bezeichnete, III., in welchem an jeder der parallelen Seiten ein spitzer und ein stumpfer Winkel sich befindet. In Bezug auf das recht- und stumpfwinklige Trapez nun lassen Heron's Angaben keinen Zweifel übrig, bei dem spitzwinkligen aber mag ein Versehen mit untergelaufen sein. Der Umstand, dass in jenem erstgenannten für ein spitzwinkliges Trapez ausgegebenen Viereck das Dreieck DBC ein





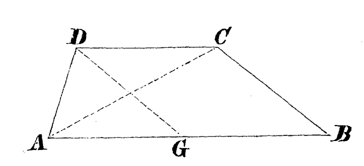
bei B rechtwinkliges ist, denn die Seitenlängen $BD = 5$, $BC = 12$, $CD = 13$ bedingen ein solches, lassen mich vermuthen, Heron habe beabsichtigt, aus zwei sog. rationalen oder Pythagorischen rechtwinkligen Dreiecken ein spitzwinkliges Trapez zusammenzusetzen, in welchem der leichteren Rechnung wegen eine Diagonale und eine Seite gleich sei. Hat man nämlich z. B. die beiden rationalen rechtwinkligen Dreiecke, das eine mit den Seiten 9, 12, 15, das andere mit den Seiten 5, 12, 13, so lässt sich aus dem ersteren, indem man es um die Seite 12 dreht, das gleichschenklige Dreieck ADB mit der Grundlinie $AB = 18$, den Schenkeln $AD = BD = 15$, und der Höhe 12 bilden; nimmt man aber von dem ersten das zweite rechtwinklige Dreieck mit den Seiten 5, 12, 13 hinweg, so erhält man ein stumpfwinkliges Dreieck DCB mit der kleineren Seite $DC = 9 - 5 = 4$ und der zugehörigen Höhe 12, der anderen Seite $BC = 13$, und der dem stumpfen Winkel C gegenüberliegenden Seite $BD = 15$. Diese beiden Dreiecke nun, das gleichschenklige ADB und das stumpfwinklige DCB geben, mit der gleichen Seite BD an einander gelegt, ein spitzwinkliges Trapez $ABCD$, in welchem $AB = 18$, $BC = 13$, $CD = 4$, $AD = BD = 15$ ist. In gleicher Weise lässt sich aus den rationalen rechtwinkligen Dreiecken 48, 20, 52 und 21, 20, 29, aus den rationalen rechtwinkligen Dreiecken 16, 12, 20 und 5, 12, 13, aus den rationalen rechtwinkligen Dreiecken 15, 8, 17 und 6, 8, 10 je ein spitzwinkliges Trapez, mit den Seiten bezüglich $AB = 96$, $BC = 29$, $CD = 27$, $AD = BD = 52$; $AB = 32$, $BC = 13$, $CD = 11$, $AD = BD = 20$; $AB = 30$, $BC = 10$, $CD = 9$, $AD = BD = 17$ zusammensetzen u. s. w., in welchen allen sich die Höhe rational durch die Seiten ausdrücken lässt. Diesen Weg mochte auch Heron haben einschlagen wollen, und sich dabei in irgend einer Weise geirrt haben. Auffällig ist es, dass man, obschon man so häufig rationale rechtwinklige Dreiecke anwandte und aus je zwei solchen ein rationales nicht-rechtwinkliges Dreieck zusammensetzte, wie das bekannte mit den Seiten 13, 14, 15, meines Wissens nicht bemerkt hat, dass sich aus je drei rechtwinkligen rationalen Dreiecken, welche eine Kathete gleich haben, je vier rationale Trapeze, zwei spitzwinklige und zwei stumpfwinklige zusammensetzen lassen, in welchen allen die grösste Hypotenuse eine Diagonale ist. Denn hat man z. B. die drei rechtwinkligen rationalen Dreiecke 35, 12, 37; 5, 12, 13; 16, 12, 20, so lassen sich das erste und zweite zu zwei rationalen Dreiecken, einem spitzwinkligen mit den Seiten $35 + 5 = 40$, 37, 13, und einem stumpfwinkligen mit den Seiten $35 - 5 = 30$, 37, 13, beide mit der Höhe 12, das erste und dritte ebenso zu zwei rationalen Dreiecken, einem spitzwinkligen mit den Seiten $35 + 16 = 51$, 37, 20, und einem stumpfwinkligen mit den Seiten $35 - 16 = 19$, 37, 20, beide mit der Höhe 12 zusammensetzen. Legt man nun das zuerst gebildete spitzwinklige und das zu zweit gebildete

stumpfwinklige, oder das zuerst gebildete stumpfwinklige und das zuletzt gebildete spitzwinklige Dreieck mit den Seiten 37 an einander, so erhält man ein spitzwinkliges Trapez; legt man aber das zuerst gebildete spitzwinklige oder stumpfwinklige und bezüglich das zuletzt gebildete spitzwinklige oder stumpfwinklige Dreieck mit den gleichen Seiten 37 an einander, so erhält man ein stumpfwinkliges Trapez, und jedes der so erhaltenen vier Trapeze ist rational, d. h. seine Höhe lässt sich rational durch die Seiten ausdrücken. Auf gleiche Weise erhält man aus den drei rationalen rechtwinkligen Dreiecken 63, 60, 87; 11, 60, 61; 32, 60, 68 die spitzwinkligen Trapeze mit den Seiten $AB = 63 + 11 = 74$, $BC = 68$, $CD = 63 - 32 = 31$, $AD = 61$, $BD = 87$; $AB = 63 - 11 = 52$, $BC = 68$, $CD = 63 + 32 = 95$, $AD = 61$, $BD = 87$, und die stumpfwinkligen $AB = 63 + 11 = 74$, $BC = 68$, $CD = 63 + 32 = 95$, $AD = 61$, $BD = 87$; $AB = 63 - 11 = 52$, $BC = 68$, $CD = 63 - 32 = 31$, $AD = 61$, $BD = 87$; aus den rechtwinkligen Dreiecken 36, 15, 39; 8, 15, 17; 20, 15, 25 ergeben sich die spitzwinkligen Trapeze $AB = 36 + 8 = 44$, $BC = 25$, $CD = 36 - 20 = 16$, $AD = 17$, $BD = 39$; $AB = 36 - 8 = 28$, $BC = 25$, $CD = 36 + 20 = 56$, $AD = 17$, $BD = 39$, die stumpfwinkligen $AB = 36 + 8 = 44$, $BC = 25$, $CD = 36 + 20 = 56$, $AD = 17$, $BD = 39$; $AB = 36 - 8 = 28$, $BC = 25$, $CD = 36 - 20 = 16$, $AD = 17$, $BD = 39$; aus den rechtwinkligen Dreiecken 45, 24, 51; 10, 24, 26; 18, 24, 30 folgen die spitzwinkligen Trapeze $AB = 45 + 10 = 55$, $BC = 30$, $CD = 45 - 18 = 27$, $AD = 26$, $BD = 51$; $AB = 45 - 10 = 35$, $BC = 30$, $CD = 45 + 18 = 63$, $AD = 26$, $BD = 51$, die stumpfwinkligen $AB = 45 + 10 = 55$, $BC = 30$, $CD = 45 + 18 = 63$, $AD = 26$, $BD = 51$; $AB = 45 - 10 = 35$, $BC = 30$, $CD = 45 - 18 = 27$, $AD = 26$, $BD = 51$; u. s. w. In allen diesen Fällen lässt sich die Höhe des Trapezes rational aus den Seiten berechnen (sie beträgt in den drei letzten Beispielen bezüglich 60, 15, 24), und ein Gleiches gilt offenbar auch von der Fläche. Wenn es also auffällig erscheint, dass man auf diese Art, Trapeze mit Hilfe rechtwinkliger Dreiecke zusammenzusetzen, nicht verfiel, so ist es noch mehr zu verwundern, dass Heron, der doch die Fläche des Dreiecks aus den Seiten zu finden verstand, nicht erkannte, dass sich auch die des Trapezes durch die Seiten ausdrücken lässt, ebenso, wie dies bekanntlich beim sog. Kreisviereck der Fall ist. Dies führt auf die Betrachtungen



Brahmegupta's. Bevor ich jedoch zu diesen übergehe, will ich des Folgenden wegen erst Einiges einschalten.

Es sei in einem Viereck $ABCD$ der Winkel CAB, welchen die Diagonale AC mit AB bildet, gleich dem Winkel ACD, welchen dieselbe Diagonale AC mit der gegenüberliegenden Seite CD bildet. Dann sind AB und CD parallel, und das Viereck ist ein Trapez. Die Seiten AB, BC, CD, AD sollen bezüglich a, b, c, d heissen. Zieht man nun von D eine Parallele DG zu CB, so zerfällt das Trapez in ein Dreieck AGD und ein Parallelogramm $GBCD$. Die Fläche des letzteren ist doppelt so gross als die des Dreiecks GBC (wenn man sich GC gezogen denkt). Heisst nun die des Trapezes F, die des Dreiecks AGD f, die des Dreiecks GBC f', so ist also $F = f + 2f'$. Aber es verhält sich $f' : f = GB : AG$ oder $f' : f = c : a - c$, also



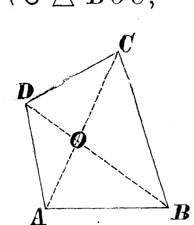
ist $f' = \frac{c}{a-c} \cdot f$ und $F = \frac{a+c}{a-c} \cdot f$. Wendet man nun auf das Dreieck AGD mit den Seiten $a - c$, b, d den Satz Heron's, die Fläche des Dreiecks aus den drei Seiten zu berechnen, an, so erhält man als Fläche des Trapezes mit den Seiten a, b, c, d

$$F = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{a+c}{a-c} \cdot \sqrt{[(a-c)+b+d][-(a-c)+b+d][(a-c)-b+d][(a-c)+b-d]}, \quad 1a)$$

oder

$$F = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{a+c}{a-c} \cdot \sqrt{(a+b-c+d)(-a+b+c+d)(a-b-c+d)(a+b-c-d)} \cdot \quad 1b)$$

Es sei ferner in einem Viereck $ABCD$ mit den Seiten $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$ und den Diagonalen $AC = e$, $BD = f$ der Winkel BAC, welchen die eine Diagonale e mit AB bildet, gleich dem Winkel CDB, welchen die andere Diagonale f mit der gegenüberliegenden Seite CD bildet. Hieraus folgt, dass auch $\angle DBA = \angle ACD$, also $\triangle AOB \sim \triangle DOC$ ist, und dass sich verhält $AO : DO = BO : CO$. Aus dieser Proportion und der Gleichheit der Winkel AOD und BOC folgt $\triangle AOD \sim \triangle BOC$, und somit $\angle CAD = \angle DBC$, $\angle ADB = \angle BCA$. Die Flächen der beiden Dreiecke ABC, ADC verhalten sich nun wie die von B und D auf AC gefällten Perpendikel, und diese wieder wie $BO : DO$; also verhält sich Fläche ABC : Fläche $ADC = BO : DO$. Nun ist $\triangle AOB \sim \triangle DOC$, also $AO : DO = a : c$, und $\triangle BOC \sim \triangle AOD$, also $BO : AO = b : d$, mithin $BO : DO = ab : cd$. Also verhält sich die Fläche ABC : Fläche $ADC = ab : cd$, oder, wenn man beide nach dem Heronischen Lehrsatze durch die Seiten ausdrückt,



$$\frac{\frac{1}{4}\sqrt{(e+a+b)(-e+a+b)(e-a+b)(e+a-b)}}{\frac{1}{4}\sqrt{(e+c+d)(-e+c+d)(e-c+d)(e+c-d)}} = ab : ad;$$

folglich

$$[(a+b)^2-e^2][e^2-(a-b)^2] : [(c+d)^2-e^2][e^2-(c-d)^2] = a^2b^2 : c^2d^2 .$$

Multiplicirt man aus, und schreibt

$(a^2+b^2)^2-4a^2b^2$ für $(a^2-b^2)^2$, und $(c^2+d^2)^2-4c^2d^2$ für $(c^2-d^2)^2$,

so erhält man:

$$4a^2b^2-[e^2-(a^2+b^2)]^2 : 4c^2d^2-[e^2-(c^2+d^2)]^2 = a^2b^2 : c^2d^2 ,$$

also $$[e^2-(a^2+b^2)]^2 c^2d^2 = [e^2-(c^2+d^2)]^2 a^2b^2 .$$

Nun ist $\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD = \angle DCA + \angle DAC = 180^0 - \angle ADC$. Ist also $\angle ABC$ spitz, so ist $\angle ADC$ stumpf, und umgekehrt. Ist $\angle ABC$ spitz, so ist (Euklid II. 12, 13) $e^2 < a^2+b^2$, also dann zugleich $e^2 > c^2+d^2$; ist $\angle ABC$ stumpf, so ist $e^2 > a^2+b^2$, also dann zugleich $e^2 < c^2+d^2$. Es folgt also dass, wenn man aus der letzten Gleichung die Diagonale e berechnen will, das Wurzelzeichen auf einer Seite negativ werden muss. Man erhält demnach

$$[(a^2+b^2)-e^2]cd = [e^2-(c^2+d^2)]ab ,$$

woraus folgt $$e = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}} .$$

Setzt man diesen Werth in die Heronischen Ausdrücke für $\triangle ABC$ und $\triangle ADC$ ein, und addirt die erhaltenen Werthe, so ergiebt sich nach einigen Umformungen als Fläche des Vierecks $ABCD$

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}. \qquad 2)$$

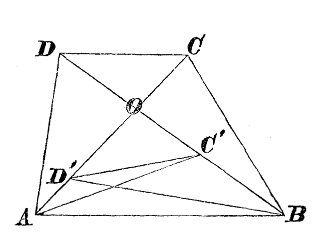
Zugleich bemerkt man, dass wegen der Gleichheit der oben genannten Winkel $\angle BAC = \angle CDB$, $\angle DBA = \angle ACD$, $\angle CAD = \angle DBC$, $\angle ADB = \angle BCA$ sich um ein solches Viereck ein Kreis beschreiben lassen muss. Man erhält also den Satz:

Die Fläche eines Vierecks $ABCD$ lässt sich durch die vier Seiten ausdrücken:

1) wenn die zwei Winkel BAC, DCA, welche **dieselbe** Diagonale mit den beiden Gegenseiten AB, CD bildet, einander gleich sind. Ein solches Viereck ist ein Trapez;
2) wenn die zwei Winkel BAC, CDB, welche die **verschiedenen** Diagonalen mit den beiden Gegenseiten AB, CD bilden, einander gleich sind. Um ein solches Viereck lässt sich ein Kreis beschreiben.

Die Aehnlichkeit der Formeln 1b) und 2) ist offenbar, und in der That stehen auch die beiden soeben unter 1) und 2) genannten Vierecke

in einer gewissen Beziehung zu einander. Denn klappt man in einem Trapeze $ABCD$ das Dreieck DOC um O um, so dass OD nach OD', OC nach OC' fällt, so ist $\angle OAB = \angle OC'D'$, $\angle OBA = \angle OD'C'$, also $OA : OC' = OB : OD'$, mithin $\triangle OAC' \sim \angle OBD'$, also $\angle OAC' = \angle OBD'$ oder $\angle D'AC' = \angle C'BD'$; das Viereck $ABC'D'$ ist also eins der 2. Art, d. h. ein solches, in welchem zwei Winkel $D'AC'$, $C'BD'$, welche die verschiedenen Diagonalen AC', BD' mit den beiden Gegenseiten AD', BC' bilden, einander gleich sind. Bemerkt mag noch werden: Sollen in einem Viereck $ABCD$ die Diagonalen AC, BD in O auf einander senkrecht stehen, so muss sein $AO^2 + BO^2 = a^2$, $BO^2 + CO^2 = b^2$, $CO^2 + DO^2 = c^2$, $AO^2 + DO^2 = d^2$. Aus den beiden ersten dieser Gleichungen folgt $AO^2 - CO^2 = a^2 - b^2$, aus den beiden letzten $AO^2 - CO^2 = d^2 - c^2$. Also muss sein $a^2 - b^2 = d^2 - c^2$, oder



$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2. \qquad 3)$$

Gehen wir nunmehr zur Geometrie des Brahmegupta über.

In dieser zu Anfang des 7. Jahrhunderts n. Chr. verfassten Geometrie*) nämlich begegnen wir sehr bemerkenswerther Weise einmal dem oben erwähnten ägyptischen Princip, das Dreieck als ein Viereck aufzufassen, dessen eine Seite die Länge Null besitzt, sodann der Heronischen Regel für die Berechnung der Dreiecksfläche aus den drei Seiten, ferner den unrichtigen ägyptischen Formeln für die Fläche eines Dreiecks und Vierecks, und endlich der obigen Formel 2) für die Fläche des Vierecks, aber ohne Beweis, und nur auf eine gewisse Classe von Vierecken bezogen. Der erste Artikel, Art. 21, der Geometrie des Brahmegupta nämlich lautet, 295—296: „Das Produkt der halben (Summe der) Seiten mit (der halben Summe) der Gegenseiten giebt die ungenaue Fläche eines Dreiecks und Vierecks. Die halbe Summe der Seiten viermal hingeschrieben und jemalig um die Seiten verkleinert, (die vier Zahlen) mit einander multiplicirt, (und) aus dem Product die Quadratwurzel gezogen, giebt den genauen Flächeninhalt.“**) Wir sehen also, die falschen ägyptischen Regeln werden hier ausdrücklich als rohe und ungenaue Näherungsmethoden bezeichnet. Wenn ferner oben gesagt ward, Brahmegupta habe seine als genau bezeichnete, der obigen Formel 2) entsprechende Regel nur auf gewisse

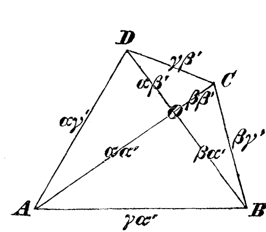
*) Algebra with arithmetic and mensuration from the sanscrit from Brahmegupta and Bháscara. Translated by Colebrooke. London 1817.

**) „The product of half the sides and countersides is the gross area of a triangle and tetragon. Half the sum of the sides set down four times and severally lessened by the sides, being multiplied together, the squareroot of the product is the exact area.“

Classen von Vierecken beschränkt, so spricht er dies zwar nicht ausdrücklich aus, es geht dies aber aus dem Folgenden hervor, denn es werden in den folgenden Artikeln bis Art. 38 nur das Quadrat, das Rechteck, das gleichschenklige Trapez, in welchem auch die kleinere parallele Seite gleich den beiden nicht-parallelen ist, und eine fünfte Art von Vierecken, von welcher weiter unten die Rede sein wird, betrachtet, und die an ihnen vorkommenden Stücke durch die Seiten ausgedrückt. Es entsteht nun die Frage, wie Brahmegupta seine Regel für die Berechnung der Vierecksfläche gefunden habe, eine Frage, welche zuerst von Chasles*), dann wieder von Hultsch, Z. 238—241, und von Hankel, l. c. 212—215 behandelt ward. Indem ich auf die Ansicht von Chasles nicht näher eingehen zu müssen glaube, wende ich mich zunächst zu der von Hultsch. Dieser meint mit Martin, Brahmegupta könne nicht der Erfinder dieses Satzes sein, denn er „lässt eine Hauptsache weg, die jeder Kundige, vor allem aber der Erfinder des Satzes, wahrhaftig nicht übersehen konnte, dass das Viereck ein in den Kreis eingeschriebenes sein müsse". Hultsch meint daher, die Quelle dieser Regel sei bei den Griechen zu suchen, vielleicht bei Heron, denn es sei leicht möglich, dass die Formel für das Viereck von diesem erfunden, aber wieder verloren gegangen sei, wie wir ja auch die für das Dreieck nur durch einen Zufall kennten, da sie sich ausser der den Beweis enthaltenden Stelle, Heron 235—237, Z. 233—236, nur noch einmal ohne Beweis, aber mit der Angabe, wie zu verfahren sei, in der Geodäsie finde (sie kommt jedoch ausser in der Geodäsie, 151, noch sechs Mal in Heron's Geometrie, 71, 72, 109—112 vor). Was nun den ersten Grund für diese Annahme betrifft, das Viereck müsse ein in den Kreis eingeschriebenes sein, so ist es allerdings die gewöhnliche Redeweise, zu sagen, für jedes Viereck, welches sich einem Kreise einschreiben lasse, gelte obige Regel 2); man würde aber irren, wenn man glauben wollte, die Möglichkeit, um das Viereck einen Kreis construiren, und die Möglichkeit, seine Fläche durch die Seiten ausdrücken zu können, verhielten sich wie Grund und Folge. Beide Möglichkeiten nämlich sind coordinirte Folgerungen aus der Bedingung, dass zwei Winkel, welche die verschiedenen Diagonalen mit den beiden Gegenseiten bilden, einander gleich sind. Aus dieser allein fliesst die Regel 2), bei deren Ableitung, wie sie oben gegeben ist, auch nicht eine einzige Eigenschaft des Kreises zu Hilfe genommen worden ist; aus ihr fliesst aber ebenso als zweite Folge, dass sich um ein solches Viereck ein Kreis beschreiben lassen muss. Es wäre daher wohl möglich, dass nur die eine dieser Consequenzen bemerkt worden wäre, jedenfalls ist die letztere nicht die conditio sine qua non für die Auffindung des Satzes 2). Ebenso

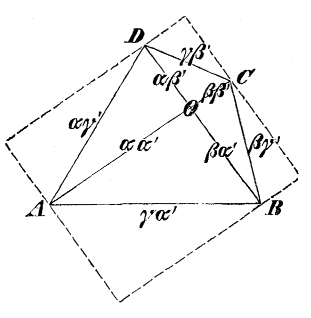
*) Chasles: Geschichte der Geometrie. Uebersetzt von Sohncke. Halle 1839; 465—480; 485—495.

ist es gewiss im Allgemeinen richtig, dass der Erfinder vor Allem die Bedingungen für die Giltigkeit eines von ihm aufgestellten Theoremes bemerken muss, wenn man nämlich unter dem Erfinder denjenigen versteht, der durch Schlüsse und Folgerungen einen neuen Lehrsatz aus bekannten ableitet. Es giebt jedoch noch einen zweiten Weg, wie ein solcher entdeckt werden kann, ohne dass derjenige, welcher ihn aufstellt, sich nothwendig aller erforderlichen Voraussetzungen vollkommen bewusst sein müsste. Bevor ich jedoch hierauf eingehe, wende ich mich zunächst zur Besprechung der Ansicht Hankel's. Dieser weist mit Recht auf den Artikel 38 bei Brahmegupta hin, in welchem derselbe die Construction der oben noch nicht näher bezeichneten fünften Classe von Vierecken angiebt. Dieselbe geschieht folgendermassen: Es seien zwei rechtwinklige Dreiecke gegeben, das eine mit den Katheten α, β, und der Hypotenuse γ, das andere mit den Katheten α', β', und der Hypotenuse γ'. Nun werden die Längenzahlen der Seiten des ersteren zuerst mit der Längenzahl der Kathete α' des anderen multiplicirt und aus den so erhaltenen Längen ein rechtwinkliges Dreieck gebildet, hierauf werden α, β, γ ebenso mit β' multiplicirt, und gleichfalls ein neues rechtwinkliges Dreieck gebildet. Durch Multiplication der Seiten des anderen gegebenen rechtwinkligen Dreiecks α', β', γ' bezüglich mit α und β ergeben sich sodann noch zwei neue Dreiecke. Diese vier Dreiecke, von denen je zwei eine Seite gleich haben, werden zu einem Viereck $ABCD$ zusammengesetzt, dessen Diagonalen in O senkrecht auf einander stehen. Die auf diese Weise entstehenden unregelmässsigen Vierecke bilden die erwähnte fünfte Classe Brahmegupta's, und werden von ihm, abweichend sowohl von Euklid als von Heron, „Trapeze“ genannt. Nach Hankel hätte Brahmegupta die übrigen vier Classen von Vierecken mit dem Namen *Tetragone* bezeichnet, und sie dem von ihm *Trapeze* genannten entgegengestellt, so dass er „die für *Tetragone* ausgesprochenen Sätze nur auf jene, die für *Trapeze* nur auf diese bezogen wissen wollte“ (Hankel l. c. 213—214).



Allein dem ist augenscheinlich nicht so. Denn sonst würde ja gerade der hier in Rede stehende Satz, dessen Wortlaut oben angeführt ist, da in demselben nur das *Tetragon* erwähnt wird, gar nicht für das *Trapez* gelten. Ferner beginnt Art. 23 mit den Worten: „In any tetragon but a trapezium“, und Art. 26: „The diagonal of a tetragon other than a trapezium“, und Brahmegupta würde sicherlich nicht für nöthig gehalten haben, in diesen das Trapez erst besonders auszuschliessen, wenn er es nicht als der Regel nach unter die *Tetragone* mit eingeschlossen betrachtet hätte. Offenbar bezeichnet vielmehr *Tetragon* oder das in der Ueberschrift gebrauchte *Quadrilateral* den allgemeinen Begriff, und *Trapez* nur eine

specielle Art. Wenn nun in Bezug darauf, dass Brahmegupta die Construction der von ihm behandelten Drei- und Vierecke erst am Ende des betreffenden Abschnittes giebt, wie es indische Sitte gewesen sein mag, wenn also Hankel in Bezug hierauf sich so ausspricht, 215: „Verböte es nicht der enge Raum an diesem Orte, so würde ich zeigen, wie natürlich sich alle diese Sätze entwickeln, wenn man sie in umgekehrter Reihenfolge auf einander folgen lässt", so muss es doch zu unnatürlich erscheinen, die Sätze in gerade umgekehrter Ordnung aufzustellen. Desgleichen will es nicht wahrscheinlich erscheinen, Brahmegupta habe erst die Formeln für das Produkt und den Quotienten der Diagonalen, hieraus die Diagonalen selbst, deren Werthe in Art. 28 angegeben sind, und aus ihnen seine Flächenformel entwickelt. Denn einmal hätte dann Brahmegupta seinen an die Spitze gestellten Satz auf einen andern, weder am Anfange noch Ende, sondern in der Mitte stehenden gegründet, und sodann lag es gewiss viel näher, die Fläche F durch die kurze Regel $F = \frac{1}{2}(ac + bd)$ auszudrücken, als durch jene immerhin complicirte Formel. Denn zeichnet man, was auch der Scholiast Chaturveda, p. 301, thut, um Brahmegupta's Trapez ein Rechteck, dessen Seiten also gleich den Diagonalen AC oder e, BD oder f sind, so hat man offenbar $F = \frac{1}{2} ef = \frac{1}{2}(\alpha\alpha' + \beta\beta')(\alpha\beta' + \beta\alpha') = \frac{1}{2}(\alpha^2\alpha'\beta' + \alpha\beta\beta'^2 + \alpha\beta\alpha'^2 + \beta^2\alpha'\beta') = \frac{1}{2}[(\alpha^2 + \beta^2)\alpha'\beta' + (\alpha'^2 + \beta'^2)\alpha\beta]$. Nun ist $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$, $\alpha'^2 + \beta'^2 = \gamma'^2$, also $F = \frac{1}{2}[\gamma^2\alpha'\beta' + \gamma'^2\alpha\beta] = \frac{1}{2}(\gamma\alpha' \cdot \gamma\beta' + \alpha\gamma' \cdot \beta\gamma')$, d. h. $F = \frac{1}{2}(AB \cdot CD + AD \cdot BD)$ oder $F = \frac{1}{2}(ac + bd)$. Es scheint daher nicht wahrscheinlich, dass Brahmegupta auf diesem Wege zu seiner viel weiter entfernt liegenden Regel gekommen sein sollte, vielmehr muss er dieselbe, da er sie an die Spitze der ganzen Untersuchung stellt, auf ganz einfache Weise und ohne Zuhilfenahme der späteren Sätze gefunden haben. Alle angeführten Schwierigkeiten aber schwinden, und Alles erklärt sich auf die natürlichste und ungezwungenste Weise, wenn man annimmt, Brahmegupta habe aus der Heronischen Regel für die Fläche des Dreiecks



$$F = \frac{1}{4}\sqrt{(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)} \qquad 4)$$

seine Regel durch Induction gefunden. Dass er aber dieselbe auf diesem Wege durch Rechnung ohne andere geometrische Hilfsmittel als den Pythagorischen Satz und die Dreiecksformel entdecken konnte, liegt auf der Hand. Denn letztere war ihm jedenfalls bekannt, mochte er sie selbst gefunden oder von den Griechen überkommen haben. Indem er nun, worauf das Zusammenfassen beider Regeln hinweist, das Dreieck als ein Viereck

mit einer Seite $= 0$ ansah, eine Anschauung, die sicherlich nicht griechischen, sondern eher ägyptischen Ursprungs ist, musste ihm auch diese Formel 4) nur als ein specieller Fall der allgemeinen Formel für das Dreieck erscheinen; letztere aber musste so beschaffen sein, dass sie, wenn man eine Seite, etwa $d = 0$ setzte, sich zur Formel 4) vereinfachte. Diese allgemeine, für das Viereck geltende Regel nun mag Brahmegupta auf folgende Weise durch Induction gefunden, wenn man will, errathen haben: Da bei der Dreiecksformel vier Factoren, darunter die Summe aller Seiten, unter dem Wurzelzeichen stehen, lag es am nächsten, bei der fraglichen Vierecksformel fünf Factoren, einen mit lauter positiven Gliedern, oder der Summe aller vier Seiten, und vier Factoren mit je drei positiven und einem negativen Gliede anzunehmen. Wurde aber alsdann $d = 0$ gesetzt, so erhielt man aus $(a + b + c + d)$ und $(a + b + c - d)$ das Quadrat von $(a + b + c)$, und also nicht die Form 4). Wurden aber nur vier Factoren, jeder mit drei positiven und einem negativen Gliede, wie in 2) angenommen, so ergab sich für $d = 0$ sofort die Formel 4). Es galt nun bloss noch, die so gefundene Regel 2) zu verificiren. Beim Quadrat und Rechteck zeigte sich ihre Richtigkeit sofort. Beim gleichschenkligen Trapez (*Trapez* hier nicht im Sinne Brahmegupta's verstanden) mit der einen parallelen Seite, der Basis, a, der anderen, der Scheitellinie, c, und den beiden nicht-parallelen Seiten b, ergab die Formel 2) als Fläche

$$F = \tfrac{1}{4}(a + c)\sqrt{4b^2 - (a - c)^2}\ .$$

Wurde nun, um dieselbe auf ihre Richtigkeit zu prüfen, das Trapez durch zwei, von den Ecken der Scheitellinie auf die Basis gefällte Senkrechte in zwei flächengleiche rechtwinklige Dreiecke und ein Rechteck zerlegt, die Senkrechte einstweilen mit h, die auf der Basis liegende Kathete mit g bezeichnet, so ergab sich

$$F = c \cdot h + 2 \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{(h + b + g)(-h + b + g)(h - b + g)(h + b - g)}$$

oder $$F = c \cdot h + 2 \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{[(b + g)^2 - h^2][h^2 - (b - g)^2]}\ .$$

Nun ist aber nach dem Pythagorischen Satze $h = \dfrac{\sqrt{4b^2 - (a - c)^2}}{2}$, $g = \dfrac{a - c}{2}$; werden diese Werthe eingesetzt, so ergiebt sich für die Fläche derselbe Ausdruck wieder, der oben als aus 2) folgend bezeichnet worden war. Es gilt demnach letztere Regel auch für das gleichschenklige Trapez, und mithin auch für das Trapez mit drei gleichen Seiten. Sollte endlich die Formel 2) für die von Brahmegupta mit dem Namen „*Trapez*" belegten Vierecke geprüft werden, so konnte dies leicht so geschehen: Dieselbe lässt sich schreiben

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{[(c + d)^2 - (a - b)^2][(a + b)^2 - (c - d)^2]}\ .$$

Nun ist $AB = a = \gamma\alpha'$, $BC = b = \beta\gamma'$, $CD = c = \gamma\beta'$, $AD = d = \alpha\gamma'$ zu setzen, und man hat demnach

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{[(\gamma\beta' + \alpha\gamma')^2 - (\gamma\alpha' - \beta\gamma')^2]\,[(\gamma\alpha' + \beta\gamma')^2 - (\gamma\beta' - \alpha\gamma')^2]}.$$

Werden die Quadrirungen ausgeführt, so erhält man in jedem der beiden Factoren unter dem Wurzelzeichen drei Glieder, eines mit dem Factor γ^2, eines mit dem Factor γ'^2, und eins mit dem Factor $2\gamma\gamma'$. Da nun nach der Voraussetzung γ und γ' die Hypotenusen rechtwinkliger Dreiecke sind, also $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$, $\gamma'^2 = \alpha'^2 + \beta'^2$ ist, so erhält man, wenn man diese Werthe einsetzt,

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{\{2\gamma\gamma'(\alpha\beta' + \beta\alpha') - [(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha'^2 - \beta'^2) - (\alpha^2 - \beta^2)(\alpha'^2 + \beta'^2)]\}}$$
$$\sqrt{\{2\gamma\gamma'(\alpha\beta' + \beta\alpha') + [\alpha^2 + \beta^2)(\alpha'^2 - \beta'^2) - (\alpha^2 - \beta^2)(\alpha'^2 + \beta'^2)]\}}\ .$$

Es ist aber $(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha'^2 - \beta'^2) - (\alpha^2 - \beta^2)(\alpha'^2 + \beta'^2) = 2(\alpha^2\beta'^2 - \beta^2\alpha'^2)$, mithin

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{2\gamma\gamma'(\alpha\beta' + \beta\alpha') - 2(\alpha^2\beta'^2 - \beta^2\alpha'^2)]\,[2\gamma\gamma'(\alpha\beta' + \beta\alpha') + (\alpha^2\beta'^2 - \beta^2\alpha'^2)]}$$

oder $$F = \tfrac{1}{2}(\alpha\beta' + \beta\alpha')\sqrt{\gamma^2\gamma'^2 - (\alpha\beta' - \beta\alpha')^2}\ .$$

Setzt man wieder $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$, $\gamma'^2 = \alpha'^2 + \beta'^2$, so ergiebt sich nach geschehener Vereinfachung:

$$F = \tfrac{1}{2}(\alpha\alpha' + \beta\beta')(\alpha\beta' + \beta\alpha'),$$

oder, der Figur zufolge, $F = \tfrac{1}{2}(AO + CO)(DO + BO)$,

oder $F = \tfrac{1}{2}\cdot AC\cdot BD$,

oder $F = \tfrac{1}{2}\cdot e\cdot f$,

also der Satz, dass die Fläche dieses von Brahmegupta als *Trapez* bezeichneten Vierecks halb so gross ist als die des Rechtecks aus den Diagonalen, ein Resultat, dessen Richtigkeit ein Blick auf die Figur sofort bestätigt. Auf diese Weise also, glaube ich, gelangte Brahmegupta zu seinem Satze, indem er ihn durch Induction aus der Dreiecksformel fand und nachträglich verificirte. Er bedurfte zum letzteren keiner anderen Kenntniss als der des Pythagorischen Satzes, insbesondere aber nicht der Kenntniss eines der erst im Folgenden aufgestellten Sätze, und einer Gewandtheit in arithmetischen Umformungen, wie man sie einem indischen Rechner wohl zutrauen kann. So erklärt es sich, dass dieser Satz gerade an die Spitze aller übrigen gestellt ward, denn, nachdem es ihm gelungen war, die Fläche von Vierecken durch die Seiten auszudrücken, lag der Gedanke nicht allzufern, ein Gleiches mit den übrigen an ihnen vorkommenden Stücken zu versuchen. Andere Vierecke, als die oben genannten fünf Arten, erwähnt Brahmegupta nicht, und auch sein Scholiast Chaturveda kennt nur diese, während Ganesa, der Commentator zu Bhascara's Lilavati, Chapter VI. p. 58, Rule 133, noch andere Formen aufzählt. Da also Brahmegupta nur jene fünf Classen berücksichtigt, für welche seine Regel gilt, und an-

derer, für welche dieses nicht der Fall ist, nirgends gedenkt, so bleiben wir im Ungewissen, ob er in der That nur die von ihm aufgeführten kennt, oder ob ihm ausser diesen auch andere Vierecke bekannt sind, von ihm aber nicht in Betracht gezogen werden, eben weil sich sein Satz auf sie nicht anwenden lässt. Jedenfalls dürfen wir daraus, dass er z. B. das Rhomboid, den Rhombus, das allgemeine Parallel-Trapez nicht erwähnt, nicht mit Bestimmtheit schliessen, diese seien ihm unbekannt gewesen, ebensowenig wie wir von Euklid, da er ebenfalls von dem Parallel-Trapez schweigt, annehmen müssen, er habe von demselben nichts gewusst. Bhascara mochte später glauben, Brahmegupta habe seine Regel, die übrigens an der betreffenden Stelle, Lilavati Chapt. VI. p. 72, Rule 167, dem Sridhara zugeschrieben wird, auf alle Arten von Vierecken ausgedehnt wissen wollen, und sie deshalb für ungenau erklären. In der That konnte es, da Brahmegupta seinen Satz durch Induction fand, kommen, dass ihm die Bedingungen für die Giltigkeit desselben unklar blieben. Dass das Senkrechtstehen der Diagonalen nicht der Grund sein konnte, mochte ihm nicht verborgen bleiben, denn die Regel gilt für die von ihm angeführten speciellen Arten von Parallel-Trapezen, obgleich ihre Diagonalen nicht auf einander senkrecht stehen; sie gilt aber nicht für den Rhombus (von dem wir freilich nicht wissen, ob er Brahmegupta bekannt war), obschon hier das Senkrechtstehen stattfindet. Dass aber die Gleichheit der Winkel BAC und BDC die Bedingung für die Giltigkeit seines Satzes sei, konnte ihm entgehen, einmal weil dieselbe im Laufe der Rechnung, wenn dieselbe die oben angegebene war, nicht hervortritt, und sodann, weil bei den übrigen vier Arten (ausser dem Brahmegupta'schen Trapez), welche die Eigenschaften beider von mir aufgestellten Classen von Vierecken in sich vereinigen, nicht nur $\angle BAC = \angle BDC$, sondern auch $\angle BAC = \angle ACD$ ist. So erkannte Brahmegupta bloss, dass seine Regel für die von ihm aufgeführten Vierecke gilt, er erkannte aber offenbar nicht, dass sie auch noch für andere als die in diesen seinen speciellen Fällen enthaltenen, nämlich für alle Vierecke der 2ten Art, ihre Richtigkeit behält. Er erkannte zwar, dass sich um die von ihm betrachteten Vierecke ein Kreis beschreiben lasse, denn er berechnet in Art. 26—27 den Durchmesser desselben, er erkannte aber nicht den Zusammenhang zwischen diesem und seinem Satze, er sah nicht, dass sich nothwendig um jedes Viereck, für welches seine Regel gilt, auch ein Kreis beschreiben lassen muss. Dagegen bemerkte er die Ungenauigkeit der altägyptischen Methode, die Fläche zu berechnen, während wir derselben selbst in späteren Schriften noch mehrmals begegnen.

Zur Geschichte der Mathematik.

II. Die Boetius-Frage

von

Dr. H. Weissenborn,
Professor am Grossherzogl. Realgymnasium zu Eisenach.

Die Boetius-Frage.*)

Eine meine Programm-Abhandlung: „Die Entwickelung des Ziffer-rechnens. Ostern 1877“ betreffende Bemerkung in Z. XXII. Histor.-liter. Abth. 184, sowie eine Stelle, A. 130, in Cantor's mir durch diese Recension erst bekannt gewordene Schrift: „Die römischen Agrimensoren“ veranlassen mich, die immer noch nicht endgiltig entschiedene Boetius-Frage hier ausführlicher zu behandeln und meine Ansicht über dieselbe eingehender zu begründen, als es der enge Raum eines Programms, in welchem dieser Gegenstand ohnehin nur gelegentlich zur Sprache kommen konnte, gestattete. Ich glaube aber um so weniger befürchten zu müssen, mit einer Wieder-Aufnahme dieser Controverse etwas Ueberflüssiges zu thun, als in der That bei den Beweisen für die Unächtheit der Boetius-Schrift, wie Cantor, A. 130, mit Recht bemerkt, fast stets die Abacus-Stelle in den Vordergrund tritt, und von dem übrigen Inhalt nur das Eine oder Andere zur Motivirung herangezogen wird, während ich meinerseits, so hoch ich auch die Resultate der durch das Abacus-Problem hervorgerufenen Forschungen schätze, der Meinung bin, eine sichere Entscheidung könne nicht auf die eine oder andere Stelle, sondern müsse auf den gesammten

*) In dieser Abhandlung habe ich mich ausser den in der vorigen genannten folgender Werke bedient: Für die Arithmetik des Nicomachus der Ausgabe von Ast: „Theologumena arithmeticae: Accedit Nicomachi Geraseni institutio arithmetica. Lipsiae 1817“, welche von p. 65 an „*Νικομάχου εἰσαγωγὴ ἀριθμητική*“ enthält, sowie der Ausgabe von Hoche, Leipzig, Teubner, 1864, auf welche, nach Seite und Zeile, sich die Citate beziehen; für die Musik des Nicomachus des Werkes: Marcus Meibomius: Antiquae musicae auctores septem. Amstelodami. 1652“, in welchem wir u. a. auch „*Ευκλείδου εἰσαγωγὴ ἁρμονική*“ und „*Νικομάχου Γερασηνοῦ Πυθαγορικοῦ ἁρμονικῆς ἐγχειρίδιον*“ finden; für die Gromatiker, der Lachmann'schen Ausgabe 1848: „Die Schriften der römischen Feldmesser, herausgegeben von Blume, Lachmann und A. Rudolff. Vol. I, II“, im Texte mit F. bezeichnet; für Boetius, der Friedlein'schen Ausgabe. Lipsiae, Teubner. 1867; auf Seiten und Zeilen derselben beziehen sich die Citate im Texte; ferner Cantor: „Mathemat. Beiträge zum Culturleben der Völker. Halle 1863“, durch C. bezeichnet; Kästner: „Geschichte der Mathematik. Bd. I. 1796“, mit K., und Chasles: „Geschichte der Geometrie, übersetzt von Sohncke“, mit Ch. bezeichnet. Ein Z. mit nachstehender Zahl deutet auf einen Band der „Zeitschrift für Mathematik und Physik. Herausgegeben von Schlömilch, Kahl und Cantor“.

Inhalt der strittigen Schrift begründet werden. Auf diesen also vornehmlich gehe ich ein, und man wird bemerken, dass derselbe bei aufmerksamer und sorgfältiger Prüfung allerdings Anhaltspunkte genug bietet, welche zur Stütze eines Urtheiles dienen können. Bevor ich jedoch auf diesen, meiner Ansicht nach wichtigsten, Theil der Untersuchung eingehe, glaube ich erst Einiges vorausschicken zu müssen. Indem nämlich den Gegenstand der vorliegenden Erörterung die Frage bildet:

Ist die auf uns gekommene Schrift über Geometrie, welche den Namen des Boetius trägt, wirklich von diesem verfasst?

sind zunächst einige Vorfragen zu erledigen. Die erste derselben lautet:

Haben wir Beweise, dass Boetius überhaupt eine Schrift über Geometrie zu verfassen beabsichtigt hat? Hierüber erhalten wir Auskunft im Prooemium zu seiner Arithmetik, 8—11. In demselben nämlich unterscheidet Boetius als Gegenstände unserer Erkenntniss zwei Arten: Mengen und Grössen. Erstere können für sich allein, oder aber in Beziehung auf etwas Anderes betrachtet werden; letztere sind entweder ohne Bewegung oder in Bewegung. So entstehen vier Wissenschaften, das Quadrivium, von denen zwei die Mengen, zwei die Grössen behandeln. Die ersteren sind die „Arithmetik", welche „die Menge für sich", und die „Musik", welche die „Menge als auf etwas Anderes bezogen" behandelt; die beiden letzten sind die „Geometrie", welche die „unbeweglichen", und die „Astronomie", welche die „bewegten Grössen" zum Gegenstande hat. Von diesen vier Disciplinen ist nach Boetius offenbar die Arithmetik die erste, denn sie muss der Musik vorangehen, da, was für sich besteht, früher ist, als das, was auf etwas Anderes bezogen wird; sie muss auch der Geometrie vorangehen, denn, hebt man den Begriff der Zahl auf, so verschwinden die Begriffe von Drei-Eck, Vier-Eck u. s. w. völlig, nicht aber umgekehrt verschwindet der Begriff der Zahl, wenn die Geometrie aufgehoben wird; die Astronomie endlich kann erst auf die Geometrie folgen, da sie sich zum Theil auf dieselbe stützt. Boetius schliesst sein Prooemium mit den Worten 12, 11—12: „Quare, quoniam prior, ut claruit, arithmeticae vis est, hinc disputationis sumamus exordium." Diese letzten Worte nun machen es wenn nicht gewiss, so doch mindestens wahrscheinlich, dass Boetius ein Werk zu verfassen beabsichtigte, welches in der von ihm angegebenen Reihenfolge Arithmetik, Musik, Geometrie, Astronomie umfassen sollte, C. 184. Es würde demnach die hier in Betracht kommende erste Vorfrage wohl zu bejahen sein. Die beiden ersten Theile des geplanten Werkes, die Arithmetik und Musik, besitzen wir, dass sie wirklich den Boetius zum Verfasser haben, ist unbestritten, die Aechtheit der gleichfalls seinen Namen tragenden Geometrie, welche also den dritten Theil bilden würde, wird angezweifelt. Dass er aber eine solche zu schreiben

Willens gewesen ist, ist meines Wissens von keiner Seite in Abrede gestellt worden. Zwischen schreiben-wollen und wirklich schreiben aber besteht immer noch ein erheblicher Unterschied; es entsteht daher die zweite Vorfrage:

Haben wir sichere Beweise und Zeugnisse, dass Boetius eine Geometrie wirklich geschrieben hat? Solcher Zeugnisse nun, die hier in Betracht kommen, liegen in der That fünf vor: 1) Ein Brief des Theodorich an Boetius, in welchem er denselben mit der Anfertigung einer Wasser- und Sand-Uhr beauftragt, und in dem wir die Worte lesen, C. 183, 401, Note 370: „Translationibus enim tuis Pythagoras musicus, Ptolemaeus astronomus leguntur Itali. Nicomachus arithmeticus, geometricus Euclides audiuntur Ausoniis. Plato theologus, Aristoteles logicus Quirinali voce disceptant. Mechanicum etiam Archimedem Latialem Siculis reddidisti. Et quascunque disciplinas vel artes foecunda Graecia per singulos viros edidit, te uno auctore, patrio sermone Roma suscepit.“ Ferner 2) eine Stelle Cassiodors, C. 185, 402, Note 376: „Cujus disciplinae apud Graecos Euclides, Apollonius, Archimedes nec non et alii scriptores probabiles extiterunt: ex quibus Euclidem translatum in latinam linguam idem vir magnificus Boetius dedit.“ Es liegt weiter 3) eine andere Stelle Cassiodor's vor, welche sich in einer neuerdings wieder aufgefundenen, im Jahre 522, also kurz vor Boetius' Tode, verfassten Schrift*) findet. Sie lautet, U. 4: (Boetius) scripsit librum de sancta trinitate et capita quaedam dogmatica et librum contra Nestorium. condidit et carmen bucolicum. sed in opere artis logicae id est dialecticae transferendo ac mathematicis disciplinis talis fuit, ut antiquos auctores aut aequiperaret aut vinceret.“ Sodann schreibt Gerbert, C. 183, 185, 401. Note 371: „Reperimus octo volumina Boetii de Astrologia praeclarissima quoque figurarum Geometriae aliaque non minus admiranda,“ und endlich 5) eine Bemerkung, welche sich dem Vatican-Codex Nr. 3123, n_1 bei Friedlein, aus dem 11. oder 12. Jahrhundert, wie es scheint in früher Zeit, eingeschrieben findet, U. 47: „Euclides in greco boetius transtulit in latinum commentatus in difficiliora capitula, dirigit autem ad simachum socerum suum cum prologo. sicut in arithmetica imitatus nicomachum dirigit ad eundem. Videntur tamen pocius excerpta a boetii libro.“ Betrachten wir nun diese Zeugnisse, von denen namentlich die drei ersten, als von Zeitgenossen des Boetius, nämlich von Theodorich und Cassiodorus Senator herrührend, von besonderem Belange sind, genauer. Nach 1) müssen wir annehmen, Boetius habe seinen Plan wirklich ausgeführt, und ausser der Arithmetik des Nicomachus und der Musik eine

*) Festschrift zur Begrüssung der 32. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner in Wiesbaden. Bonn, Georgi. 1877. Anecdoton Holderi. ein Beitrag zur Geschichte Roms in ostgothischer Zeit von H. Usener, p. 74. Diese Schrift soll mit U. bezeichnet werden.

Geometrie nach Euklid und eine Astronomie nach Ptolemaeus bearbeitet oder, im weiteren Sinne des Wortes, übersetzt, ausserdem noch logische Schriften des Aristoteles, theologische des Plato, und mechanische des Archimed. Von dieser sind ausser der strittigen Geometrie erhalten die Arithmetik, Musik und logische Schriften. Cassiodor stimmt insoweit mit Theodorich überein, als er an einer andern Stelle, C. 185, 399, Note 350 mit den Worten: „Reliquae indigent Arithmetica disciplina: quam apud Graecos Nicomachus diligenter exposuit. Hunc primum Madaurensis Appulejus deinde magnificus vir Boetius latino sermone translatum Romanis contulit lectitandum“ der Arithmetik des Nicomachus, und in 2) der Uebersetzung des Euklid gedenkt. Es muss jedoch auffallen, dass Cassiodor von der Uebersetzung der Werke des Archimed, deren Theodorich gedenkt, schweigt, namentlich da er doch den Archimed soeben genannt hat; er erwähnt ferner in 3) zwar theologische Schriften, von Plato aber sagt er nichts. Vergleichen wir ferner diese Stelle 3), so sehen wir: Während in 1) und 2) ausdrücklich von Uebersetzungen, wenn auch in weiterem Sinne, die Rede ist, wird in 3) das „transferre“, offenbar geflissentlich, nur auf die Logik, nicht auf die Mathematik bezogen, und von Euklid, den Boetius nach 1) und 2) bearbeitet haben soll, ist in 3) gar keine Rede. Sind wir ferner gewiss, dass die in 1), 2), 3) enthaltenen Mittheilungen ganz zuverlässig sind? Die Sprache des Theodorich bezeichnet Cantor selbst, C. 183, als „pomphaft“; sollte die des Cassiodor nicht auch etwas schönrednerisch gefärbt sein? Behauptet er doch in 3), Boetius stehe in der Mathematik den Alten gleich oder übertreffe sie. Wer aber ein solches Urtheil ausspricht, muss selbst eben so tief in die Wissenschaft eingedrungen sein, als die Alten, und was wir in dieser Beziehung von Cassiodor wissen, K. 8, C. 176, kann uns diese Ueberzeugung nicht verschaffen. Wenn aber Cassiodor in 3) beim Fällen eines Urtheils seine Worte nicht so genau nahm — er konnte ja auch nicht ahnen, dass einst auf dieselben etwas ankommen werde —, sollte er dies in 2) bei Angabe eines, vielleicht nur vermeintlichen, Faktums gethan haben? Endlich, der Brief des Theodorich ist, U. 39, spätestens im Jahre 506 geschrieben, Boetius war aber, U. 40, „frühestens 480, wahrscheinlicher ein oder zwei Jahre später geboren“. Ist es nun wahrscheinlich, dass er, wenn auch seine Produktivität schon in frühem Lebensalter bezeugt wird, U. 40, höchstens 26 Jahre alt alle die von Theodorich aufgeführten Werke geschrieben haben sollte? Wenn man nun ferner in diesem Briefe, in welchem letzterer den Boetius um Beschaffung einer Wasser- und Sonnenuhr angeht, U. 39, „auch nicht gerade jedes Wort pressen darf und neben vollendeten auch blos begonnene Schriften angedeutet sein können“, liegt nicht der Gedanke nahe, es möchten in 1) und 2) auch solche Schriften als bereits verfasste aufgeführt sein, von denen man, vielleicht auf das Prooemium zur Arithmetik gestützt,

glaubte, dass Boetius sie schreiben wolle [die letzten Worte in 1) erinnern an die Worte der Dedication an Symmachus, 3, 10 „ea, quae ex Graecarum opulentia litterarum in Romanae orationis thesaurum sumpta conveximus"], von denen man ihm zutraute, dass er sie schreiben könne; wäre es so undenkbar, dass sich aus dieser Ansicht bald diejenige entwickelt hätte, dass er die Geometrie — und der Name Euklid's mochte als von einer solchen unzertrennlich erscheinen — schon geschrieben habe; sollten sich die Aussagen des Theodorich und Cassiodor in 1) und 2) nicht etwa nur auf Hörensagen gründen? Beide behaupten zwar, Boetius habe eine Uebersetzung oder Bearbeitung des Euklid geliefert, keiner aber bestätigt, dass er dieselbe gesehen oder gelesen habe, keiner theilt etwas Specielles irgend welcher Art über dieselbe oder aus derselben mit. Ein sicheres Zeugniss also, dass sich Alles so verhalten habe, wie wir in 1) bis 3) hören, können wir das Bisherige nicht nennen. An der Stelle 4) nun berichtet Gerbert in einem 982 geschriebenen Briefe, er habe in Mantua „octo volumina" des Boetius über Astrologie, über geometrische Figuren und Anderes gefunden. Wie schon Cantor angedeutet, sind wir wegen mangelnder Interpunktion dem Wortlaute nach nicht einmal sicher, dass Boetius als Verfasser nicht nur der Astrologie, sondern auch der geometrischen Figuren und des übrigen Bewundernswerthen angesehen werden soll. Cantor schliesst, 185, wahrscheinlich solle Boetius auch als Verfasser der hier genannten Geometrie gelten, weil die Astrologie desselben sonst den unverhältnissmässigen Umfang von „acht Bänden" eingenommen hätte. Wäre nun hier die Rede von gedruckten Werken, und dürften wir unsere moderne Vorstellung, nach welcher wir unter einem „Band" ein wenigstens nicht allzukleines Buch zu verstehen gewohnt sind, hier in Anwendung bringen, so möchte diese Folgerung etwas für sich haben, obschon auch dann die kleine Schrift über Geometrie — sie umfasst mit den Anmerkungen in der Friedlein'schen Ausgabe nur 55 Seiten klein 8⁰, und würde ohne dieselben wenig mehr als 3 Druckbogen füllen — nur einen sehr geringen Theil der acht Bände bilden würde. Allein wir haben hier selbstverständlich nur an Manuscripte zu denken, und es fehlen alle Anhaltspunkte für die Abschätzung dieser „octo volumina", und somit für die Annahme der Wahrscheinlichkeit, Gerbert habe 982 eine den Namen des Boetius tragende Geometrie gesehen. Gesetzt aber auch, dies wäre wirklich der Fall gewesen, so könnte ja eine Unterschiebung einer pseudonymen Schrift bis zu dieser Zeit sehr wohl stattgefunden haben. In 5) endlich begegnen wir wieder der in 1) und 2) ausgesprochenen Ansicht, Boetius habe in der That den Euklid in das Lateinische übersetzt und die schwierigeren Stellen commentirt; zugleich aber finden wir schon hier den Zweifel ausgesprochen, ob denn die vorliegende, für die Geometrie des Boetius sich ausgebende Schrift diese Bearbeitung sein könne, ob sie nicht vielmehr als ein Aus-

zug aus derselben gelten müsse. Fassen wir nun Alles dieses zusammen, so gelangen wir zu der Folgerung: Aus allen genannten Stellen 1) bis 5) geht zwar hervor, dass, vielleicht längere Zeit hindurch und weit verbreitet, die Meinung bestand, Boetius habe den Euklid übersetzt und commentirt; die volle Sicherheit aber, dass er dies wirklich gethan, dass er überhaupt eine Geometrie wirklich geschrieben habe, C. 185, erhalten wir durch diese Belegstellen nicht. Die Möglichkeit freilich, dass er eine solche verfasst habe, bleibt immerhin bestehen.

Allein die Frage, um welche es sich handelt, ist offenbar die, ob gerade diese vorliegende, den Namen des Boetius tragende, geometrische Schrift von ihm herrühre (er könnte ja eine Geometrie geschrieben haben, diese aber verloren gegangen sein), ob dieselbe also ächt oder unächt sei. Da nun der Reichenauer Codex, welcher hierüber Auskunft geben könnte, verschwunden ist, A. 130, 217, N. 245, so bleibt meines Erachtens nur der eine, ohnehin naturgemässeste, Weg zur Aufstellung eines sicheren Urtheils zu gelangen übrig: die Prüfung der strittigen Schrift nach Inhalt und Form, und ihre Vergleichung mit unbestritten ächten Werken, namentlich der Arithmetik und Musik, desselben Verfassers. Ich suche also zunächst die Frage zu beantworten:

Welchen Inhalt haben wir auf Grund der als ächt anerkannten Schriften des Boetius über Arithmetik und Musik in einer etwaigen Geometrie desselben Verfassers zu erwarten? C. 187. Betrachten wir zu diesem Zwecke, nachdem oben bereits der Hauptinhalt des Prooemiums zur Arithmetik angegeben ist, nun diese selbst und die Musik, so erkennen wir alsbald Boetius als einen Anhänger der Pythagoreïsch-Platonischen Schule. Denn welcher andere Grund hätte ihn dazu bestimmen sollen, die Arithmetik des gerade dieser Richtung angehörigen Nicomachus von Gerasa zu bearbeiten und die im genannten Prooemium angegebene Anlage und Disposition seines Werkes auf Gedanken zu gründen, welche wir ebenso in den ersten 6 Kapiteln des Nicomachus ausgesprochen finden? Dass aber Boetius nicht blos objectiv die Ansichten desselben wiedergiebt, sondern dieselben theilt, das zeigt die ganze Behandlung des Gegenstandes. Nicht eine wortgetreue Uebersetzung, sondern, wie er selbst sagt, 4, 30, eine Bearbeitung der Schrift des Nicomachus haben wir vor uns, überall tritt die Absicht hervor, nicht sowohl den Wortlaut als den Sinn desselben wiederzugeben, ihn zu erläutern und zu erklären. Indem Boetius an manchen Stellen, wie es nicht anders sein kann, übersetzt, aber frei übersetzt, an anderen hinweglässt, an wieder anderen hinzusetzt und weiter ausführt, zeigt er sich nirgends als sinn- und gedankenloser Nachsprecher, sondern als völlig vertraut mit dem Stoffe und denselben durchaus beherrschend. Die Pythagoreïsch-Platonische Anschauung des Nicomachus zur seinigen machend, betrachtet

er die Zahl als das Wesen aller Dinge und sucht auf die Eigenschaften der Zahlen Alles zurückzuführen und zu gründen. Seine Arithmetik enthält daher Speculationen über die Natur der Zahlen, über die verschiedenen Arten derselben, gerade und ungerade, einfache und zusammengesetzte, absolute und relative Primzahlen, es wird das sog. Sieb des Eratosthenes beschrieben, mittelst dessen die Primzahlen ausgeschieden werden, es wird der grösste gemeinschaftliche Theiler zu finden gelehrt, es werden die Progressionen, die Polygonal-, Triangular-, Quadrat-, Kubik-, Pyramidal-Zahlen erläutert, welche Boetius durch Hinzufügung von Zeichnungen erläutert, es wird die Entstehung der Quadrat- und Kubik-Zahlen angegeben, und endlich das arithmetische und geometrische Verhältniss, sowie die arithmetische, geometrische und harmonische Proportion besprochen. Letztere bildet offenbar den Uebergang zum zweiten Theile, der Musik, auf welchen Gegenstand Boetius, wieder ganz im Sinne der Pythagoreer und Platoniker, grosses Gewicht legt. In den fünf Büchern seiner Musik nun bewegt er sich völlig frei, nur hie und da finden sich Anklänge an die auch an Umfang weit kleinere Schrift gleichen Namens in zwei Bänden von Nicomachus, und wir erhalten den Eindruck eines ganz selbständigen Werkes. Die letzten 11 Kapitel desselben sind leider verloren, und es ist daher nicht zu entscheiden, ob sich am Ende der Musik eine Hinweisung auf die nun folgende Geometrie gefunden hat. Die noch vorhandenen Ueberschriften dieser 11 Kapitel lassen allerdings nichts der Art vermuthen, allein dieselben rühren nach Friedlein Praef. VI. wahrscheinlich nicht von Boetius her. — Welchen Inhalt nun haben wir in der Geometrie, mit welcher der Disposition nach, nachdem in der Arithmetik und Musik die Mengen behandelt waren, der zweite Haupt-Abschnitt, die Betrachtung der Grössen, beginnen sollte, zu erwarten? Zunächst gewiss keine Uebersetzung im eigentlichen Sinne, denn eine solche hätte übel zu den vorausgegangenen, sich frei bewegenden, Theilen gepasst, sondern, wenn sich die Schrift an einen früheren Autor anlehnte, eine Bearbeitung. Ferner deutet Boetius, wie oben bemerkt ward, zwar an, dass er eine Geometrie zu schreiben beabsichtige; was aber berechtigt zu der Annahme, dass er eine solche nach Euklid habe verfassen wollen? Es liegt mir ferne, eine solche deshalb für unwahrscheinlich zu halten, weil doch nicht allzu lange vorher schon Proklus, 412—485, dessen Lebenszeit also bis in die des Boetius hineinreichte, seinen bekannten aus 4 Bänden bestehenden Commentar zum 1. Buche der Euklidischen Elemente verfasst hatte, der dem Boetius, sollte man meinen, doch nicht unbekannt geblieben sein wird. Nicht deshalb also, weil derselbe eine nochmalige Commentirung des Euklid etwa für überflüssig hätte halten können, finde ich dieselbe unwahrscheinlich, denn auch die Arithmetik der Nicomachus war, wie an der einen oben angeführten Stelle Cassiodor berichtet, von Appulejus aus Madaura, C. 172, in das

Lateinische übertragen, ohne dass dies den Boetius abgehalten hätte, ein Gleiches zu thun. Wohl aber muss die Annahme, derselbe habe gerade Euklid zu commentiren beabsichtigt, deshalb zweifelhaft erscheinen, weil er den Namen desselben in der Arithmetik und in der Musik auch nicht ein einziges Mal erwähnt. Nirgends in der Arithmetik, wo sich doch Gelegenheit genug geboten hätte, gedenkt er der arithmetischen Abschnitte in Euklid's Elementen, des V.—IX. Buches, weder bei der Lehre von den einfachen und zusammengesetzten Zahlen, noch bei den Primzahlen, noch bei den Polygonalzahlen, noch bei den Proportionen, ja, wie wir sehen werden, nicht einmal bei geometrischen Dingen; 15 Mal in der Arithmetik, 1 Mal in der Musik erwähnt er die „geometria", die „geometrica disciplina" etc., aber nie den Namen des Euklid, 14 Mal in der Musik beruft er sich auf Ptolemäus, zwar nicht als Astronomen, sondern als Verfasser der drei Bücher ἁρμονικά über Musik, aber an keiner einzigen Stelle auf Euklid, der doch auch eine εἰσαγωγὴ ἁρμονική geschrieben hat. Sollte man nicht meinen, Boetius hätte, wenn er wirklich gesonnen gewesen wäre, das dritte Buch seines Werkes auf Euklid zu gründen, schon in den beiden ersten Büchern, zumal derselbe wie Proklus II. 20 berichtet, auch der Platonischen Richtung huldigte, wenigstens durch Nennung seines Namens den Leser, wenn auch nur indirekt, auf das Folgende vorbereitet, anstatt ihm im dritten Theile völlig unerwartet einen bisher noch nie erwähnten Autor vorzuführen? Wenn daher schon aus diesem äusserlichen Grunde die Annahme, Boetius habe im dritten Theile einen Commentar zum Euklid geben wollen, bedenklich erscheint, so muss dieselbe aus inneren Ursachen nicht minder zweifelhaft werden. Offenbar nämlich konnte es nicht im Plane des Boetius liegen, im dritten Theile eine Uebersetzung oder vollends einen Commentar zu Euklid's vollständigen Elementen zu bieten, denn dieser Abschnitt würde dann einen Umfang erhalten haben, der zu dem der beiden ersten in gar keinem Verhältnisse gestanden hätte; vielmehr konnte er bei der auf ausgesprochen Pythagoreïsch-Platonischen Anschauungen basirten Anlage seines Werkes nur diejenigen Partieen der Geometrie hervorzuheben beabsichtigen, welche aus eben diesen Anschauungen hervorgegangen waren. Dass unter solchen Umständen Boetius keine Veranlassung fand, den Euklid, wenn er ihn in seiner Geometrie natürlich auch öfter erwähnt haben würde, in den Vordergrund zu stellen, liegt auf der Hand. Was wir daher in einer, den dritten Theil des Werkes bildenden, Geometrie zu erwarten haben, dürfte sein: die Construction der vierten und mittleren Proportionalen, anknüpfend an die Proportionen in der Arithmetik, die Lehre von der Aehnlichkeit, der Pythagoreïsche Lehrsatz, die Bildung rationaler rechtwinkliger Dreiecke nach den Regeln

$m^2 + \left[\frac{m^2 - 1}{2}\right]^2 = \left[\frac{m^2 + 1}{2}\right]^2$ für ein ungerades m, nach Pythagoras 1)

$$m^2 + \left[\left(\frac{m}{2}\right)^2 - 1\right]^2 = \left[\left(\frac{m}{2}\right)^2 + 1\right]^2 \text{ für ein gerades } m, \text{ nach Plato} \qquad 2)$$

(und welche Gelegenheit, auf die Speculationen über gerade und ungerade Zahlen zurückzuverweisen hätte sich hier nicht geboten?). Dabei sind wir gewiss berechtigt, anzunehmen, Boetius, der in der Arithmetik und Musik 36 Mal Pythagoras und die Pythagoriker, 11 Mal Plato und die Platoniker erwähnt, werde bei Besprechung dieser so überaus wichtigen Sätze die Namen ihrer Entdecker, des Pythagoras und Plato, die schon Heron und nicht minder bestimmt Proklus*) IV, 111, nennt, nicht verschwiegen, sondern dieselben, wenn irgendwo, gerade hier gebührend hervorgehoben haben. Wir müssen ferner erwarten, in seiner Geometrie noch zu finden die Zusammensetzung mehrerer rechtwinkliger Dreiecke zu einem nicht-rechtwinkligen rationalen Dreieck, sodann das Irrationale, die commensurabelen und incommensurabelen Linien, das Auffinden des grössten gemeinschaftlichen Masses zweier Strecken im Anschlusse an das Auffinden des grössten gemeinschaftlichen Theilers in der Arithmetik; ich würde noch hinzusetzen: die regelmässigen Polygone und Körper, wenn dieselben nicht in der Arithmetik bei Gelegenheit der figurirten Zahlen berücksichtigt worden wären. Dies etwa, und vielleicht noch das Eine oder Andere, haben wir in einer Geometrie des Boetius zu erwarten. Was wir aber in derselben sicherlich am Wenigsten suchen dürfen, sind Gegenstände der praktischen Feldmesskunst, welch' letztere der auf das Ideelle gerichteten, in reinen, nicht selten mystischen, Speculationen sich ergehenden Pythagoreïsch-Platonischen Schule gewiss ebenso fern lag, als der Mechanismus des bürgerlichen, praktischen Rechnens. An die Geometrie mochte sich als vierter Theil die Astronomie, vielleicht im Anschlusse an den Almagest des Ptolemaeus, anreihen, C. 183, es mochte der Sphären-Musik gedacht werden, auf welche Boetius schon im Prooemium zur Arithmetik 12, 1—3, hindeutet, und deren er in der Musik gedenkt 187, 26: „Qui enim fieri potest, ut tam velox caeli machina tacito silentique cursu moveatur? Etsi ad nostras aures sonus ille non pervenit, quod multis fieri de causis necesse est, non poterit tamen motus tam velocissimus ita magnorum corporum nullos omnino sonos ciere", es konnten ferner die Zahlenverhältnisse

*) Die Citate aus Euklid beziehen sich auf die erste gedruckte Ausgabe des Euklid: „*Εὐκλείδου στοιχείων βιβλ. ιε ἐκ τῶν Θέωνος συνουσιῶν. Εἰς τοῦ αὐτοῦ τὸν πρῶτον, ἐξηγημάτων Πρόκλου βιβλ. δ.* Adjecta praefatiuncula in qua de disciplinis Mathematicis nonnihil. Basileae apud Joan. Hervagium anno 1533. Mense Septembri." Nach Hankel 388 ist der Zusatz: „*ἐκ τῶν Θέωνος συνουσιῶν*" handschriftlich nicht gesichert. Wenigstens sagt, K. 248, 249, Savilius, derselbe befinde sich in keinem seiner beiden Manuscripte. Der dieser offenbar sehr sorgfältig auf Grund zweier Handschriften besorgten Baseler Ausgabe beigefügte Commentar des Proklus ist selbständig paginirt. Er besteht aus 4 Büchern. Auf die Zahl des betreffenden Buches und der Seite beziehen sich die Citate im Texte.

der Abstände der Planeten, der Auf- und Untergang der Gestirne behandelt werden, u. a. Dann würde das Werk des Boetius ein der von ihm im Pythagoreïsch-Platonischen Sinne angegebenen Anlage entsprechendes, einen und denselben Grundgedanken durchführendes und wohl geordnetes, nicht ein aus vier verschiedenen, nur äusserlich zusammenhängenden Theilen bestehendes, gewesen sein. Sehen wir nun zu, in wie weit sich unsere Erwartungen erfüllen, und gehen wir über zu der Frage:

Welchen Inhalt finden wir in derjenigen Schrift, welche als die Geometrie des Boetius gilt? Dieser Inhalt nun besteht in Folgendem: Boetius, so will ich den Verfasser derselben einstweilen bezeichnen, beginnt mit dem Versprechen, er wolle, was Euklid „de artis geometricae figuris", 373, 22, dunkel vorgebracht, erläutern, und es scheint daher in der That, als solle eine Bearbeitung oder Commentirung des Euklid, obschon wir, wie erwähnt, diesem primo loco zu begegnen nicht vermuthen können, den Haupt-Gegenstand der Schrift bilden. Freilich sind die Worte „de artis geometricae figuris" etwas befremdlich. Noch mehr aber muss es auffallen, dass auf die ausgesprochene Absicht des Boetius, den Euklid zu erklären, die Definition des Feldmesser-Ausdruckes „mensura" folgt, und zwar übereinstimmend mit der des Isidor von Sevilla, F. I. 367: „Mensura est quidquid pondere capacitate longitudine altitudine animoque finitur". (Vergl. Hultsch. Metrol. II, 11. Note 1.) An diese schliessen sich die Worte: „Principium autem mensurae punctum vocatur", erinnernd an den Satz bei Balbus ad Celsum, F. I. 97: „Omnis autem mensurarum observatio et oritur et desinit signo." Nun aber folgen allerdings die 35 Definitionen von E(uklid Buch) I, fast ganz in derselben Ordnung wie in der Baseler Ausgabe nach Theon von Alexandria, nur die 13te und 14te umgestellt, die 19te fehlt. Im Uebrigen fällt auf den ersten Anblick nichts Bemerkenswerthes auf. Etwas anders jedoch gestaltet sich die Sache bei genauerer Prüfung. Namentlich giebt die Uebersetzung der 30ten und 31ten Definition zu begründeten Bedenken Anlass, und zwar aus nachstehendem Grunde: In seiner Arithmetik behandelt Boetius im Anschlusse an die Polygonal-, besonders Quadrat-Zahlen, auch diejenigen, welche 115, 8, „vocantur a Graecis ἑτερομήκεις". Er beruft sich also hier auf die Griechen überhaupt, und nicht speciell auf Nicomachus. Da er jedoch des letzteren Arithmetik bearbeitet, so ist leicht zu schliessen, dass er diesen wenigstens unter die „Graeci" mit einbegreife, und dies ist in der That der Fall, denn die Theorie der heteromeken Zahlen findet sich ebenso wie bei Boetius dargestellt bei Nicomachus. Dieser nennt in seiner Arithmetik, 54, 17, 20, 22; 108, 5, 8; 109, 2, 19, 23, 26 etc. solche, aber nur solche Zahlen heteromek, welche das Produkt von zwei gerade um eine Einheit verschiedenen Zahlen sind, wie $1 \cdot 2$, $2 \cdot 3$, $11 \cdot 12$ etc. Der Grund dafür, dass gerade diese Art von Zahlen eingehend betrachtet wird, liegt darin, dass, wie die Summe der n ersten un-

geraden Zahlen die n^{te} Quadratzahl giebt, so die Summe der n ersten geraden die n^{te} heteromeke Zahl liefert, denn es ist $2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdot \cdot + 2 \cdot n = n\,(n + 1)$. Es haben also die heteromeken Zahlen in dieser Hinsicht eine gewisse Aehnlichkeit mit den Quadrat-Zahlen. Solche Zahlen ferner, welche aus dem Produkte von zwei nicht gerade um eine Einheit verschiedenen Zahlen bestehen, nennt Nicomachus promek, z. B. 2 · 4, 3 · 6, 4 · 8, Arithm. 108, 20—109, 2; 113, 6—16. Ueber die Natur dieser Zahlen nun handelt er, unter Berufung auf Physiker und Mathematiker, 112, 14, ausführlicher. Ob er bei der Benennung heteromek an die geometrische Figur eines Rechtecks gedacht, lässt sich aus seinen Worten nicht mit Bestimmtheit erkennen. Genau dieselbe Theorie nun finden wir bei Boetius in der Arithmetik, 56, 115—126, vorgetragen und ausführlich erklärt. Nur bedient er sich statt des Nicomachischen Ausdruckes heteromek, an der früheren Stelle 56, der Bezeichnung *„longilaterus“*, an der späteren durchgehends *„parte altera longior“*, 115, 7—13; die Polygonal-Zahlen macht er durch entsprechende Anordnung paralleler Striche, 87, 5—7, „virgulae“, anschaulich, wie wir Punkte anwenden (Nicomachus bedient sich in seiner Arithmetik, 84, zur Bezeichnung der Einheit des Buchstabens α), die Quadrat-Zahlen erscheinen daher bei diesem Verfahren als in quadratischer, die heteromeken bei gleicher Darstellung als in Form eines Rechtecks angeordnete Striche. Gleichwohl aber nimmt Boetius seine Bezeichnung *parte altera longior* nicht von der geometrischen Figur, sondern ausdrücklich (vergl. Nicom. 109) aus Speculationen über die Natur der Zweiheit, des „Alterum“ und der „Alteritas“ her, 117, 1—12. Da ich auf diese nicht ganz klare Pythagoreisch-mystische Stelle später noch einmal zurückkommen muss, setze ich sie her. Sie lautet: „Alterum enim apud Pythagoram vel sapientiae ejus heredes nulli alii nisi tantum binario adscribebatur. Hunc alteritatis principium esse dicebant, eandem autem naturam et semper sibi similem consentientemque nullam aliam nisi primaevam ingeneratamque unitatem. Binarius autem, numerus primus, est unitatis dissimilis, idcirco quod primus ab unitate disjungitur. Atque ideo alteritatis cujusdam principium fuit, quod ab illa prima et semper eadem substantia sola tantum est unitate dissimilis. Merito ergo dicentur hi numeri parte altera longiores, quod eorum latera unius tantum sese adjecta numerositate praecedunt.“ Statt des „promek“ bei Nicomachus gebraucht Boetius entweder *„antelongior“* 116, 22 — 117, 1 oder *„anteriore parte longior“* 124, 15, an welcher letzteren Stelle 124, 13—23 er sich so ausspricht: „Et primo quidem distribuendum est, qui sint hi, quos promeces vocant, id est *anteriore parte longiores,* vel qui, quos ἑτερομήκεις, id est *parte altera longiores.* Est enim *parte altera longior* numerus, quicunque *unitate tantum* lateri crescit adjecta . . . *Anteriore* vero *parte longior* est, qui sub duobus numeris hujusmodi continetur, quorum latera *non* possidet *unitatis* differentia, sed aliorum quorumque nume-

rorum." Endlich fehlt auch bei Boetius die Berufung auf die Mathematiker nicht, 122, 22: „quicunque in matheseos disputatione versati". Wir sehen also, bei Boetius sind *parte altera longior* und *antelongior* oder *anteriore parte longior* zwei ebenso verschiedene Begriffe, wie die gleichbedeutenden *heteromek* und *promek* bei Nicomachus; insbesondere hat *heteromek* bei letzterem, und *parte altera longior* bei Boetius eine ganz bestimmte specielle Bedeutung. Nun lautet die 30[te] und 31[te] Definition nach Euklid: „Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων Τετράγωνον μέν ἐστιν, ὃ ἰσόπλευρον δὲ ἐστι καὶ ὀρθογώνιον, Ἑτερόμηκες δὲ, ὃ ὀρθογώνιον μὲν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ." Bei Euklid also (wie auch mehrfach bei Heron, z. B. 43, 2; 52, 6; 84, 27; 85, 5) wird diejenige Figur, die wir gewöhnlich Rechteck nennen, Ἑτερόμηκες genannt, und dasselbe Wort ist auch der zu dieser Definition gehörigen Figur beigesetzt. Wenn wir nun in der Geometrie des Boetius dieselbe 30[te] und 31[te] Definition übersetzt lesen, 376, 14—17: „Quadrilaterarum vero figurarum quadratum vocatur, quod est aequilaterum atque rectiangulum. *Parte altera longius* vero est, quod rectiangulum quidem est, sed aequilaterum non est", so würde diese Uebertragung bei jedem Anderen völlig natürlich und unverfänglich erscheinen, denn das *parte altera longius* giebt das ἑτερόμηκες sinngetreu wieder. Boetius aber gerade konnte so nicht übersetzen, denn das Wort ἑτερομήκης bei Euklid hat eine andere und allgemeinere Bedeutung als dasselbe Wort bei Nicomachus, da es das ἑτερομήκης und das προμήκης des letzteren zugleich umfasst. Hätte dieser Unterschied dem Boetius entgehen können, ihm, der den Euklid nicht nur verstehen, sondern auch übersetzen und vollends commentiren wollte? Wenn er denselben aber bemerkte, wie hätte er dann das wenn auch nur mehr gelegentlich 4 Mal in der Arithmetik, 56, vorkommende *longilaterus,* wie aber vollends hätte er das *parte altera longior* hier anwenden können, welches in der Arithmetik nicht weniger als 55 Mal auf 37 Seiten, 115—151, stets in der typischen, fest und bestimmt angegebenen speciellen Bedeutung, und nur in dieser gebraucht hat? Musste er nicht einsehen, dass er sich eines jeden anderen, nur nicht dieses Ausdruckes bedienen durfte, durch welchen der dritte Theil des Werkes mit dem ersten offenbar in Widerspruch geräth, und der Leser verwirrt wird, wie sich auch in der Folge zeigen wird? Wollte man jedoch einwenden, Boetius habe sich des seltenen, jetzt freilich üblichen, *oblongus* nicht bedienen mögen, und keine andere, als weitläufigere Umschreibungen des Begriffes ἑτερομήκης zu finden vermocht, so wäre zu erwidern, einmal: auch Euklid lässt sich, wo es sich um Deutlichkeit handelt, selbst die weitläufigsten Umschreibungen, und noch dazu öfter, anzuwenden nicht verdriessen, wie z. B. das παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ (zum ersten Male Buch X, Satz 17 Lemma, und öfter), sodann: Boetius war augenscheinlich sprachgewandt genug, so dass ihm die Bildung neuer Aus-

drücke keine Verlegenheit verursachte, und endlich: das ἑτερομήκης kommt bei Euklid nur dieses einzige Mal vor. Es lag mithin nicht der geringste Grund für die Wahl dieses, gerade des unpassendsten, Ausdruckes vor. Wenn nun also Boetius das Euklidische ἑτερομήκης nicht durch *parte altera longior* übersetzen konnte, bei jedem Anderen aber die Wiedergabe dieses Wortes durch denselben Ausdruck so natürlich und sinngetreu erscheint, dass Niemand, der die Arithmetik des Boetius nicht kennt, daran Anstoss nehmen kann, so liegt es nahe, zuzusehen, wie Andere diese Stelle des Euklid wiedergeben (vgl. Ch. 468). Die römischen Feldmesser geben hierüber keinen Aufschluss; es bleibt also nur übrig, aus der Zeit nach Boetius Werke zum Vergleiche heranzuziehen. Nun ist in der Zeit nach Boetius eine der ältesten Uebersetzungen des Euklid, und zwar aus dem Arabischen in das Lateinische, die von Campano im 13. Jahrh., welche zum ersten Male bei Erhard Radtolt in Augsburg 1482 gedruckt erschien, K. 290, Chasles 548—549; aus dem Griechischen ward der Euklid zuerst von Bartholomaeus Zamberti in Venedig (um 1500) in das Lateinische übertragen (dass derselbe von Mathematik nichts verstanden haben sollte, K. 257—259, ist gewiss nicht wörtlich zu verstehen). Beide Uebersetzungen neben einander wurden zuerst unter den Auspicien von Faber von Etaples (Faber Stapulensis) zu Paris bei Stephan 1516, und dann, 4 Jahre nach der griechischen oben erwähnten Ausgabe, also 1537, bei demselben Verleger Hervagen in Basel gedruckt herausgegeben, K. 258, versehen mit einer Einleitung von Melanchthon. Letztere Doppel-Ausgabe liegt mir vor. Sie trägt den Titel: „Euclidis Megarensis mathematici clarissimi elementorum Geometricorum lib. XV. Cum expositione Theonis in priores XIII a Bartholomeo Veneto Latinitate donato, Campani in omnes, et Hypsiclis Alexandrini in duos postremos etc. Basileae apud Johannem Hervagium. Mense Augusto. Anno 1537. In dieser Ausgabe nun lautet die 30te und 31te Definition bei Campano nach dem Arabischen: „Figurarum autem quadrilaterarum, alia est quadratum, quod est aequilaterum atque rectangulum. Alia est *tetragonus longus,* quae est figura rectangula, sed aequilatera non est“ (bei Rhombus, Rhomboid und Trapez behält er die arabische Benennung bei). Bei der zugehörigen Figur steht ebenfalls *tetragonus longus.* Bei Zamberti lautet dieselbe Stelle: „Quadrilaterarum autem figurarum, quadratum quidem, est quod et aequilaterum ac rectangulum est. *Altera parte longius,* est quod rectangulum quidem, at aequilaterum non est.“ Bei der Figur steht sonderbarer Weise ebenfalls *tetragonus longus* (das „παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ“ im X. Buch übersetzt Zamberti „deficiens forma quadrata“, Campano umschreibt umständlicher). Wir sehen also, Zamberti übersetzt das ἑτερόμηκες des Euklid ebenso wie Boetius durch *parte altera longius.* Es kann dies nun völlig unabhängig von demselben geschehen sein, denn nichts ist natürlicher als diese Uebertragung;

doch könnte auch Boetius benutzt sein. Denn der Verleger Hervagen schreibt in der Vorrede an den Leser: „Collatum est itaque exemplar Jacobi Fabri Stapulensis ductu Parisiis ante aliquot annos excusum, ad fidem Graeci exemplaris a doctiss. viro Christanno Herlino Mathematicarum disciplinarum publico apud Argentinenses professore, cui acceptum feras quicquid hic aut ad Graecum exemplar aut alioqui docte restitutum videris." Es ist also diese Ausgabe mit dem griechischen Texte, vermuthlich der Baseler, aber auch mit der zu Paris unter der Leitung des Faber Stapulensis erschienenen, und wohl noch mit anderen Schriften verglichen worden. Faber aber hatte, K. 88—911, Ch. 527, im Jahre 1480 die Arithmetik des Boetius herausgegeben, er scheint auch einer Sammlung von Schriften nicht fern gestanden zu haben, welche 1534 erschien und u. a. auch die Geometrie des Boetius enthielt, K. 283. Es wäre daher immer möglich, dass die Arithmetik und Geometrie desselben benutzt worden wäre. Einiges scheint dafür, Anderes freilich dagegen zu sprechen. Auf alle Fälle konnte Zamberti sehr wohl, Boetius aber keinenfalls das Euklidische ἑτερόμηκες durch *parte altera longius* übersetzen. Verstärkt wird dieses Bedenken, ob Boetius dies geschrieben, noch durch einen andern Umstand. Betrachten wir nämlich die Uebersetzung der auf Seite 376 enthaltenen Definitionen 24—35, so sehen wir nicht nur, dass, wie nicht anders zu erwarten, hier unter Trapez, ebenso wie bei Euklid, ein unregelmässiges Viereck, nicht ein sog. Parallel-Trapez verstanden wird, sondern es muss uns auch die häufige Zusammenstellung der griechischen mit den lateinischen Bezeichnungen auffallen. Wir finden z. B. auf der genannten Seite: „orthogonium id est rectiangulum", „amblygonium vero, quod latine obtusiangulum dicitur", oxygonium vero, id est acutiangulum", „trapeziae id est mensulae", „parallelae id est alternae", und wenn wir diese Stellen durchlesen, so erhalten wir den Eindruck, als seien die griechischen Namen bereits im Gebrauche gewesen, der Uebersetzer aber habe beabsichtigt, dieselben durch lateinische zu ersetzen, und um Missverständnisse zu verhüten die griechischen Worte, als die bekannteren (bei den römischen Feldmessern werden die Arten des Dreiecks fast ausschliesslich mit den griechischen Benennungen bezeichnet) wiederholt, wir erhalten also den Eindruck, als beabsichtige der Uebersetzer die griechische Benennung durch eine lateinische zu ersetzen, statt der schwankenden Bezeichnung eine feststehende einzuführen, und diese durch consequente Anwendung in seiner Uebersetzung einzubürgern. Es ist nicht ohne Interesse, dies eingehend zu verfolgen: In dem Theile der Geometrie nun, welcher die Uebersetzung eines Stückes des Euklid enthält, also (s. u.), mit Ausnahme der verdorbenen Worte auf 387, in dem Theile 374—386; 388, 3 — 389, 16; 390, 11—25; 391, 8 — 392, 4; 392, 13—22, finden wir für Punkt, bei Euklid σημεῖον, stets (12 Mal) *punctum;* für Fläche, ἐπιφάνεια, stets (2 Mal) *superficies;* für Figur, σχῆμα, stets (16 Mal) *figura;*

für Dreieck, τρίγωνον, stets (32 Mal) *triangulum* oder *triangulus,* nur an 2 verdorbenen Stellen, 386, 17; 387, 17 *trigonum;* für Quadrat, τετράγωνον, stets (24 Mal) *quadratum;* für Fünfeck, πεντάγωνον, stets (2 Mal) *quinquangulum;* für gleichseitig, ἰσόπλευρος, stets (6 Mal) *aequilaterus;* für rechtwinklig, ὀρθογώνιος, stets (3 Mal) *rectiangulus;* für das Rechteck, ὀρθογώνιον, 5 Mal *rectiangulum,* 3 Mal *rectilineum;* für stumpf (vom Winkel), ἀμβλύς, stets (2 Mal) *obtusus;* für parallel, παράλληλος, stets (11 Mal) *alternus;* das ἐναλλάξ des Euklid ist durch *alternatim,* 382, 23, wiedergegeben. In demjenigen Theile der Geometrie aber, welcher keine Uebersetzung des Euklid ist, finden wir, natürlich ohne Berücksichtigung der Stellen, die Citate aus Euklid oder den Feldmessern enthalten, Punkt in geometrischer Bedeutung nicht; für Fläche stets (2 Mal) *superficies;* für Figur 14 Mal *figura,* 9 Mal *forma,* 10 Mal *formula,* 1 Mal *deformatio;* für Dreieck stets (26 Mal) *trigonus;* für Quadrat 3 Mal *tetragonus,* 1 Mal *tetragonus normalis,* 1 Mal *tetragonus normaliter constitutus,* 1 Mal *quadratum;* das Rechteck heisst 3 Mal *tetragonus parte altera longior,* 2 Mal *parallelogrammum orthogonium;* 3 Mal heisst auch das Viereck *tetragonus;* für Fünfeck stets (5 Mal) *pentagonus;* für gleichseitig stets (6 Mal) *isopleurus;* für rechtwinklig stets (15 Mal) *orthogonius;* stumpf- und spitzwinklig heissen, jenes 2, letzteres 1 Mal vorkommend, ersteres *amblygonius,* letzteres *oxygonius;* parallel findet sich nicht. In der Arithmetik des Boetius, die also eine freie Bearbeitung, nicht eine wörtliche Uebersetzung, der Arithmetik des Nicomachus ist, lesen wir für Punkt (bei Nicomachus, z. B. 84, 9, 13; 100, 7, 15, 13 σημεῖον) bei Boetius *punctum;* nur 2 Mal 87, 4, 13 bei Boetius *notula,* vergl. Nicomachus 83, 20 σημεῖον; die Fläche, bei letzterem ἐπιφάνεια, heisst bei Boetius *superficies;* die Figur, σχῆμα, aber bald *figura,* z. B. 86, 12, 21; 91, 6, 14; 99, 3, 16, 20, 27; 109, 18; 114, 8, etc., bald *forma,* z. B. 8, 5; 11, 4, 6; 99, 10, 24; 104, 12; 108, 24, 27; 109, 17; 111, 10, 24, etc., das Dreieck, τρίγωνον, heisst *triangulus* oder *triangulum;* quadratisch, das Quadrat 40 Mal *quadratus, a, um, quadratum,* aber häufiger, 122 Mal, *tetragonus, a, um, tetragonus;* das Fünfeck stets *pentagonus,* das Sechseck *exagonus,* nur 1 Mal, 99, 17, *sexangulum;* gleichseitig, gleichwinklig, rechtwinklig kommt nicht vor; für parallel, παράλληλος, lesen wir bei Boetius, 11, 25, „*paralleli* circuli"; 87, 7, „*ordinatae* virgulae"; 111, 15, „parallelepipeda, quae sunt, quotiens superficies *contra* se sunt, et ductae in infinitum nunquam concurrent", 115, 3 „Ea namque hoc nomine (parallelepipedus) vocatur figura, quae *alternatim positis* latitudinibus continetur." Der Kreis wird in der Uebersetzung des Euklid, 375, 3, so definirt: „Circulus vero est figura quaedam plana et circumducta et sub una linea contenta, ad quam a puncto, quod infra figuram positum est, omnes quae incidunt rectae lineae sunt invicem sibi aequales", in der Arithmetik, 121, 22, aber: „Est enim circulus posito quodam puncto

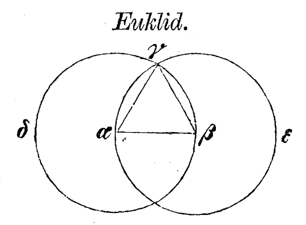
et alio eminus defixo illius puncti, qui eminus fixus est, aequaliter distans a primo puncto circumductio et ad eundem locum reversio, unde moveri coeperat." Endlich erwähnt Boetius in seiner Arithmetik, 91, 9, und zwar ohne alle Veranlassung von Seiten des Nicomachus (über dessen Worte vom Kreise vergleiche 111, 20 seiner Arithmetik), das Axiom, welches wir gewöhnlich als das 12[te] anzusehen pflegen: „*Duae* enim *lineae rectae spatium non continent*", aber selbst hierbei gedenkt er des Euklid mit keinem Worte; und sonderbarer Weise ist gerade dieses Axiom in der Uebersetzung des Euklid hinweggelassen, wie wir sehen werden. Sollen wir nun annehmen, Boetius habe, nicht genug dass er in der Geometrie das *ἑτερομήκης* auf eine seiner Arithmetik widersprechende Weise übersetzt, in letzterer eine vielfach schwankende Bezeichnung angewandt, den Leser dann in der Geometrie mit der Uebersetzung eines noch nie genannten Autors und einer consequent durchgeführten Terminologie überrascht, und letztere dann abermals verlassen, oder er habe beim Verfasser der Arithmetik gar nicht daran gedacht, dass ja der dritte Theil den Euklid enthalten sollte? Sollte er bei der Uebersetzung desselben nichts über die frühere Definition des Kreises, über das Fehlen des 12[ten] Axioms (Proklus, III, 51, und die Baseler erklären es für überflüssig) hinzugefügt haben? Wenn nun oben gesagt ward, es scheine, als solle in dieser Uebersetzung eine bisher übliche Beziehungsweise durch eine andere ersetzt werden, so wird dies durch das Folgende noch wahrscheinlicher. Nach den Definitionen wendet sich nämlich Boetius zu den Forderungssätzen, *αἰτήματα* bei Euklid, und beginnt seine Uebersetzung mit den Worten, 377, 4: „Petitiones vero, sive postulata, ut veteribus placuit, dicantur, quinque sunt." Wir ersehen also aus den Worten *ut veteribus placuit,* dass zur Zeit, als die vorliegende Uebersetzung des Euklid geschrieben ward, bereits das Wort *postulata* für das Euklidische *αἰτήματα* gebräuchlich gewesen sein muss, während der Uebersetzer *petitiones* vorzuziehen scheint. Es mussten demnach bereits zu seiner Zeit wenigstens theilweise Uebersetzungen des Euklid in das Lateinische vorhanden sein, was sich auch weiter unten noch bestätigen wird. Bleiben wir jetzt bei Boetius; derselbe wendet sich also zur Uebersetzung der Forderungssätze (*αἰτήματα* bei Euklid, *petitiones* bei Boetius und Campano, *postulata* bei Zamberti) und der Grundsätze (*κοιναὶ ἔννοιαι* bei Euklid, *ἀξιώματα* bei Proklus, *communes animi conceptiones* in der Geometrie des Boetius und bei Campano, *communes sententiae* bei Zamberti; in der Arithmetik, 231, 7 des Boetius lesen wir aber: „quae quasi *axiomata* Graeci vocant"). Bei Boetius nun finden wir 5 Postulata: 1) eine gerade Linie zu ziehen; 2) eine solche zu verlängern; 3) einen Kreis zu beschreiben. 4) Alle rechten Winkel sind gleich. 5) Wenn zwei Gerade von einer dritten so geschnitten werden, dass die Summe von zwei inneren Winkeln an derselben Seite der Schneidenden kleiner ist als zwei Rechte, so schneiden

sich die Geraden auf dieser Seite. Die letztgenannten Postulate 4) und 5) nun pflegen wir zu den Axiomen zu rechnen, und ersteres als das 10[te], letzteres als das 14[te] Axiom anzusehen. Nun haben bis auf Candalla, K. 313, 316, alle auf die von Theon aus Alexandrien im vierten Jahrhundert n. Chr. veranstaltete Ausgabe des Euklid basirten lateinischen Uebersetzungen desselben, auch Campano und Zamberti, 4) und 5) unter den Postulaten, nach Gregori in Uebereinstimmung mit einigen Handschriften, K. 285, doch muss es unter letzteren auch solche gegeben haben, bei denen 4) und 5) sich unter den Axiomen befanden, denn unter diesen stehen sie (durch eine Randbemerkung wird freilich bezweifelt, dass sie überhaupt Axiome seien), der jetzt üblichen Anordnung entsprechend in der Baseler Ausgabe B, auffallender Weise. Absichtlich sage ich: auffallender Weise; denn aus dem gerade dieser Ausgabe beigefügten Commentare des Proklus ersehen wir, dass dieser nicht anders wusste, als dass Euklid 4) und 5) allerdings unter die Postulate stelle. Proklus führt dieselben Postulate und in derselben Reihenfolge auf wie Boetius, nämlich 1) — 3) auf III, 51 letzte — III 52 erste Zeile (sie sind freilich nicht wie die übrigen durch besonderen Druck hervorgehoben), 4) auf III, 52, 5) auf III, 53. Dann folgen bei Boetius die Axiome, wenn auch nur 1), 3), 2), 8), namentlich fehlt das in der Arithmetik doch erwähnte Axiom 12) der gewöhnlichen Anordnung, die wir auch in der Baseler Ausgabe, in welcher 12) durch eine Randbemerkung als überflüssig bezeichnet wird, finden. Die gleiche Reihenfolge finden wir bei Proklus III, 54; doch fehlt hier bei diesem das die Congruenz betreffende, welches erst III, 55, ebenfalls durch den Druck nicht hervorgehoben, erscheint. Das 1[te] Axiom lautet nun bei Euklid: *Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα*, und in der Lachmann'schen Ausgabe lautet die Uebersetzung des Boetius, F. I. 379: „quae eidem sunt aequalia, et sibi invicem sunt aequalia", in der Friedlein'schen, 378, 1—2 aber, an Ausdrücke der Feldmesser lebhaft erinnernd: „Cum *spatia et intervalla* eidem sunt aequalia, et sibi invicem sunt aequalia". Es ist also hier der abstracte, rein logische, Ausspruch des Euklid, in concreter Form dargestellt. Wenn es nun also durch das Zeugniss des Proklus auch gerechtfertigt ist, dass Boetius den obigen Satz 4) und 5) unter die Postulate aufnimmt (aus den Anmeldungen zu Heron 245, 246 glaube ich folgern zu müssen, dass auch der von Peyrard benutzte älteste Codex *a* die gleiche Zahl und Reihenfolge der Postulate hat), so war dies Verfahren doch schon damals nicht unangefochten. Ausführlich setzt Proklus, III, 50—51, die verschiedenen Ansichten von Aristoteles, Geminus, u. a. über den Unterschied von *αἴτημα* und *ἀξίωμα* aus einander und tadelt schliesslich hier und IV, 95 den *στοιχειωτής* Euklid bitter, dass er 4) und 5) unter die Postulate stelle, da doch ersteres ein Axiom, letzteres ein zu beweisender Satz sei. Sollte nun dem logisch gebildeten Boetius, dem Bearbeiter

mehrerer logischer Schriften nach Aristoteles, kein Bedenken über das Missliche dieser Anordnung aufgestiegen, sollte ihm der wichtige Commentar des berühmten Neu-Platonikers Proklus unbekannt geblieben sein, ihm, der doch seine hauptsächliche geistige Nachahmung aus griechischen Werken zog, C. 179; sollte er kein Wort der Erklärung hinzuzufügen für geboten erachtet haben? — An die Axiome, oder communes animi conceptiones reiht Boetius sogleich die Definitionen Buch II, 1, 2, III, 1—11, unter welchen die 2te unklar, die 7te und 8te umgestellt, und endlich IV, 1, 6. Dann folgen die 48 Lehrsätze und Aufgaben von E. I., unter denen 5, 7, 9, 22, 29, 30, 45 theils falsch, theils unklar wiedergegeben sind; in der Lachmann'schen Ausgabe sind sie meist eingeklammert oder fehlen gänzlich. Unter diesen Sätzen befindet sich auch der Pythagoräische; den Namen des Pythagoras suchen wir hier sowohl, als an irgend einer der vielen Stellen, an welchen Boetius dieses Theorem anwendet, vergebens; gleichgiltig, ohne irgend welche Bemerkung, zählt er dasselbe in der Reihe der übrigen mit auf, und wendet sich dann zur Uebersetzung von E. II, 1—14 mit Ausnahme von 2, 7, 8, 13. Das nun folgende Stück der Boetius'schen Uebersetzung ist, wie dies auch Friedlein Praef. VII von den letzten Worten sagt (in der Lachmann'schen Ausgabe ist es fast ganz eingeklammert), offenbar verdorben, denn es ist völlig unverständlich; es enthält, 387, den Anfang von E. III, 3, vermengt mit feldmesserischen Dingen, wie das Wort „comportionales" zeigt, den Anfang von E. III, 9, ferner einige Zeilen 387, 18—20, welche auf der folgenden Seite 388, 16—18 wiederkehren, u. a.; endlich folgen die Sätze und Aufgaben von E. III, 22, 26, 30, 31, 32, E. IV, 1, 2, 3, 6, 8, 12, 11. Die Beweise fehlen allenthalben und wir erhalten nur den Wortlaut der Lehrsätze und Aufgaben in der Uebersetzung; dass dieselbe an manchen Stellen, z. B. 389, 3—16, etwas sonderbar klingt, hat schon Kästner, 286, bemerkt. Nach diesem Stücke des Euklid nun, denn auf mehr erstreckt sich die Uebersetzung nicht, fährt Boetius fort 389, 18—23: „Supra positarum igitur speculationibus figurarum ab Euclide succincte obscureque prolatis et a nobis verbum videlicet de verbo exprimentibus strictim translatis, quaedam iteranda repetendaque, ut animus lectoris non obscuritate deterreatur, sed a nobis potius alicujus exempli luce infusa delectetur, videntur." Diese Worte nun geben in mehrfacher Beziehung Veranlassung zum Nachdenken. Hier mag zunächst nur darauf aufmerksam gemacht werden, dass Boetius hier selbst sagt, er habe im Bisherigen den Euklid wörtlich übersetzt, *„a nobis verbum videlicet de verbo exprimentibus strictim translatis"*. Euklid aber, fährt er fort, habe seine Speculationen zu kurz und dunkel vorgebracht, er wolle daher Einiges von dem Früheren wiederholen, und erklären, d. h. also, er, Boetius, wolle die Erläuterung geben, *„a nobis* potius luce infusa delectetur". Es werden also zu dem Zwecke die drei ersten Constructions-Aufgaben des Euklid wieder auf-

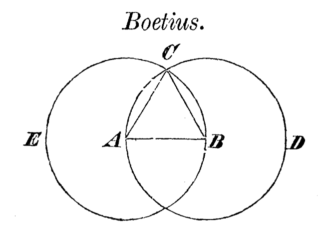
genommen und Construction und Beweis gegeben. Dazu sagt Boetius, 390, 8—9: „Qua de re hujus exempli notam subjecimus" in Bezug auf die Aufgabe 1, ferner 391, 4—6: „Sed *nos* . . . explanationem . . . patefacimus" in Bezug auf die Aufgabe 2, und, 392, 8—11: „*Nos* vero . . . hujus descriptionem formulae subjecimus" in Bezug auf die Aufgabe 3. Es unterliegt also auch nicht dem mindesten Zweifel, dass Boetius behauptet, die Constructionen und Beweise, wie sie nun folgen, habe er gegeben. Welcher Art sind dieselben nun? Damit man sich darüber ein Urtheil verschaffe, stelle ich die Construction und den Beweis von Euklid I, 1 nach der Baseler Ausgabe und nach Boetius neben einander. Es ist die Aufgabe, ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen, dessen Seitenlänge gegeben ist.

Euklid.



Ἔστω ἡ δοθεῖσα πεπερασμένη, ἡ αβ, δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς αβ εὐθείας τρίγωνον ἰσόπλευρον συνήστασθαι. Κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ, τῷ αβ, κύκλος γεγράφθω, ὁ βγδ. καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ β διαστήματι δὲ τῷ βα, κύκλος γεγράφθω, ὁ αγε, καὶ ἀπὸ τοῦ γ σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπὶ τὰ α β σημεια, ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι, αἵ γα, γβ. ἐπεὶ τὸ α σημεῖον, κέντρον ἐστὶ τοῦ γδβ κύκλου, ἴση ἔστιν ἡ αγ τῇ αβ. πάλιν ἐπεὶ τὸ β σημεῖον, κέντρον ἐστὶ τοῦ γαε κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ βγ τῇ βα. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ γα τῇ αβ ἴση. ἑκάτερα ἄρα τῶν γα, γβ τῇ αβ ἐστὶν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα. καὶ ἡ γα ἄρα τῇ γβ ἐστὶν ἴση. αἱ τρεῖς ἄρα αἱ γα αβ βγ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον, καὶ συνέσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς αβ. ὅπερ ἔδου ποιῆσαι.

Boetius.



Sit data recta linea terminata AB. Oportet igitur super eam, quae est AB, triangulum aequilaterum constituere et centro quidem A spatio vero B circulus scribatur $BCED$ et rursus centro B spatio autem A circulus scribatur $AFCD$ et ab eo puncto, quod est C, quo se circuli dividunt, ad ea puncta, quae sunt A, B adiunguntur rectae lineae CA, CB. Quoniam igitur A punctum centrum est $BCED$ circuli, aequa est AB ei, quae est AC. Rursus quoniam B punctum est centrum $ACFD$ circuli, aequa est AB ei, quae est BC. Sed et AB ei, quae est CA, aequa esse monstrata est. Et AC igitur ei, quae est BC, erit aequalis. Tres igitur, quae sunt CA, AB, BC, aequae sibi invicem sunt. Aequilaterum igitur est CAB triangulum et constitutum est supra datam rectam lineam terminatam eam, quae est AB; quod oportebat facere.

Jeder nun, glaube ich, der beide Darstellungen mit einander vergleicht, die Construction und den Beweis des Euklid, und den Commentar, welcher von Boetius, nach seiner eigenen Behauptung, herrühren soll, wird mir beistimmen, wenn ich sage, dass dieser angebliche Commentar des Boetius nichts Anderes ist als eine wörtliche Uebersetzung des Euklid, wie schon Lachmann bemerkt hat, F. II, 93; eine einzige geringe Aenderung findet sich gegen das Ende hin, da Euklid auf das erste Axiom zurückkommen will; sonst aber stimmt griechischer und lateinischer Text überein bis auf die Partikeln. Genau ebenso, vielleicht noch in die Augen fallender, verhält es sich mit dem angeblichen Commentar des Boetius zu Aufgabe 2 und 3 von Euklid I. Boetius also sollte die Beweise Euklid's für seinen eigenen Commentar ausgeben? Das wäre gewiss ebenso wunderbar, als dass er von Euklid nur den Wortlaut der Lehrsätze und Aufgaben übersetzt, oder vielmehr noch wunderbarer. Denn letzteres lässt sich erklären. Da nämlich viele, wenn nicht die meisten, der im 16. Jahrh. bekannt werdenden Manuscripte des Euklid den Zusatz im Titel trugen: „ἐκ τῶν Θέωνος συνουσιῶν", so bestanden, K. 249, wie Savilius in einer 1620 herausgegebenen Schrift erzählt, drei Ansichten: die Einen, „homines stulti et perridiculi" (nach Savilius) schrieben die Sätze dem Euklid, die Beweise dem Theon zu, vergl. K. 353, Andere hielten den Theon, und wieder Andere den Euklid für den Urheber von Sätzen sowohl als Beweisen. Und in der That, betrachten wir die Doppelausgabe des Campano und Zamberti vom Jahre 1537, so finden wir bei jedem Lehrsatze oder jeder Aufgabe die Ueberschrift: *Euclides* ex Campano, resp. Zamberto, bei den Beweisen und Constructionen aber bei Campano's Uebersetzung die Ueberschrift: *Campanus*, bei der Zamberti'schen: *Theon* ex Zamberto. Wir sehen also — auf Campano's Uebersetzung aus dem Arabischen kommt es hier nicht an — nach der Ansicht des Herausgebers der Uebertragung von Theon's Euklid durch Zamberti sind *Lehrsätze und Aufgaben* von *Euklid*, *Beweise und Constructionen* aber von *Theon*. Beides übersetzt Zamberti. Sollte nun Boetius zu diesen „homines stulti et perridiculi" gehören, die da meinten, Euklid habe nur die Sätze und Aufgaben gegeben, die Beweise seien von Theon? Es scheint allerdings so, denn er übersetzt ja nur den Wortlaut der ersteren. Aber konnte schon zur Zeit des Boetius eine solche Ansicht Platz gegriffen haben? Proklus weiss nichts davon, dass die Beweise zu Euklid's Lehrsätzen und Aufgaben von einem Anderen herrührten, sondern spricht z. B. III, 51, III, 75 davon, dass Euklid den Beweis führe; den Theon erwähnt er überhaupt gar nicht, was sicherlich nicht unterblieben wäre, wenn dieser irgend etwas Bemerkenswerthes in Bezug auf Euklid geleistet hätte. Sollte nun, muss ich wieder fragen, der so hoch geachtete Proklus und sein Commentar dem Boetius unbekannt geblieben sein? Sollte Boetius der erste oder einer der ersten jener „ho-

mines stulti et perridiculi" gewesen sein, die da meinten, Euklid habe die Sätze, Theon die Beweise gegeben? Sollte nicht vielmehr die Entstehung dieser Annahme in eine spätere Zeit, in der die Wissenschaften noch tiefer gesunken, die Kenntniss der griechischen Sprache und Litteratur geschwunden war, zu suchen sein? Und endlich, was das Wichtigste, sollte Boetius, wenn er wirklich der Meinung war, die Beweise rührten nicht von Euklid, sondern von Theon oder irgend einem Anderen her, dieselben für seine eigenen ausgegeben haben? — Auf Weiteres als die drei ersten Aufgaben einzugehen, hält Boetius nicht für nöthig, denn er sagt 393, 1—5: „His jam compendiosis, et tamen hujus artis rudibus pernecessariis introductionibus lector initiatus si in aliquibus superius propositis vacillando abhorreat, per se similes figurarum descriptiones sine omnis impedimenti reclamatione adinvenire potest et componere". Nachdem also Boetius den Leser so eingeweiht, überlässt er es ihm, sich selbst weiter zu helfen, und „similes figurarum descriptiones . . adinvenire et componere". Wie dieser das anfangen soll, ob er Beweise und Lösungen der Aufgaben selbst finden soll, oder was wir sonst darüber zu denken haben, darüber bleiben wir völlig im Ungewissen. Zugleich aber geht aus den soeben citirten Worten hervor, dass in der That, worauf auch die dem Euklid vorangestellte Definition von „mensura" hindeutete, diese Commentirung des Euklid nicht der Hauptzweck dieser Schrift sein kann, denn das Bisherige wird ja ausdrücklich nur für die zum Verständniss des nun Kommenden sehr nothwendige Einleitung („pernecessariis introductionibus") erklärt; die Hauptsache also haben wir erst noch zu erwarten. Gehen wir daher nach Beendigung des Euklid zum Folgenden über.

Boetius also fährt fort 393, 6: „Sed jam tempus est ad geometricalis mensae traditionem ab Archita, non sordido hujus disciplinae auctore, Latio accommodatam venire, si prius praemisero, quot sint genera angulorum et linearum et pauca fuero praelocutus de summitatibus et extremitatibus". Es soll also (die Besprechung des Archytas verspare ich auf das Folgende) Einiges über Winkel, Linien und Flächen folgen. Nun möchten wir wohl der Meinung sein, das sei ja in dem bisher mitgetheilten Stücke des Euklid bereits enthalten, Boetius aber ist anderer Ansicht, und giebt 393, 12—32; 394, 16—32 die Definitionen von rechtem, spitzem und stumpfem Winkel, von gerader Linie und Fläche, sowie die Erklärung einiger Feldmesserausdrücke augenscheinlich nach den römischen Feldmessern, Balbus ad Celsum, F. I. 100—101, 99—100, 98. Weshalb Boetius das von Euklid Vorgetragene nicht für genügend hält, ob er nicht bemerkt hat, dass die von Balbus gegebene Eintheilung der Winkel dieselbe ist, wie die von Euklid gegebene, dass namentlich die von Balbus F. I. 100, 9—101, 2 entlehnte Definition des Rechten dieselbe ist wie die von ihm selbst früher 374, 12—17 nach Euklid gegebene, dass Balbus nur

den stumpfen Winkel „hebes", nicht „obtusus" nennt, dass blos in einigen Bezeichnungen, vorzüglich bei der Erklärung der Geraden und der Ebene die Worte des Balbus von seinen eigenen (nach Euklid) abweichen[4]), dass offenbar Balbus ebenfalls, mittel- oder unmittelbar aus Euklid geschöpft hat, ob also Boetius dies nicht bemerkt, oder ob er gleichwohl die genannten Definitionen wiederholen zu müssen geglaubt hat, darüber bleiben wir wieder im Dunkeln.

Wenden wir uns also zu der angekündigten „geometricalis mensae traditio", auf welche Boetius nun übergeht mit den Worten 395, 2: „Nosse autem hujus artis dispicientem, quid sint digiti, quid articuli . . . oportet". Es folgt also die Erklärung von „digitus", „articulus" etc., die Besprechung des Abacus, und die Regeln über Multiplication und Division. Wenn nun, C. 227—229, Einige bemerken, diese ganze Anweisung zum Rechnen gehöre nicht in die Geometrie, so machen Andere dagegen den praktischen Gesichtspunkt geltend, und halten dafür, dies sei zulässig, weil nun Rechenaufgaben, auf Gegenstände der Geometrie angewandt, folgten. Und in der That, wir müssen offenbar in diesem Abschnitte ebenso wie in dem früheren, den Euklid enthaltenden, nur ein Mittel erkennen, durch welches das Verständniss des Hauptinhaltes, über welchen wir freilich etwas Sicheres immer noch nicht wissen, vorbereitet werden soll. In dieser Hinsicht und zu diesem Zwecke nun mögen wir ein, immerhin nicht wissenschaftliches, Einschieben von Rechenregeln, obgleich z. B. die römischen Agrimensoren ein solches nicht für nöthig erachteten, uns gefallen lassen, wir müssen aber erwarten, dasselbe geschehe wenigstens so, dass dieser praktische Zweck auch erreicht werde, wir müssen verlangen, die gegebenen Regeln seien vollständig und deutlich. Ersteres nun sind die von Boetius mit-

4) Der Punkt, bei Euklid „σημεῖον", heisst bei Balbus (und Zamberti) „*signum*", doch findet sich auch bei Balbus, z. B. F. I. 101, 15; 102, 1, 14 „*punctum*", in der Uebersetzung des Euklid durch Boetius „*punctum*" (in der des Campano „*punctus*"). Die Definition der Geraden lautet nach Boetius' Uebersetzung des Euklid 374, 5—6: „Recta linea est, quae aequaliter in suis protenditur *punctis*", bei Balbus F. I. 99, 4—5: „recta linea est quae aequabiliter suis *signis* rectis posita est", hier bei Boetius nach Balbus 394, 3—5: „Recta linea itaque est, quae aequaliter in suis *signis* posita est, quae aequaliter in planitie posita non concurrit". Die Definition der Fläche lautet nach Boetius' Uebersetzung des Euklid 374, 6—9: „*Superficies* vero est, quod longitudine latitudineque censetur. *Superficiei* autem fines lineae sunt. Plana *superficies* dicitur, quae aequaliter in rectis suis lineis continetur", bei Balbus F. I. 99, 11—14: „*Summitas* est secundum geometricam appellationem quae longitudinem et latitudinem tantum modo habet, *summitatis* fines lineae. Plana *summitas* est quae aequaliter rectis lineis est posita", hier bei Boetius nach Balbus 394, 16—20: „*Summitas* est secundum geometricam appellationem, quae longitudine latitudineque protenditur. *Summitatis* autem fines lineae sunt. Plana vero *summitas*, quae aequaliter rectis lineis undique versum finitur".

getheilten nicht, denn es fehlt die Lehre vom Ausziehen der Quadratwurzel, deutlich aber sind die Anweisungen für die Multiplikation und Division gewiss ebenfalls nicht, vielmehr verfährt Boetius auch hier wie in seiner Uebersetzung des Euklid, er lässt den Leser gerade da im Stiche, wo er einer Nachhilfe am meisten bedarf. Ja, hier in dem Abschnitte über das Rechnen verwirrt er ihn vollends, und noch dazu ohne alle Ursache. Denn, wenn die Einen behaupten, diese ganze Stelle gehöre weit eher in die Arithmetik des Boetius als in die Geometrie, und Andere dagegen betonen, jene enthalte nur Speculationen über die Natur der Zahlen, sie sei eine Art Zahlenlehre und mithin etwas von der Logistik oder gewöhnlichen Rechenkunst ganz Verschiedenes, so haben gewiss die Letzteren Recht, ebenso sicher aber ist es auch, dass gerade Boetius selbst Zahlenlehre und Logistik hier nicht streng auseinander hält, sondern beide vermengt, und dadurch den Leser verwirrt. Auf diesen Punkt nun muss ich, indem ich die Abacus-Stelle als solche absichtlich unberührt lasse, des Folgenden wegen genauer eingehen. Nichts kann dem den betreffenden Abschnitt der Geometrie Ueberblickenden natürlicher erscheinen, als dass Boetius hier, 395, 12—16, zwei Arten von Zahlen unterscheidet, „incompositi“ und „compositi“, und dass er unter ersteren die Zahlen 1, 2, 3 ... 9, ferner 10, 20, 30, ..., unter letzteren die zwischen ihnen liegenden, wie 11, 12, .. 21, 22, .. 31, versteht. Denn erstere erfordern (Boetius freilich giebt den Grund nicht selbst an), C. 208—209, zur Darstellung auf dem Columnen-Abacus, falls man sich der von ihm bald darauf besprochenen „Apices“ bedient, nur e i n e Marke, welche, je in die Columne I, X, C, etc. gesetzt, die zu bezeichnende Zahl angiebt, letztere aber machen zur Darstellung die Anwendung m e h r e r e r Marken nöthig, z. B. 23 die der 2 und die der 3. Das Alles also ist verständlich genug. Indem aber Boetius wenige Zeilen weiter, 395, 25—396, 6 mit den Worten beginnend: „Priscae igitur prudentiae viri Pythagoreum dogma secuti, Platonicaeque auctoritatis investigatores speculatoresque curiosi totum philosophiae culmen in numerorum vi constituerunt“ etc. Ansichten entwickelt, welche offenbar an das Prooemium zur Arithmetik 11, 10; 12, 1—12; 10, 28—11, 6 erinnern sollen, und wenn er sich dabei ausdrücklich auf seine Arithmetik beruft, 396, 5, muss dann nicht dem Leser beifallen, dass ja gerade in der Arithmetik des Boetius der „incompositus“ und „compositus“ numerus etwas ganz Anderes bedeutete? In der Arithmetik, 30—37, nämlich unterscheidet Boetius drei Arten des „inpar numerus“; der eine ist der „numerus primus et *incompositus*“ („Dicitur autem primus et incompositus, quod nullus eum alter numerus metiatur praeter solam, quae cunctis mater est, unitatem“, 30, 26—28), dies sind die Primzahlen 1, 3, 5, 7, etc.; der zweite ist der numerus „secundus et *compositus*“, dies sind die aus dem Produkte der ungeraden Primzahlen entstehenden Zahlen

9, 15, 21 etc.; die dritte Art ist der numerus „qui per se quidem secundus et compositus, sed ad alios comparatus primus et incompositus invenitur", dies sind die ungeraden, relativen Primzahlen. Durch seine Berufung auf die Arithmetik also muss Boetius selbst den Leser irre machen, denn derselbe wird fragen, warum denn hier dieselben Worte in anderer Bedeutung gebraucht worden seien. Doch damit nicht genug. Indem Boetius den Gebrauch des Abacus erläutern, und erklären will, welchen Werth die verschiedenen, mit den natürlichen Zahlen versehenen Apices erhalten, je nachdem sie in die eine oder andere Columne gesetzt werden, sagt er 397, 15: „Hos enim apices ita varie ceu pulverem dispergere in multiplicando et in dividendo (alii) consuerunt, ut si sub unitate *naturalis numeris ordinem*, jam dictos characteres adjungendo, locarent, non alii, quam digiti nascerentur. Primum autem numerum, id est binarium, unitas enim, ut in arithmeticis est dictum, numerus non est, sed fons et origo numerorum, sub linea X inscripta ponentes XX . . . assignare constituerunt". Wir hören also: Die Apices, in die Colonne I gesetzt, geben die Einer, wir erfahren ferner, die 2, 3, 4, etc. in die Spalte X gesetzt, bezeichnet 20, 30, 40, etc., in die Spalte C gesetzt, 200, 300, 400, etc. Was aber aus der Eins wird, wenn diese in die Spalte X, C etc. gesetzt wird, ja, ob es überhaupt gestattet ist, sie in eine andere Columne als die der I zu setzen, darüber bleibt der Leser völlig im Ungewissen, denn die 2 ist ja die erste Zahl, die 1 aber ist keine Zahl, sondern nur die Quelle und der Ursprung der übrigen, wie in der Arithmetik gezeigt sei. Letzteres nun, wenn auch nicht mit denselben Worten, hat Boetius oft genug in der Arithmetik, z. B. an der obigen Stelle, 30, 26—28, ausgesprochen; aber wo hat er in derselben behauptet, die 1 sei keine Zahl, und komme daher in der Reihe der natürlichen Zahlen *(„naturalis numeri ordinem")* nicht in Betracht, zähle nicht mit? Cantor, C. 190, 403, Note 385, bezieht sich hiefür auf eine Stelle der Arithmetik des Boetius. Dieser hat nämlich in derselben, wie erwähnt, u. a. auch die an das Geometrische streifende Theorie der figurirten Zahlen behandelt, und sagt am Anfange dieses Abschnittes 86, 11: „Nunc autem nobis de his numeris sermo futurus est, qui circa figuras geometricas et earum spatia demensionesque versantur, id est de linearibus numeris et de triangularibus vel quadratis ceterisque, quos sola pandit plana demensio", er sagt ferner, 87, bei dieser Betrachtung wolle er statt der sonst üblichen Zahlzeichen, „signa", I, II, . . . V etc. (die Apices werden in der Arithmetik nirgends erwähnt oder auch nur angedeutet) sich der Striche, „virgulae", bedienen, und in diesem Zusammenhange schreibt er dann die von Cantor angezogenen Worte 90, 6: „Sic etiam in numero unitas quidem, cum ipsa linearis numerus non sit, in longitudinem tamen distenti numeri principium est". Er behauptet daher hier offenbar keineswegs, die Eins sei keine Zahl über-

haupt, sondern nur, sie sei keine lineare Zahl. Für die Ansicht aber, die Eins sei überhaupt keine Zahl, vermag ich in der ganzen Arithmetik nur eine einzige Stelle zu finden, aus der sie entnommen werden könnte, es ist die oben citirte 117, 1—12, an welcher er erklärt, warum er das ἑτερομήκης des Nicomachus durch „parte altera longior" wiedergiebt, wobei er sich auf die Natur des „Alterum" und der „Alteritas" stützt. In dieser Stelle, welche man nochmals nachlesen möge, kommen die Worte vor: „Binarius autem, numerus primus, est unitati dissimilis, idcirco quod primus ab unitate disjungitur". Diese könnten nun so verstanden werden, als ob Boetius die 2 für die erste Zahl gehalten wissen wollte. Allein einmal ist die ganze Auseinandersetzung keineswegs klar, sodann soll der Sinn jedenfalls der sein, die 2 sei die erste von 1 verschiedene Zahl, und die erste, der die „Alteritas" zukomme. Dass dies der Sinn ist, geht aus mehreren anderen Stellen hervor, welche dasselbe aussagen, wie 117, 1—12. Wir lesen nämlich 123, 4: „Et illam primam inmutabilem naturam unius ejusdemque substantiae vocant, hanc vero alterius, scilicet quod a prima illa inmutabili discedens *prima sit altera,* quod nimirum ad unitatem pertinet et ad dualitatem, qui numerus *primus ab uno discedens* alter factus est", und ebenso 132, 23: „Constat igitur primo quidem loco unitatem propriae inmutabilisque substantiae ejusdemque naturae, *dualitatem* vero *primam alteritatis* mutationisque *esse principium*". Wir haben es ferner an der betreffenden Stelle der Geometrie nicht mit zahlentheoretischen und transcendentalen Speculationen und nicht mit figurirten Zahlen, sondern mit Logistik und der Reihe der natürlichen Zahlen *(„naturalis numeri ordinem")* zu thun, und hier muss, wenn nicht die heilloseste Verwirrung entstehen soll, wovon sich im Folgenden ein Beispiel zeigen wird, die Eins stets als Zahl gelten, wie schon Xylander 1556 richtig bemerkt, K. 281. Während also hier, in der Geometrie bei der Erklärung, was aus den natürlichen Zahlen wird, wenn sie in die Spalte der X, C etc. gesetzt werden, Boetius mit der Zwei anfängt, die Eins aber nicht mitzählt, und dies unter Berufung auf seine Arithmetik damit rechtfertigt, dass er hinzusetzt: „Primum enim numerum id est binarium, unitas enim, ut in arithmeticis est dictum, numerus non est", hat Boetius in seiner Arithmetik in der Reihe der natürlichen Zahlen, auf die es, wie gesagt, hier allein ankommt, die Eins stets mitgezählt, so 47, 28: „Ponatur enim *naturalis numerus* hoc modo: I, II, III...", ebenso 50, 8, 10, desgl. 94, 6—9, wo nach Aufstellung der Reihe der natürlichen Zahlen die Worte folgen: „Ex his si *primum* (numerum) sumam, *id est unitatem*", ferner 96, 8—9, ferner 113, 9—10, ferner 115, 22, endlich 140, 23—25. Die Anzahl solcher Stellen würde sich leicht noch vermehren lassen, ich habe jedoch nur die schlagendsten angeführt. Wenn Boetius daher hier in der Geometrie die Eins nicht mitzählt, so vermengt

er gerade Zahlen-Speculation und Zahlen-Theorie mit Logistik und gemeinem Rechnen, und wenn er selbst sich noch dazu auf seine „arithmetica“ beruft, in welcher er durchgehends anders verfährt; und die 1 mitzählt, so ist dies ein geradezu unbegreiflicher Widerspruch. Doch ich verlasse diese Stelle, auf welche ich weiter unten noch einmal zurückkommen muss und wende mich zum nun beginnenden Buch II der Geometrie.

Der Anfang desselben lautet 401, 4: „Superiore vero tractatu voluminis omnia geometricae artis theoremata quamvis succincte tamen sunt dicta, sed podismorum notitiam hic liber . . . absolvet“. So erfahren wir denn, C. 189, dass das erste Buch nur die Grundsätze, „theoremata“, d. h. die für das Verständniss der „geometrica ars“ nothwendigen Lehren enthalten hat, und dass wir nunmehr hier zur Hauptsache, zu den „podismi“, d. h. zur Berechnung der Flächen, kommen. Freilich noch nicht sogleich, die Vorbereitungen sind noch nicht zu Ende, denn erst müssen noch die Feldmesser-Ausdrücke „striga“ und „scamnum“ erklärt werden, dann folgt die Angabe der Masse nach Balbus, F. I. 94—96; auch einige andere Gegenstände werden noch erörtert, und die im Anfange der Geometrie gegebene, wie Boetius hier sagt, allgemeine Definition von „mensura“ durch die specielle von Balbus (Boetius nennt aber Frontin) F. I. 94: „Mensura quippe est conplurium et inter se aequalium intervallorum longitudo finita“ ersetzt; auch das Uebrige, was wir hier, 403, lesen, erinnert an Balbus.

Nun also folgt der Podismus, die Flächen-Berechnung, und gewiss erwartet Jeder, das Quadrat werde den Anfang machen, da doch alle Flächen-Berechnung auf die des Quadrates sich stützt, und die Grösse aller Flächen in Quadrat-Metern, Quadrat-Fussen u. s. w. angegeben wird. Boetius aber ist anderer Ansicht, und beginnt mit dem — Dreieck. Nicht etwa, wie man vielleicht denken könnte, weil er in der Arithmetik 91, 10—14 gesagt hat, jedes reguläre Polygon lasse sich durch Gerade vom Mittelpunkte nach den Ecken in Dreiecke zerlegen und Triangularzahlen seien deshalb zuerst zu behandeln, 92, 5—10 und „omnium formarum principium elementumque esse triangulum“, 104, 12, nicht also aus diesem Grunde, sondern weil die 3 der 4 und den übrigen Zahlen vorangeht, 404, 4: „Et de trigonis vero, qui, sicut ternarius naturaliter procedit quaternarium, ita sunt praeponendi tetragonis et pentagonis caeterisque, inprimis dicendum esse censeo“. Beginnen wir also die Flächen-Berechnung, da Boetius es so will, mit dem Dreieck. Wer aber erwarten wollte, es werde, wie es am nächsten liegt, wenigstens das rechtwinklige den Anfang machen, der würde sich abermals täuschen. Denn es hat zwar schon Euklid die Dreiecke naturgemäss nach zwei von einander verschiedenen Gesichtspunkten, dem Verhältnisse der Seiten und der Grösse der Winkel, eingetheilt, und in ersterer Hinsicht gleichseitige, gleichschenklige und ungleichseitige, in

letzterer rechtwinklige, stumpfwinklige und spitzwinklige unterschieden; Boetius aber erkennt nicht, dass beide Eintheilungs-Principien einander nicht ausschliessen, dass ein gleichschenkliges oder ein ungleichseitiges Dreieck auch zugleich recht-, stumpf- oder spitzwinklig sein kann, und glaubt sich in Uebereinstimmung mit Euklid, 408, 7; 413, 12; 414, 17, wenn er, zugleich die Reihenfolge angebend, in welcher sie behandelt werden sollen, sechs Arten von Dreiecken unterscheidet, 404, 9, 1) gleichseitige, 2) gleichschenklige, 3) ungleichseitige, 4) rechtwinklige, 5) stumpfwinklige, 6) spitzwinklige, ähnlich, wie wir dies bei Epaphroditus, A. 209, § 10, finden, dessen Schriften an das Licht gezogen zu haben das hoch zu schätzende Verdienst Cantor's ist. Es wird also zuerst das gleichseitige Dreieck berechnet, 404—406, und zwar wird die Rechnung auf zwei ganz verschiedene Weisen ausgeführt. Da jede an einem anderen Zahlenbeispiele gezeigt wird, tritt der bedenkliche Umstand, dass man bei demselben Beispiele verschiedene Resultate für die Fläche erhält, je nachdem man das eine oder das andere Verfahren anwendet, A. 157—158, 174—175, nicht hervor, jedenfalls deutet Boetius auf keine Weise darauf hin. Die erste Methode, angewandt auf ein Dreieck mit der Seitenlänge 30, lautet so: Die Höhe wird in runder Zahl als 26 angenommen; sie ist offenbar nach dem Pythagoreïschen Lehrsatze berechnet, wie aus demselben Beispiele bei Epaphroditus, A. 208, § 3, hervorgeht, während bei Boetius die Angabe der Rechnung fehlt. Da aber auch die Höhe $\frac{30\sqrt{3}}{2}$ ist, so ist $\sqrt{3} = \frac{26}{15}$ gesetzt, also ist die Fläche $= \frac{1}{4} \cdot 30^2 \cdot \frac{26}{15} = \frac{1}{4} \cdot 30^2 \left(2 - \frac{4}{15}\right) = \frac{30^2}{2} - \frac{30^2}{15} = \frac{30^2}{2} - 2 \cdot 30 = 30^2 - \frac{30^2}{2} - 2 \cdot 30 = 30^2 - 15 \cdot 30 - 2 \cdot 30 = 30^2 - 17 \cdot 30 = 30^2 - 510$. Boetius also zieht, ohne diese Zwischenrechnung zu erwähnen, 510 von 900 ab. Auf ein zweites Beispiel, an welchem die andere Methode gezeigt wird, und welches sich ebenso bei Epaphroditus, A. 210, § 15 findet, komme ich später zurück. Nur das sei bemerkt, dass weder hier noch im Folgenden bei Gelegenheit des Pythagoreïschen Satzes der Name seines Erfinders mit irgend einem Worte, mit der geringsten Andeutung, erwähnt, ja, dass nicht einmal darauf hingewiesen ist, es komme hier einer der aus Euklid übersetzten Sätze zur Verwendung. So vermissen wir Beides auch bei dem gleichschenkligen Dreieck, 406—407, bei welchem wie bei Epaphroditus, A. 209, § 11 (nur steht bei letzterem in den Zahlen 576, 168 G statt V), aus Grundlinie und Schenkel die Höhe und dann hieraus die Fläche findet. Nun kommt, 407—408, das ungleichseitige Dreieck an die Reihe, und zwar sind, wie bei Epaphroditus A. 209, § 13 die Seiten desselben 15, 20, 25. Es wird zunächst nach der Regel $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$ ein Abschnitt auf der

Grundlinie 25, dann nach dem Pythagoräischen Satze die Höhe und endlich die Fläche berechnet. Offenbar hat Boetius so wenig als Epaphroditus (letzterer bezeichnet dieses Dreieck ausdrücklich als „oxigonium“) bemerkt, dass ein Dreieck mit den Seiten $15 = 3 \cdot 5$, $20 = 4 \cdot 5$, $25 = 5 \cdot 5$ zugleich ein rechtwinkliges ist, denn die Betrachtung der rechtwinkligen Dreiecke soll ja erst noch kommen. Obschon er also dieses Dreieck augenscheinlich für nicht-rechtwinklig hält, nimmt Boetius doch keinen Anstand, ein Dreieck mit denselben Seiten einige Blätter weiter, 411—412, als Beispiel eines rechtwinkligen anzuführen. Nach dem ungleichseitigen Dreieck nun, und nachdem der Pythagoräische Satz, also das rechtwinklige Dreieck, bereits drei Mal zur Anwendung gelangt ist, geht Boetius erst auf das rechtwinklige Dreieck über, und zwar, der Leser traut seinen Augen kaum, mit der Bemerkung 408, 9: „Quem (trigonum) nos ipso aditu difficiliorem ceteris obscurioremque esse arbitramur“. Das rechtwinklige Dreieck also, welches im Bisherigen schon 3 Mal stillschweigend benutzt, und dessen Berechnung der der übrigen zu Grunde gelegt ist, ist nach Boetius das schwierigste! Die Ursache davon ergiebt sich freilich sogleich aus dem Folgenden. Boetius wirft nämlich die oben erwähnten Regeln 1) und 2) des Pythagoras und Plato, die Seiten rechtwinkliger, rationaler Dreiecke anzugeben, Regeln, welche Nipsus klar und deutlich auseinandersetzt, in verworrener Weise zusammen mit der Aufgabe, ihre Fläche zu berechnen. Den Anfang macht, an zwei Beispielen erläutert, 408—409, die von einer geraden Zahl als Seitenlänge ausgehende Bildung und Berechnung eines rechtwinkligen Dreiecks. Bei dem einen dieser Dreiecke mit den Seiten 8, 15, 17 wird die Fläche fälschlich als 64 berechnet, obgleich bei demselben Beispiel Epaphroditus, A. 210, § 14, welcher doch dem Boetius vorliegt, 60 findet. Dass letzterer einige Seiten weiter die Fläche desselben Dreiecks mit Nipsus richtig als 60 annimmt, und sich dabei selbst darauf beruft, dass er dasselbe Dreieck schon früher behandelt habe, 412, 5—8, wird nach dem Bisherigen nicht mehr auffallen; das andere Beispiel, ein Dreieck mit den Seiten 6, 8, 10, findet sich bei Nipsus F. I. 300. Dann folgen, 409—410, zwei Beispiele für das rechtwinklige Dreieck, von einer ungeraden Zahl als Kathete ausgehend; das eine mit den Seiten 3, 4, 5 hat Nipsus, F. I. 300 (eine Zusammenstellung der Parallelstellen von Boetius, Nipsus und Epaphroditus findet sich A. 217, Note 250), bei dem anderen sind die Seiten 5, 12, 13. Die Namen derjenigen aber, welche diese Regeln 1) und 2) für die Bildung solcher rationaler Dreiecke aufgestellt haben, Pythagoras und Plato, die sowohl von Heron, 56—58, als auch von Proklus, IV, 111, als Entdecker derselben bestimmt genannt werden, suchen wir bei Boetius vergeblich, vielmehr wird, 408, 14—15, die Regel 2) dem Architas statt dem Plato zugeschrieben. Es folgt nun, freilich wieder unklar, weil Boetius sich dabei auf eine frühere

Aufgabe bezieht und nicht hervorhebt, dass das, was dort gegeben war, hier gesucht ist, 411, eine Aufgabe des Nipsus, F. I. 298—299, aus der Summe der beiden Katheten $s = 23$, der Hypotenuse $c = 17$, und der Fläche $F = 60$ die beiden Katheten a und b zu berechnen, indem die beiden Gleichungen $a + b = s$ und $a - b = \sqrt{c^2 - 4F}$ addirt werden, worauf a in die erstere substituirt wird. Boetius also entnimmt dieses Beispiel dem Nipsus und findet, wie dieser, die Katheten $a = 15$, $b = 8$, also dasselbe rechtwinklige Dreieck, dessen Fläche er selbst kurz zuvor als 64 (hier war $F = 60$) berechnet hat[5]). Hieran schliesst sich, 411—412, eine ähnliche, mit den Zahlenwerthen dem Nipsus, F. I. 297—298, entnommene Aufgabe (bei welcher Boetius freilich wieder zwei verschiedene durch einander wirft): aus der Hypotenuse (bei Nipsus fehlt, F. I. 297, 16 *hypotenusae* hinter oder vor *podismus*) $c = 25$ und der Fläche $F = 150$ die Katheten a und b eines rechtwinkligen Dreiecks zu berechnen. Dieses geschieht durch Addition der beiden Gleichungen $a + b = \sqrt{c^2 + 4F}$ und $a - b = \sqrt{c^2 - 4F}$ und nachherige Substitution des a in die erstere. Die Berechnung von $a + b$ wird von Nipsus und Boetius numerisch richtig ausgeführt, es ist $a + b = 35$. Zur Auffindung von $a - b$ sagt Nipsus: „facies hypotenusae numerum in se; fit 625, hinc tolle $4F$, et remanent 25, hujus . . . . fit 5". Hier ist bei Nipsus, F. I. 298, 7 eine Lücke, es fehlen hinter „hujus" die Worte „sumo latus", d. h. ich ziehe die Quadratwurzel, nämlich aus 25, und, sonderbar — gerade hier, wo Boetius an Nipsus keinen Anhalt hat (falls nämlich diese Lücke schon damals vorhanden war), verfährt er anders, denn er dividirt 25 durch 5 (*„Horum quinta pars differentiam tenet"*. 412, 15) und erhält so allerdings dasselbe Resultat, aber seine Rechnung ist offenbar sinnlos, er hat das Verfahren des Nipsus, obschon es bei dieser und der vorigen Aufgabe schon einmal angewandt ist, nicht verstanden. Doch damit nicht genug. Nachdem

5) Wenn Cantor, A. 131; 218 Note 251; 168, auf diese Stelle, 411, 9, des Boetius verweist, als führe der Text derselben zur Gewissheit, dass bei Nipsus irriger Weise *podismus* statt *hypotenusae podismus* stehe, so beruht dies auf einem Versehen, A. 105. Denn Nipsus behandelt u. a. zwei einander ähnliche Aufgaben, F. I. 297, 16 und F. I. 298, 12; Boetius aber kehrt diese Reihenfolge um und behandelt die letztere Aufgabe, als die leichtere, zuerst, auf die im Texte angegebene Weise. Der Fehler in Nipsus aber befindet sich nicht bei dieser, sondern bei der anderen Aufgabe, welche also bei Boetius, und daher auch im Texte, erst die folgende, 411—412, ist. Allein hier ist die Darstellung der Aufgabe von Seiten des Boetius, 412, 4 (nicht 411, 9) entsprechend F. I. 297, 16, so unklar, dass sie durchaus keinen Anhalt bietet zur Berichtigung dieses Schreibfehlers. Dass aber ein solcher vorliegt und die Länge der Hypotenuse 25 gegeben ist, ergiebt sich ohne allen Zweifel aus den ersten Worten der Auflösung bei Nipsus selbst, F. I. 298, welche Worte auch Boetius, 412, 5, gebraucht. Dieser aber ist weit davon entfernt, etwas zur Klärung und Berichtigung beizutragen, im Gegentheil, er bringt neue Fehler hinein.

Nipsus $a + b = 35$, $a - b = 5$ berechnet hat, fährt er fort: Man addire diese Werthe, so erhält man 40. Boetius aber sagt 412, 14: „Quam (die 5) si rursus duabus junctis summis *id est 20 et 15* adjeceris, 40 pernotabo", er nimmt also, obschon er doch hier das Verfahren des Nipsus vor Augen hat, die Katheten 20 und 15, welche erst gesucht werden sollen, und deren Summe und Differenz bisher erst berechnet ist, bereits als einzeln bekannt an, wieder ein augenscheinlicher Beweis, wie wenig er dem Gedankengang des Nipsus zu folgen vermocht hat. Das so gefundene rechtwinklige Dreieck aber mit den Seiten 15, 20, 25 ist dasselbe, wie das oben als Beispiel für das ungleichseitige, nicht-rechtwinklige benutzte. Bevor Boetius das rechtwinklige Dreieck verlässt, behandelt er, 412—413 noch eine Aufgabe, welche sich auch bei Epaphroditus A. 214, § 30 findet, nämlich die, den Durchmesser 2ϱ eines Kreises, der einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a, b, und der Hypotenuse c eingeschrieben ist, zu berechnen. Zieht man nämlich vom Mittelpunkte dieses Kreises nach den Ecken Gerade, so erhält man als Ausdruck für die Fläche $F = \frac{1}{2}(a + b + c)\varrho$; zieht man aber vom Mittelpunkte nach den Berührungspunkten Gerade, so erhält man für die Fläche $F = (a - \varrho)\varrho + (b - \varrho)\varrho + \varrho^2$. Setzt man beide Werthe für F gleich, so ergiebt sich sogleich die einfache Regel $2\varrho = a + b - c$. Diesen Satz also, welchen nach Boetius Architas, und schon vor ihm Euklid, gefunden, 412, 20—22, wendet er mit Epaphroditus auf den Fall $a = 12$, $b = 8$, $c = 15$ an. Letzterer berechnet, wie seine Figur zeigt, $2\varrho = 6$, Boetius aber $2\varrho = 5$; keiner von beiden aber bemerkt, dass, worauf Cantor, A. 120, 135, 218, Note 257 aufmerksam gemacht hat, ein Dreieck mit diesen Seiten nicht rechtwinklig ist, dass es $b = 9$ statt $b = 8$ heissen muss, und $2\varrho = 6$ ist. Hiermit ist die Lehre vom rechtwinkligen Dreieck erledigt, und es kommt nun die Berechnung des stumpfwinkligen an die Reihe. Als Beispiel dienen, 413—414, die Zahlen 18 für die Grundlinie, 10 und 9 für die Seiten. Boetius nimmt als Höhe willkürlich 4 an und berechnet die Fläche zu 36, setzt aber hinzu, Architas finde — sein Verfahren ist nur sehr unklar angegeben — als Fläche 32. Welches Resultat nun das richtige ist, darüber erfahren wir nichts, sie stehen eben beide neben einander, und der Leser hat die Wahl; in der That aber sind beide falsch, denn die Höhe beträgt 3,04 . . ., und die Fläche 27,83 . . . Den Beschluss der Dreiecksberechnung bildet die des spitzwinkligen Dreiecks, 414—415, mit den Seiten 13, 14, 15 nach Epaphroditus, A. 210, § 16. Es wird gemäss der Regel $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$ erst ein Abschnitt der Grundlinie 14, dann die Höhe, und schliesslich die Fläche gefunden. Nun erst folgt das Quadrat. Auch dieses (wie den Kreis) hat Boetius in der Arithmetik 112, 19, abweichend von Euklid, mit den Worten definirt: „Omnis

enim tetragonus una quidem superficies est quattuor angulorum, totidemque laterum". Die Berechnung der Fläche des Quadrates will Boetius kurz abmachen. „Quadratorum enim ceteris facilior est collectio", sagt er, 415, 16—17; dass aber die Berechnung des Quadrates der aller übrigen zu Grunde liegt, sieht Boetius augenscheinlich nicht. Wenn ferner hier, 416, 3, gesagt wird: „Qui videlicet normalis tetragonus ab Euclide aequilaterus atque rectiangelus nominatur, a Nicomacho autem in arithmeticis similiter appellatur", so ist es befremdlich, dass Boetius, der doch die Arithmetik des Nicomachus so sorgfältig bearbeitet hat, sich nur so unbestimmt, *similiter*, ausdrückt, und nicht genau anzugeben weiss, wie Nicomachus das Quadrat definirt. In der That aber erwähnt Nicomachus von demselben nur die Gleichheit der Seiten und die Anzahl 4 der Winkel, nirgends aber gedenkt er der Rechtwinkligkeit; und dieselben Eigenschaften führt auch Boetius in seiner Arithmetik an, er spricht auch, aber nur an einer einzigen Stelle 118, 5, von der Gleichheit der Winkel, sagt aber nirgends, dass jeder ein Rechter sei. Seine Berufung auf Nicomachus ist daher entweder ganz vag und unbestimmt, oder sie ist unrichtig. Noch auffälliger ist aber das, was von dem nun folgenden Rechteck, 416, gesagt wird. Denn wie sollen wir es verstehen, wenn Boetius hier, 416, 8, sagt: „Tetragonus autem *parte altera longior* ab Euclide quidem rectiangulum sed non aequilaterum definitur, a Nicomacho autem ἑτερομήκης dicitur . . . Sit modo *parte altera longior tetragonus*, cujus longitudo pedes 8, latitudo autem 4, vel longitudo 9, latitudo autem 6 vel 5 vel 3 colligat?" Nennt etwa Euklid das Rechteck nicht ἑτερόμηκες? Hat Boetius vergessen, dass er ja selbst dieses Euklidische ἑτερομήκης durch *parte altera longior* übersetzt hat? Wenn ferner, wie bereits oben bemerkt ward, gerade Boetius diese Worte, die jeder Andere zur Wiedergabe von ἑτερομήκης in der Geometrie wählen konnte, nicht anwenden konnte, da er durch dieselben in seiner Arithmetik das gleichlautende vom Euklidischen aber verschiedene Nicomachische ἑτερομήκης wiedergegeben hat; was sollen wir dazu sagen, wenn er selbst sich hier auf Nicomachus beruft, und so die Verwirrung der Begriffe vollständig macht? Hat Boetius vergessen, dass Nicomachus heteromeke und promeke Zahlen scharf unterscheidet, dass er selbst in seiner Arithmetik diesen Unterschied ausführlich erörtert hat? Denkt er nicht mehr daran, dass gerade nach Nicomachus keine der oben genannten Zahlen heteromek, sondern dass sie alle promek sind, dass sogar gleich das erste von ihm oben genannte Beispiel 8 . 4 . von Nicomachus 108, 24; 113, 16 als Beispiel einer promeken Zahl aufgeführt wird? Doch wir verlassen diesen auf der Hand liegenden Widerspruch, C. 193, zwischen der Arithmetik und der Geometrie des Boetius, und wenden uns zum Folgenden. Es wird zunächst, 416—417, der Rhombus, sodann, 417—418, das unregelmässige Viereck, sonderbarer Weise, und nicht

übereinstimmend mit den von Boetius übersetzten Definitionen Euklid's, ebenfalls Rhombum genannt, 417, 20, und zwar letzteres nach der unrichtigen Regel $\frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$ berechnet. Dann wird, 418, das rechtwinklige Trapez behandelt, und zwar versteht Boetius unter demselben das Parallel-Trapez, abermals abweichend von Euklid. Nachdem nun noch, 418—419, die Diagonale eines Rechtecks (vergl. Epaphroditus, A. 209, § 12), welches hier, 418, 19 „parallelogrammum orthogonium" heisst, berechnet ist, folgen die regelmässigen Vielecke vom 5- zum 10-Eck, und zwar, abgesehen von den Zahlenwerthen, in derselben Weise wie bei Epaphroditus A. 210, § 17—213, § 24. Mit Recht macht Cantor, A. 121, 129—130, 157, 174—175 (vergl. K. 252) darauf aufmerksam, dass die Römer mehrfach die Anzahl s der Einheiten, welche eine figurirte Zahl m^{ter} Ordnung, deren Seite a Einheiten enthält, also die Zahl

$$s = \frac{(m-2)a^2 - (m-4)a}{2} \qquad 3)$$

für die Anzahl der Flächen-Einheiten ansehen, welche den Inhalt eines regelmässigen m-Ecks von der Seitenlänge a ausmachen. Auf diese Weise haben schon an einer oben erwähnten Stelle Epaphroditus und mit ihm Boetius das gleichseitige Dreieck berechnet (dies ist das 2[te] dort zur Anwendung gebrachte Verfahren) und jetzt bedienen sich beide derselben Regel, um der Reihe nach den Inhalt der regelmässigen Vielecke vom 5-Eck an, Epaphroditus bis zum 12-Eck, Boetius bis zum 10-Eck, zu bestimmen. Sollte nun aber letzterer die soeben genannte Meinung getheilt haben, dass auf diese Weise die Fläche eines Vielecks gefunden werden könne? Sollte derselbe Boetius, der die Arithmetik des Nicomachus bearbeitet hat, wirklich jene Buchstaben α, welche dieser, jene „virgulae", welche er selbst anwendet, für Flächen-Einheiten angesehen haben? Und wenn dies der Fall, wenn er sich des Zusammenhangs der Regel 3) mit der Lehre von den figurirten Zahlen bewusst war, sollte er dies mit keiner, aber auch absolut keiner, Andeutung zu verstehen gegeben, in der Arithmetik nicht auf die Geometrie, in der Geometrie insbesondere nicht auf die betreffende Stelle der Arithmetik hingewiesen haben? Wir bleiben auch über diesen Punkt völlig im Dunkeln. Wenn nun Cantor, A. 129, von Epaphroditus sagt, derselbe habe eine andere Quelle „ohne Verständniss" benutzt, so liegt es nahe, zu untersuchen, wie Boetius die Schrift des Epaphroditus verwerthet. Beim 5-Eck nun giebt letzterer die in der Formel 3) enthaltene Regel mit Worten richtig an, verrechnet sich aber, indem er im Zähler addirt, statt zu subtrahiren. Beides macht Boetius ebenso, nur fügt er noch einen Fehler hinzu, indem er vergisst mit 2 zu dividiren, A. 132. Beim 6-Eck giebt Epaphroditus die Regel auch mit Worten falsch an und schreibt vor, im Zähler zu addiren, statt zu subtrahiren;

seine Rechnung ist dem entsprechend. Vollkommen das Gleiche thut Boetius, A. 132. Es kommt nun das 7-Eck an die Reihe. Auf den Ursprung jener Regel auch nur mit einem Worte einzugehen, hält Boetius nicht für nöthig, dass aber auf das Sechs-Eck gerade das Sieben-Eck folgt, das scheint ihm zu merkwürdig und zu schwer zu begreifen, als dass es nicht näher erklärt werden müsste. Aber wie? Das wird gewiss Niemand errathen. Seine Worte lauten 420, 14: „Qui, videlicet eptagonus, tertio hic inscribitur loco, septenarius quemadmodum in inparium numerorum tertius naturaliter ordine apparet". Also das 7-Eck ist das dritte zu betrachtende Vieleck (nämlich vom 5-Eck an; dass das regelmässige 3- und 4-Eck auch hierher gehört, berücksichtigt Boetius nicht), wie 7 die dritte in der Reihe der ungeraden Zahlen ist. Staunend fragt hier der unbefangene Leser: Aber ist denn nicht 7 die vierte der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7? Sollte Boetius etwa nicht bis zu 3 zählen können, wie das Sprichwort sagt? Doch verwerfen wir solche Gedanken und seien wir nicht vorschnell mit unserem Urtheil! Erinnern wir uns vielmehr daran, dass ja Boetius am Ende des ersten Buches seiner Geometrie gesagt hat: „unitas numerus non est", dass für ihn also die 1 nicht mitzählt; dann allerdings ist 7 die dritte ungerade Zahl. Wir sehen also, dass Boetius in der Geometrie, wo es doch nicht auf Speculationen über die Natur der Zahlen, sondern auf gewöhnliches, bürgerliches Rechnen ankommt, consequent die 1 nicht mitzählt, während er doch in der Arithmetik, auf die er sich an der oben genannten Stelle berufen, ebenso consequent die 1 in der Reihe der natürlichen, wie der ungeraden Zahlen mitgezählt hat; denn wir lesen, um auch Letzteres zu beweisen, in der Arithmetik, 118, 12: „disponentur in ordinem omnes ab uno impares . . . . . I, III, V, VII . . . *Est ergo princeps inparis ordinis unitas*", ebenso 136, 10—14, und sonst. Nach dem 7-Eck kommt das 8-Eck an die Reihe, an der vierten Stelle hinter dem 5-Eck, denn, 421, 6: „*Octogonus* vero in naturali *parium* numerorum ordine *quartus* constitutus in hoc disserendus loco naturaliter *quartus* assumatur", dann folgt das 9- und das 10-Eck. Die Flächen aller sind, wie bei Epaphroditus nach obiger Regel 3) berechnet, und diese spricht er, was Letzterer nicht thut, am Ende in Worten aus; nach sechs vorangegangenen Beispielen allerdings nicht schwierig. Die bei Epaphroditus jeder dieser Aufgaben beigefügte Umkehrung aber, aus m und s die Grösse a (aus der Zahl der Seiten und der Fläche die Länge einer Seite) zu berechnen, suchen wir bei Boetius vergeblich; nur beim gleichseitigen Dreieck hat er schon früher, 406, 4; A. 210, § 15, dieselbe behandelt. Nach zwei Kreisaufgaben finden wir endlich die Berechnung der Fläche eines Berges, 424—425, an drei Beispielen erläutert, das zweite auch in den Zahlenwerthen mit Epaphroditus, A. 209, § 8, übereinstimmend, beim dritten hat, wo Epaphroditus, A. 209, § 9, das Resultat nur in runden

Zahlen angiebt, A. 119, Boetius eine Zahl der Aufgabe so umgeändert, dass derselbe Werth auch das genaue Resultat wird. Hiermit ist die Flächenberechnung beendigt.

Boetius fährt fort, 425, 18: „Quia igitur de omnium huic arti inserendarum speculationum rationibus breviter enodateque sat disseruimus, reliquum est, ut de unciali et digitali mensura . . . . dicamus, mirabilem et arti huic ceterisque matheseos disciplinis necessariam figuram, quam Archita praemonstrante didicimus, edituri. Veteres igitur geometricae artis indagatores subtilissimi, maximeque Pythagorici . . . ea, quae naturaliter erant indivisibilia, positis notis nominibusque datis dispertiere", und nun folgt die Bruch- und Minutien-Tabelle. Nach Cantor, C. 222—224, 228 war es einmal nicht nöthig, diese Anweisung zum Rechnen mit Brüchen an die frühere Stelle, welche die Rechen-Regeln enthält, anzuschliessen, weil in den Beispielen der Geometrie nur ganze Zahlen vorkommen, es war aber zweitens nothwendig, dieselbe am Ende der Geometrie zu geben, weil in dem nun folgenden vierten Theile des Werkes, der Astronomie, Brüche ganz unvermeidlich sind. Was nun den ersten dieser beiden Gründe betrifft, so ist es gewiss an dem, dass allerdings, mit Ausnahme der einen oder anderen Irrational-Zahl, bei den von Boetius gewählten Beispielen nur ganze Zahlen vorkommen, dass also Kenntniss der Bruchrechnung für das Verständniss seiner Geometrie nicht erforderlich ist. Eine andere Frage aber ist die, ob wirklich bei der Flächenberechnung und beim praktischen Feldmessen, welches doch hier gelehrt werden soll, nothwendig nur ganze Zahlen vorkommen. Wenn aber, wie das wohl von Jedem geschehen wird, diese Frage verneint wird, dann ist zu bemerken, dass Boetius ebenso wie Heron und Nipsus [6]) in unmittelbarer Nähe einer von Boetius benutzten Stelle, auch solche Beispiele in seiner Geometrie hätte wählen müssen, in welchen Brüche vorgekommen wären. Was aber den zweiten der obigen Gründe betrifft, so wäre es gewiss zweckmässiger gewesen, die Bruchregeln, statt sie an dem Ende desjenigen Theiles anzubringen, in welchem

---

6) Ich meine das Ende des Nipsus-Fragmentes F. I. 301. Dieses ist offenbar verdorben, A. 107, aber leicht herzustellen, denn statt 12 ist nur $12\frac{1}{2}$, und statt 25 ist 75 zu setzen. Ob ich Recht habe, wenn ich meine, in den Worten: „XII semper" habe das einem *s* ähnliche Zeichen für $\frac{1}{2}$ leicht vor dem *s* in „semper", und in den Worten „fit XXV" hinter dem *t* oder *T* leicht ein *L* ausfallen können, mögen Sachverständige beurtheilen. Man hat dann die Aufgabe, F. I. 301, 6—9, aus den Katheten $7\frac{1}{2}$ und 10 die vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällte Senkrechte und die Abschnitte der Hypotenuse zu berechnen. Die Senkrechte ist dann 6, die Hypotenuse $12\frac{1}{2}$, die beiden auf ihr liegenden Abschnitte 8 und $4\frac{1}{2}$. Das Dreieck hat die Seiten $7\frac{1}{2}$, 10, $12\frac{1}{2}$, also jede halb so gross als die des kurz vorher behandelten Dreiecks, bei welchem sich der Rechenfehler findet, F. I. 297, und jede Seite wird erhalten, indem man die Seiten 3, 4, 5 des bekannten rechtwinkligen Dreiecks mit $2\frac{1}{2}$ multiplicirt.

sie **nicht** gebraucht werden, an den Anfang desjenigen zu setzen, in welchem sie zur Anwendung kommen sollten. Zudem finden sich sowohl in der Arithmetik als in der Musik Brüche in Menge, und in letzterer, 274—276, auch Zeichen für Brüche, deren Kenntniss Boetius also doch bei den Lesern seiner „Musik“ voraussetzt, während er am Ende seiner „Geometrie“ 426, 14 die Bruchzeichen dunkel und unbekannt nennt, so dass er, wie er sagt, sich zur Einführung neuer Zeichen veranlasst findet. — Die Geometrie schliesst, wie sie mit dem feldmesserischen Begriffe von „mensura“ begonnen, mit der Verweisung auf die Agrimensoren Frontin und Urbicus Aggenus.

Bevor ich die Geometrie des Boetius verlasse, muss ich noch auf die Persönlichkeit des in derselben öfter erwähnten Architas eingehen. In der Arithmetik und Musik nämlich erwähnt Boetius mehrmals, 139, 14, 17; 285, 12 — 286, 6, 17; 368, 9; 369, 15, 25 den Pythagoreer Archytas von Tarent. Wir wissen von demselben nur, dass er 365 v. Chr. starb, dass er sich in der Mechanik auszeichnete, und mit der Verdoppelung des Würfels beschäftigte, C. 179. Seine Schriften freilich sind verloren, jedoch existirten im ersten Jahrhundert n. Chr. noch Stücke, die ihm, ob mit Recht, ist freilich zweifelhaft, zugeschrieben wurden, C. 179—180. Nun wird auch in der Geometrie ein Architas erwähnt, und zwar heisst es bei Gelegenheit der Regel $2\varrho = a + b - c$, 412, 20—23: „Unum etiam, quod Architae judicio in hoc eodem orthogonio approbatum est, et Euclidis diligentissima persecutatione *prius est* rationabiliter adinventum, operae precium duximus non esse praetermittendum. Est etiam saepe, ut disputator in geometria, circulus si huic orthogonio inscribatur, quot pedes diametrus colligat, requirat“. Aus dem *prius* nun folgert Cantor, C. 192, dass hier ein Architas gemeint sei, der nach Euklid gelebt habe, dass also, C. 191, zwei Schriftsteller gleiches Namens existirt hätten, und folgert, C. 192, aus den Worten, wo zum ersten Male Architas in der Geometrie vorkommt, 393, 6: „Sed jam tempus est ad geometricalis mensae traditionem ab Archita, *non sordido hujus disciplinae auctore,* Latio accommodatam venire“, es werde hier dieser lateinisch schreibende Architas dem Leser als ein von dem in der Arithmetik und Musik genannten verschiedener vorgeführt. Auf die Frage nun, was denn dies für ein Architas sei, glaubt er es als wahrscheinlich ansehen zu dürfen, derselbe sei identisch mit dem von Chasles, 517—520 erwähnten ungenannten Verfasser einer geometrischen Schrift, welche mit mehreren anderen in einem Manuscript in der Bibliothek von Chartres sich findet, C. 171—172, 192—193, A. 132—135. Da sich nämlich, sagt Chasles, Boetius in seiner Geometrie auf Frontin berufe, diese anonyme Schrift aus stilistischen Gründen in die Zeit vor Boetius zu fallen scheine, und dem Inhalte nach mit dem Buche II der Geometrie des Boetius so sehr übereinstimme, dass mit Bestimmtheit

geschlossen werden könne, das eine dieser Werke sei eine Copie des anderen, so glaube er, Chasles, in dieser Schrift eine von Frontin herrührende zu finden; Cantor jedoch will in dem Verfasser derselben den problematischen Architas erblicken. Gehen wir auf diese Ansicht genauer ein. Gewiss, wenigstens sehr wahrscheinlich ist es, dass verschiedene Sammlungen feldmesserischer Aufgaben existirten, die eine, von dem einen Verfasser, behandelte die einen Aufgaben und liess andere hinweg, ein anderer Verfasser wieder behandelte gerade diese und vernachlässigte die ersteren u. s. w. Wir können auch nicht behaupten, dass wir alle solche Sammlungen kennten, und endlich liegt kein Grund vor, dass nicht ein solcher Compilator Architas geheissen haben könnte. Als Inhalt jenes Manuscripts von Chartres giebt Chasles, 518, als hieher gehörige nachstehende „verschiedene auf einander folgende Stücke" an: I. „Das, was wir dem Frontius zuschreiben möchten"; II. die Arithmetik des Martianus Capella; III. de re rustica von Columella; IV. Fragmente von römischen Feldmessern; V. eine Stelle aus Isidor von Sevilla; VI. die Geometrie des Boetius; VII. „Endlich eine andere Schrift über den Gebrauch der neun Ziffern, welche frappante Analogien theils mit Boetius und Gerbert, theils mit unserem Zahlensystem hat." Betrachten wir nun den Inhalt der unter I. genannten dieser Schriften, und vergleichen wir ihn mit Boetius und Anderen, wobei zu bedenken, dass wir von Nipsus nur ein Fragment besitzen, und dass Chasles den Epaphroditus noch nicht kannte. Die Schrift I. also enthält, Ch. 522, *a*) die Berechnung der Höhe eines Dreiecks aus den 3 Seiten. Sie findet sich bei Boetius und Epaphroditus mehrfach angewandt, und auch bei Nipsus F. I. 299 erklärt; *b*) die Fläche des Dreiecks aus den drei Seiten. Dies hat weder Boetius noch Epaphroditus, wohl aber Nipsus F. I. 300—301; *c*) die beiden Formeln 1) und 2) zur Bestimmung rationaler rechtwinkliger Dreiecke. Sie fehlen bei Epaphroditus, finden sich bei Boetius und Nipsus; *d*) die Regel $2\varrho = a + b - c$. Sie fehlt bei Nipsus, kommt vor bei Epaphroditus und Boetius; *e*) die Berechnung des Quadrats, des Parallelogramms, des Rhombus und des Parallel-Trapezes. Sie fehlen bei Nipsus, und sind, falls unter „Parallelogramm" das Rechteck verstanden wird, vorhanden bei Epaphroditus und Boetius; *f*) die (auf eine falsche Regel gegründete) Berechnung der regelmässigen Polygone; fehlt bei Nipsus, findet sich bei Epaphroditus und Boetius; *g*) das Verhältniss $\frac{44}{14} = \frac{22}{7}$ der Peripherie zum Durchmesser; dies fehlt bei Nipsus, ist aber vorhanden bei Epaphroditus, A. 213—214, § 26, § 27, und bei Boetius, 423; *h*) die Oberfläche der Kugel; dies hat weder Boetius, noch Nipsus, noch Epaphroditus. Man sieht, alle stimmen mehrfach überein, aber doch nicht ganz. Wenn sich nun Boetius bei der Regel *d*) auf Architas beruft, ist dies ein Wahrscheinlichkeitsgrund, dass er diese

anonyme Schrift vor sich gehabt habe? Und wenn er sich ferner bei der Regel 2) auf denselben bezieht, muss es da nicht auffallen, dass er nicht ein Gleiches thut bei der Regel 1), denn diese findet sich ja nach c) ebenfalls bei dem Anonymus? Dagegen suchen wir die Berechnung des stumpfwinkligen Dreiecks, bei welcher sich Boetius gleichfalls auf Architas bezieht, unter den oben genannten Aufgaben vergebens; und wenn endlich Cantor, A. 135, sagt, auch der Abacus, bei dessen Erklärung Boetius mehrfach des Architas gedenkt, finde sich in dem Fragment von Chartres, so ist dies zwar richtig, allein sie findet sich nicht in der anonymen Schrift I, deren Inhalt nach Chasles oben angegeben ist, sondern in der gleichfalls anonymen Schrift VII. Wenn also Cantor diese letztere mit zum Beweise heranzieht, und von einem Anonymus redet, während doch zwei vorhanden sind, so liegt die Annahme zu Grunde, dass I. und VII. von demselben Verfasser herrührten. Aus den Worten Chasles aber, der allein dieses Fragment kennt, A. 132: *„verschiedene auf einander folgende Stücke“*, Ch. 518, geht dies durchaus nicht hervor. Etwas Bestimmtes also lässt sich gar nicht behaupten. Betrachten wir nun aber die Stelle der Geometrie des Boetius, welche überhaupt zu der ganzen Hypothese Veranlassung gegeben hat, genauer, so lautet sie: Architas habe die Regel $2\varrho = a + b - c$ gefunden, früher aber noch Euklid. Die nächste Frage nun wäre meines Erachtens: Verhält sich dies auch so? Des Archytas Schriften nun sind, wie bereits bemerkt ward, verloren, wir wissen daher nicht, ob er in der That diesen Satz gefunden hat; es liegt kein Zeugniss vor, dass dem so sei. Aber Euklid? Dessen Werke sind doch ziemlich vollständig auf uns gekommen. Nun, bei Euklid — würde man diesen Satz (woher stammt derselbe?) ebenfalls vergeblich suchen. Die ganze Frage entbehrt daher eines festen, greifbaren Grundes, und das Nächstliegende wäre wohl, sie als eine der vielen und starken Unrichtigkeiten, an denen, wie der Leser gewiss zugeben wird, diese Geometrie des Boetius so überreich ist, anzusehen, und nicht weiter zu beachten. Geben wir uns aber gleichwohl die Mühe, auf dieselbe einzugehen. Fragen wir also erstens: Ist es denn so gewiss, dass der Architas der Geometrie ein andrer sein soll, als der der Arithmetik und Musik? Cantor folgert dieses aus den oben angeführten Worten: *„non sordido hujus disciplinae auctore“*, 393, 7; aber mit demselben Rechte würde man dann aus 414, 17—18: „ab Euclide, *non segni geometre*“ schliessen dürfen, dass hier ein andrer Euclid gemeint sei, als der im Früheren angeführte. Ferner sagt Boetius, was er doch, wenn er es so hätte verstanden wissen wollen, nicht unterlassen konnte, auch nirgends bestimmt, der in der Geometrie vorkommende Architas sei nicht der früher citirte. Dies findet sich nirgends ausgesprochen. Im Gegentheile, Manches spricht dafür, dass in der That der Architas der Geometrie auch der Pythagoreer ist.

Denn an der ersten Stelle, an welcher er auftritt, erscheint er als ein Schriftsteller über die „mensa geometricalis". Mit diesem Gegenstande aber beschäftigten sich nach Boetius gerade die Pythagoreer, 396, 7—11: „Pythagorici vero . . . descripserunt sibi quandam formulam, quam ob honorem sui praeceptoris mensam Pythagoream nominabant". Ebenso wird, wie wir sahen, am Ende der Geometrie, 425, 23 Architas wieder als Lehrer der Bruch- und Minutien-Tabelle hingestellt, diese aber wieder den Pythagoreern zugeschrieben. Dass ferner Architas die Regel 2) gefunden haben sollte, ist zwar nicht richtig, aber dieselbe muss wenigstens ungefähr zu seinen Lebzeiten aufgestellt worden sein, denn Proklus erwähnt II, 19 den Ἀρχῦτας ὁ Ταρεντῖνος als Zeitgenossen des Plato. Aus der Stelle vom stumpfwinkligen Dreieck und dem Satze $2\varrho = a + b - c$ ist etwas Bestimmtes nicht zu entnehmen. Das einzige Bedenkliche wäre einmal, dass Archytas in das Lateinische übersetzt haben sollte, und dass ferner von einem solchen Abacus bei den Pythagoreern Zuverlässiges nicht vorliegt. Sollte aber nicht wieder ein Irrthum des Verfassers der Geometrie im Spiele sein? Sollte es nicht, anstatt einem ganz unbekannten zweiten Architas nachzujagen, natürlicher sein, an jener Stelle, wo gesagt wird, Euklid habe den Satz $2\varrho = a + b - c$ früher als Architas gefunden, eine Verwechselung des Euklid von Megara und des Euklid, welcher die Elemente verfasste, anzunehmen? Diese beiden Männer, Namens Euklid, haben wirklich gelebt. Euklid von Megara war ein Schüler des Sokrates und bei dessen Tode, 400 oder 399 v. Chr. zugegen, zu ihm flüchteten die Schüler des Sokrates nach dem Tode ihres Meisters; unter ihnen befand sich auch Plato, der später in Tarent den Pythagoreer Archytas als einen bereits älteren Mann kennen lernte. Es können daher Euklid von Megara und dieser Archytas im Alter nicht weit von einander entfernt gewesen sein; beide waren Zeitgenossen, wenn auch vielleicht letzterer einige Jahre älter war. Könnte aber nicht trotzdem von Euklid von Megara angenommen werden, er habe einen Satz früher gefunden als Archytas (denn dies, nicht dass Euklid früher gelebt habe, liegt ja in den Worten des Boetius)? Und ist die Verwechselung der beiden Euklide etwas so Ungewöhnliches? Betrachten wir die mehrfach genannte Doppel-Ausgabe des Euklid von Campano und Zamberti, so finden wir den Titel: „Euclidis *Megarensis* mathematici clarissimi elementa", die Ueberschrift über den Elementen lautet: „Euclidis *Megarensis* philosophi etc.", und ebenso die Ueberschriften über den anderen in dieser Ausgabe enthaltenen Werken Euklid's. Man sieht, hier wird Euklid von Megara mit dem Verfasser der Elemente verwechselt. Ein Gleiches geschieht in der ersten Ausgabe von Campano's Uebersetzung 1482, K. 290, ebenso in der zweiten 1509, K. 299, desgleichen in der Pariser Doppel-Ausgabe von Campano und Zamberti 1516, K. 306, ebenso in der Ausgabe Scheibel's 1550, K. 359, und in derjenigen Candalla's 1602, K. 313; in der dritten

Auflage von Peletarius' Ausgabe des Euklid 1810 wird unentschieden gelassen, Megarensisne an Gelous fuerit Euclides, K. 331; ja, noch zu Ende des 17[ten] Jahrhunderts lässt Dechales, der noch dazu den Proklus anführt aber wohl nicht aufmerksam gelesen hat, es ungewiss, ob der *στοιχειωτής* der Megarenser Euklid, oder derjenige Euklid gewesen sei, der um 300 v. Chr. in Alexandria lehrte, K. 367. Wollen wir daher nicht in den Worten des Boetius, Euklid habe jenen Satz früher gefunden als Architas, eine vage und unbestimmte, keiner Beachtung werthe, Behauptung sehen, sondern überhaupt auf dieselbe eingehen, so liegt es meines Erachtens unendlich viel näher, statt nach einem von dem bekannten Archytas verschiedenen zu suchen, während ein solcher nirgends erwähnt wird, anzunehmen, es liege hier ausser sonstigen Irrthümern (in Bezug auf die Uebersetzung in das Lateinische vielleicht eine Verwechselung mit Appulejus?) eine Verwechselung des Megarenser Philosophen und des Verfassers der Elemente vor. Denn Beide haben wirklich, letzterer etwa 100 Jahre später als jener, gelebt, und Beide sind thatsächlich das ganze 16[te] Jahrhundert hindurch, und wohl noch länger verwechselt worden. Wenn wir dies nun auch in einer späteren Zeit erklärlich finden, wenn es uns auch nicht sehr befremdet, dass der nicht allzu genaue Valerius Maximus, VIII, 12, Ext. 1, vor Boetius ein Gleiches that; von Boetius müsste es unglaublich erscheinen, wenn er, falls er den Euklid zu übersetzen gedachte, den Commentar des berühmten Proklus, noch dazu eines Gesinnungs-Verwandten in Philosophie, nicht gekannt, und nicht bemerkt haben sollte, dass dieser II, 19—20 den *στοιχειωτής* Euklid bestimmt als Zeitgenossen des Ptolemäus I bezeichnet hat. [Bevor ich diese Archytas-Stelle 412, 20 verlasse, will ich noch darauf aufmerksam machen, dass wir in ihr das Wort *ad*invenire finden; dasselbe erscheint in der Geometrie des Boetius noch 4 Mal, und nur 1 Mal invenire; in der Arithmetik und Musik aber kommt *ad*invenire nirgends vor, wohl aber 13 Mal *invenire,* sowie 3 Mal *inventio,* und 1 Mal *inventor;* ähnlich *ad*-investigare und *investigare*].

Soviel über den Inhalt der Geometrie des Boetius. Zwar hat schon Cantor auf manche in derselben vorkommende Unrichtigkeiten aufmerksam gemacht und dieselbe als hinter der Arithmetik zurückstehend bezeichnet, C. 187, ja, als allgemein bekannt darf wohl angenommen werden, dass sie verschiedenes Irrige enthalte, gleichwohl aber schien mir eine Angabe des Inhaltes, und der Nachweis, welcher Natur die von Boetius begangenen Fehler sind, und in welcher Anzahl sie vorkommen, geboten, denn eine genaue Kenntniss des Thatbestandes halte ich für die Aufstellung eines Urtheils über diese Schrift für unerlässlich. Bevor ich jedoch das meinige abgebe, wende ich mich erst noch zu der ferneren Frage:

In welcher Form haben wir auf Grund der als ächt anerkannten Schriften des Boetius die Geometrie desselben zu

erwarten? Von der Arithmetik und Musik nun, welche allein hier in Betracht kommen, ist, wie bereits erwähnt ward, letztere gewiss in überwiegendem Masse eine selbständige Arbeit, erstere aber, welche sich, wie Boetius selbst ausspricht, an Nicomachus anlehnt, behandelt den Gegenstand so frei, dass sie auf den Leser den Eindruck einer eigenen und originalen Abhandlung macht. Beide sind nach einem wohldurchdachten Plane ausgeführt, die einzelnen Abschnitte stehen in folgerichtiger Verbindung mit einander, die Darstellung (ich rede nicht von der Latinität, über welche ich mir kein Urtheil erlauben will) ist, der Sitte jener Zeit gemäss, wohl etwas schwülstig, aber deutlich, und eine solche, wie man sie von einem hochgestellten, gebildeten und formgewandten Manne, welcher neben dem Quadrivium auch das Trivium, Grammatik, Dialektik und Rhetorik, pflegte, erwarten kann. Der Arithmetik sowohl als der Musik geht eine Einleitung, Prooemium, voraus, und zwar eine sehr umfangreiche und ausführliche (die ebenfalls mit „Prooemium" überschriebenen ersten Sätze von Mus. II, V sind keine Einleitung im eigentlichen Sinne; eine solche würde hier auch unnöthig sein), in welcher Boetius, von allgemeinen Gesichtspunkten ausgehend, den Leser auf das zu behandelnde Thema hinführt. Dagegen wird der Pflege- und Schwiegervater des Boetius, Symmachus (dass nicht an den Sohn des Boetius zu denken ist, C. 189, beweisen die Worte 5, 21: „Tu tantum *paterna* gratia nostrum provebas munus"), dem in einem dem Prooemium zur Arithmetik vorangehenden Abschnitte das ganze Werk gewidmet ist, weder in dieser noch in der Musik wieder erwähnt. In gleicher Weise nun, glaube ich, müssen wir auch die Geometrie behandelt erwarten. Aber:

In welcher Form finden wir diejenige Schrift, welche als die Geometrie des Boetius gilt? Zunächst ist dieselbe eine völlig unfreie Arbeit, sie besteht aus einer wörtlichen Uebersetzung Euklid's, und einer Compilation von Schriften der Feldmesser Balbus, Nipsus, Epaphroditus, und vielleicht noch anderen, Eigenes finden wir so gut wie nichts. Dazu ist die Darstellung nichts weniger als deutlich; von Anfang an bleibt der Leser über den eigentlichen Zweck, welchen der Verfasser verfolgt, im Ungewissen, und hat nur die Wahl, ob er das Ganze für ein planlos zusammengewürfeltes Mixtum Compositum Simplex halten, oder ob er einigen wenigen Worten: „pernecessariis introductionibus", 393, 2, entnehmen will, dass, C. 189, die „geometrica ars", d. h. nicht wissenschaftliche Geometrie, sondern die praktische Flächen-Berechnung den Hauptgegenstand ausmachen soll. Aber auch dann noch ist der Gedankengang verworren genug. Die Kenntniss des Euklid wird für sehr nothwendig erklärt, gleichwohl aber weicht Boetius im Folgenden oft genug von ihm ab, nirgends beruft er sich auf einen Satz des übersetzten Stückes, er nennt den Euklid bei ganz gewöhnlichen Dingen, bei der Definition des gleichschenkligen, ungleichseitigen, stumpf- und spitzwinkligen Dreiecks, des Quadrates, Rechtecks und Rhombus,

406, 14; 407, 2; 413, 12; 414, 17; 416, 4, 8; 417, 12; die Nothwendigkeit aber, dass zu diesem Zwecke 4 Axiome, 5 Postulate, 48 Definitionen, 70 Lehrsätze und Aufgaben hätten übersetzt werden müssen, wird gewiss keinem Leser einleuchten; und dabei vermisst derselbe immer noch die Lehrsätze aus Euklid's Buch VI, aus denen, wie Kästner, K. 288, ganz richtig bemerkt, sich die Regeln für die Flächenberechnung erst herleiten lassen, und die sich selbst wieder auf die Theorie der Verhältnisse in Buch V gründen. Auf dieses Stück des Euklid nun folgen Feldmesser-Erklärungen und Definitionen, welche z. Th. schon gegeben sind, dann die Anweisung zum Rechnen mit ganzen Zahlen, hierauf wieder Feldmesser-Erklärungen, sodann die Berechnung der Flächen, und endlich das Rechnen mit Brüchen; Alles ohne alle Verbindung, oder durch ein unmotivirtes und nachlässiges „autem" oder „igitur" nothdürftig zusammengeschweisst, von einem in naturgemässer Entwickelung fortschreitenden Gedankengange ist keine Rede. Insbesondere unterlässt es Boetius unbegreiflicher Weise, den Leser durch ein „Prooemium" zu orientiren, obschon ein solches in der Geometrie gerade, da mit dieser, nachdem in den beiden ersten Theilen die Mengen behandelt sind, der zweite Haupt-Abschnitt, die Betrachtung der Grössen beginnt, besonders am Platze gewesen wäre. Die Schrift beginnt vielmehr, bezeichnend genug, mit den sonderbaren Worten 373, 21—24: „Quia *vero*, mi Patrici, geometrum exercitissime Euclidis de artis geometricae figuris obscure prolata te adhortante exponenda et lucidiore aditu expolienda suscepi, inprimis quid sit mensura diffiniendum opinor". Nicht genug also, dass wir hier unerwartet der nochmaligen Anrede an Symmachus begegnen, Boetius, der feingebildete Römer, fühlt auch nicht, wie widersinnig die Anrede „mi Patrici", „mein Patricier" ist, denn „Patricius" ist kein Name, C. 189, sondern der hohe Patricier-Titel, welcher in der Regel „nicht vor dem Consulat oder vor vollendeter Amtsverwaltung einer der höchsten Hofchargen ertheilt ward", U. 19; er empfindet nicht, wie unpassend und taktlos es ist, denselben Symmachus, dem er sein Werk widmet mit den ehrerbietigen Anfangs-Worten: „Domino suo Patricio Symmacho Boetius„ hier in der Geometrie vertraulich mit „mi Patrici" anzureden.

Blicken wir nun auf das Bisherige zurück, so stossen wir auf eine Anzahl von Fragen. Denn, wenn wir zunächst den Inhalt der Geometrie im Ganzen betrachten, und uns erinnern, dass dieselbe den dritten Theil eines Werkes bilden soll, welches auf Pythagoreïsch-Platonischen Anschauungen beruht, müssen wir da nicht Manches vermissen, was wir zu erwarten berechtigt waren: die Lehre von der Aehnlichkeit, die Construction der 4ten und der mittleren Proportionalen, die Erwähnung des Incommensurabelen und Irrationalen; muss es nicht auffallen, dass die regelmässigen Vielecke so unklar behandelt sind, dass derselbe Boetius, der in der Arithmetik und Musik den Pythagoras und Plato beständig im Munde führt, in der Geo-

metrie bei Gelegenheit der von denselben aufgestellten allbekannten und von ihm so häufig angewandten Sätze ihre Namen auch nicht ein einziges Mal nennt, vielmehr die eine Regel dem Architas zuschreibt? Muss es nicht befremden, dass wir andrerseits so Manches finden, was wir nicht vermuthen, dass wir den Euklid so ausführlich berücksichtigt sehen, und noch dazu in einer zu den beiden ersten Theilen wenig passenden wörtlichen Uebersetzung, dass den Hauptgegenstand die „ars geometrica", das praktische Feldmessen, bildet, welches doch gerade der abstract-idealen Richtung der Pythagoreïsch-Platonischen Schule völlig fern lag? Gehen wir aber auf das Einzelne ein, und vergegenwärtigen wir uns, um billig zu sein, dass der eine oder andere Fehler wohl in jedem Buche sich findet, nehmen wir auch als im Voraus wahrscheinlich an, dass die Geometrie an wissenschaftlichem Interesse der Arithmetik untergeordnet sein werde, C. 187, sehen wir ferner die Lobeserhebungen des Cassiodor über des Boetius mathematische Kenntnisse und Leistungen als schönrednerisch übertrieben an; müssen wir nicht zugeben, dass diese seinen Namen tragende Geometrie auch dann noch hinter den bescheidensten Ansprüchen weit zurückbleibt? Können wir glauben, dass derselbe Boetius, der in seiner Arithmetik Alles deutlich darzustellen weiss, in der Geometrie den Leser stets gerade da im Stiche lassen sollte, wo derselbe einer Beihilfe bedarf; dass er ihn verwirren sollte durch Erklärungen an Stellen, wo gar nichts zu erklären ist? Ist es denkbar, dass sich derselbe Boetius, der sich in der Arithmetik in die heikelsten und spitzfindigsten Pythagoreïschen Zahlen-Speculationen vertieft hat, in der Geometrie als sinn- und gedankenlosen Compilator erweisen, dass er mehrmals den Epaphroditus mit sammt den Fehlern abschreiben, den Nipsus copiren sollte, ohne ihn zu verstehen? Dürfen wir dem Boetius eine solche Nachlässigkeit oder Unwissenheit zutrauen, dass er dasselbe Dreieck einmal als Beispiel eines nicht-rechtwinkligen, und bald darauf als eines rechtwinkligen benutzen, dass er die Fläche eines und desselben rechtwinkligen Dreiecks zu 64 berechnen und wenige Seiten weiter unten als 60 annehmen und s i c h s e l b s t d a b e i a u f d a s F r ü h e r e b e r u f e n, dass er sogar als Fläche eines stumpfwinkligen Dreiecks zwei verschiedene Werthe zugleich angeben und sich dabei beruhigen sollte? Dürfen wir dem dialektisch wohl geschulten Boetius, dem Verfasser nicht nur der „Tröstungen der Philosophie, sondern auch verschiedener logischer Schriften, C. 182; U. 41, zutrauen, er habe die Definition von „Trapez" und „Rhombus" aus dem Euklid übersetzt, und beide dann in anderer Bedeutung gebraucht, er habe nicht bemerkt, wie misslich es sei, das Axiom von der Gleichheit der rechten Winkel und von den Parallelen ohne nähere Erklärung unter die Postulate zu setzen, er habe die Eintheilung und Erklärung der Winkel zwei Mal gegeben, einmal nach Euklid und sodann nach Balbus, ohne zu bemerken, dass beide identisch sind, er habe Euklid's Eintheilung der Dreiecke so thöricht missverstanden,

er habe das rechtwinklige Dreieck, welches er allen übrigen zu Grunde legt, diesen erst nachfolgen lassen, nachdem er es bereits drei Mal stillschweigend angewandt hat, er habe das Quadrat, den Ausgangspunkt aller Flächen-Berechnung in die Mitte gesetzt? Sollen wir es für möglich halten, Boetius habe den Euklid übersetzt, ohne den Proklus zu kennen, er habe die zu den drei ersten Aufgaben Euklid's gehörigen Constructionen und Beweise, mochte er nun den Euklid oder den Theon oder irgend einen Anderen für deren Urheber halten, für seine eigenen Erklärungen ausgegeben? Ist es glaublich, dass Boetius in seiner Geometrie unter einem numerus *incompositus* und numerus *compositus* ohne irgend ein Wort der Erklärung etwas Anderes als in der Arithmetik verstanden haben, und doch wenige Zeilen weiter unverkennbar auf diese seine Arithmetik hingewiesen und sich auf dieselbe berufen haben sollte? Kann man sich vorstellen, derselbe Boetius, der den Nicomachus so sorgfältig bearbeitet hat, habe beim Niederschreiben der Geometrie nicht mehr bestimmt anzugeben gewusst, was derselbe vom „Quadrat" sagt? Sollte derselbe Boetius in seiner Uebersetzung des von ihm vorher nie erwähnten Euklid den Leser mit einer consequent durchgeführten Nomenclatur, die er weder vorher noch nachher einhält, überrascht, bei der Definition des Quadrates und des Kreises nicht auf die frühere verwiesen, nichts über das Fehlen des Axioms 12, dessen er doch in seiner Arithmetik gedenkt, gesagt haben? Ist es begreiflich, dass eben derselbe Boetius in seiner Geometrie das Euklidische ἑτερομήκης durch dasselbe lateinische Wort übersetzt haben sollte wie das etwas Anderes bedeutende gleiche Wort des Nicomachus, dass er bei der Uebersetzung von Euklid's Definition des Rechtecks und bei der Berechnung desselben das Wort *heteromek* in einer Bedeutung gebraucht haben sollte, welche von der in seiner Arithmetik und von Nicomachus aufgestellten abweicht, und dass er sich noch dazu selbst auf Nicomachus berufen haben sollte? Ist es glaublich, dass wieder eben derselbe Boetius in seiner Arithmetik die Eins in der Reihe der natürlichen und der ungeraden Zahlen consequent mitgezählt, in der Geometrie aber ebenso consequent nicht mitgezählt und gleichwohl sich selbst auf seine Arithmetik berufen haben sollte? Sollen wir wirklich annehmen, Boetius sei beim Fassen seiner Geometrie so geradezu von allen Göttern verlassen gewesen? Betrachten wir aber die Form, so muss sich uns die Frage aufdrängen: Dürfen wir dem dialektisch und rhetorisch gebildeten Boetius eine so unklar abgefasste Schrift zutrauen? Sollte er nicht im Stande gewesen sein, diesen Gegenstand ebenso deutlich zu behandeln wie die übrigen, sollte er die einzelnen Theile nicht in verständlichen Zusammenhang haben bringen können? Ist es denkbar, dass er ein Stück des Euklid übersetzt, die Kenntniss desselben für nothwendig erklärt, und sich doch im Folgenden so gut wie gar nicht auf dasselbe bezogen haben sollte, offenbar, weil er den Sinn der Sätze nicht gefasst

hat, weil er mit ihnen nichts anzufangen, sie nicht zu verwerthen weiss? Sollte er in der Geometrie, wo ein Prooemium gewiss ebenso nothwendig war, wie bei den beiden ersten Theilen, dasselbe hinweggelassen haben". Hätte er nicht bemerken müssen, wie sinn- und taktlos es ist, den Symmachus mit „mi Patrici" anzureden? Sollte Boetius, der in seiner Geometrie an Kenntnissen und Einsicht nicht allein kaum einem Epaphroditus, viel weniger einem Nipsus gleichsteht, sondern sich in keiner Weise über den Standpunkt des gewöhnlichsten Feldmessers jener Zeit erhebt, der je sein „ferramentum" handhabte und rein mechanisch nach äusserlich angelernten Regeln ohne alles Verständniss seine Berechnungen ausführte, diese Schwäche nicht bemerkt und die Geometrie lieber ungeschrieben gelassen haben? Sollte er, der gebildete Mann, kein Bedenken getragen haben, diese nicht allein von logischen und mathematischen Ungeheuerlichkeiten der schlimmsten Art strotzende und ohne alles Urtheil compilirte, sondern auch formlose Schrift als dritten Theil seiner Arithmetik und Musik hinzuzufügen, hinter denen sie in jeder Beziehung so weit zurücksteht? Sollte er gewagt haben, ein solches Buch dem Symmachus zu widmen, von dem er selbst sagt, dass er ihm nur Vollendetes bieten dürfe, 5, 11: „Arbitrabar enim nihil tantae reverentiae oblatum iri oportere, quod non elaboratum ingenio, perfectum studio, dignum postremo tanto otio videretur"? Wer es über sich gewinnen kann, alle diese Fragen zu bejahen, der möge es immerhin thun; ich meinestheils kann mich nicht dazu verstehen, und trage, gestützt auf die vorliegenden Gründe, kein Bedenken, meine Ansicht dahin auszusprechen, **dass wir in dieser Schrift nicht ein Werk des Boetius, sondern dasjenige eines, wie der Inhalt zeigt, unwissenden, wie Form beweist, in der Darstellung ungeschickten Fälschers vor uns haben.**

An dieser Ansicht kann mich auch der Gebrauch des Wortes „vertex", Z. XX, Hist.-lit. Abth. 35, 68; A. 133, nicht irre machen. Denn beim Uebersetzen aus einer Sprache in eine andere kann selbstverständlich nicht immer dasselbe Wort der einen durch dasselbe der anderen wiedergegeben werden; vielmehr richtet sich die Wahl des Wortes nach dem Sinne und Zusammenhange. So hat auch das griechische κορυφή mehrere Bedeutungen: In dem planimetrischen Theil von Euklid's Elementen bezeichnet es den Scheitel eines Winkels und wird in dem übersetzenden Abschnitt der in Rede stehenden Geometrie durch *vertex* wiedergegeben (das *vertex,* 393, 17—22, an einer offenbar aus Balbus, F. I. 100, 11—14 entlehnten Stelle, welche die Uebersetzung von Euklid I, Defin. 10 sein soll, ist weder durch den griechischen Text motivirt, noch findet es sich bei Balbus), ebenso übersetzt auch Zamberti. Es bezeichnet ferner κορυφή im stereometrischen Theile bei Euklid, Beweis zu XII, 3, 4, 5, etc. die Spitze der vollständigen Pyramide; hier gebraucht Zamberti *fastigium.* Desgleichen nennt Nicomachus die Spitze der vollen Pyramide κορυφή, 99, 18; 102, 9; 103,

21; Boetius gebraucht dafür, 105, 7 *cacuminis vertex*, 105, 16 *vertex et quodammodo cacumen*, 108, 8 *punctum quodammodo et vertex*, 109, 21 *vertex*, 106, 4 *vertex*, 110, 10—11 *cacumen verticis*. Von diesen entsprechen die 1te, 3te, 6te Stelle bezüglich den dreien des Nicomachus, auf die letzte komme ich sogleich zurück. Jedenfalls bedient sich Boetius nicht ausschliesslich des Wortes *vertex*. Es bezeichnet ferner bei Heron *κορυφή* die obere Deckfläche einer abgestumpften Pyramide, und ebenso bei Nicomachus (vergl. 107, 25), 104, 10—14: „*οὐ γὰρ εἰς τὸν δυνάμει πολύγωνον τὴν μονάδα τελευτᾷ αὕτη ὡς εἰς ἕν τι σημεῖον, ἀλλ' εἰς ἕτερον ἐνεργείᾳ, καὶ οὐκέτι μόνας κορυφή, ἀλλ' ἐπίπεδον αὐτῇ τὸ πέρας γίνεται ἰσόγωνον τῇ βάσει*“, welche Worte Boetius 110, 9—14 so wiedergiebt: „Pyramidis equidem figura est, sed quoniam usque ad *cacumen verticis* non excrevit, curta vocabitur et habebit *summitatem* non jam punctum, quod unitas est, sed superficiem, quod est quilibet numerus secundum basis ipsius angulos porrectus atque ultimus adgregatus.“ Indem also Boetius hier durch *cacumen verticis* (es ist dies die oben erwähnte 6te Stelle) das griechische *ἕν τι σημεῖον* ausdrückt, übersetzt er das *κορυφή* des Nicomachus durch *summitas*. Wir sehen also: Boetius drückt keineswegs regelmässig *κορυφή* durch *vertex* aus, sondern nur dann, wenn jenes einen Punkt bezeichnet, er wendet vielmehr *summitas* an, wenn der oberste Theil eine Fläche ist. Es heisst endlich noch die obere parallele Seite eines Trapezes bei Heron 102, 2, 17, 29; 103, 14, 25, 27 etc. ebenfalls *κορυφή*, bei Epaphroditus, A. 208 §. 2 „*vertex sive chorauste*“, in der oben mit I. bezeichneten Schrift des Fragmentes von Chartres, Ch. 522: „*vertex seu coraustus*“ („*chorauste*“ und „*coraustus*“ wahrscheinlich das verstümmelte *κορυστός*). Wenn nun in der vorliegenden Geometrie, welche als die des Boetius gilt, die obere parallele Seite eines Trapezes *vertex* und nicht *chorauste* oder *coraustus* heisst, kann daraus gefolgert werden, dass Boetius dies geschrieben habe? Denn, abgesehen davon, dass ein logischer Grund zu diesem Schlusse gar nicht vorliegt, wir haben hier nicht — wenigstens deutet nichts mit Bestimmtheit darauf hin — eine Uebersetzung vor uns, wenn auch die Schriften Herons mittelbar eingewirkt haben mögen; sodann übersetzt Boetius, wie wir sahen, das Wort *κορυφή* nicht regelmässig mit *vertex*, sondern nur dann, wenn der obere Theil ein Punkt ist, er gebraucht aber *summitas*, wenn der obere Theil eine Fläche ist. Beim Trapez nun, welches man als ein abgestumpftes Dreieck betrachten kann, ist der obere Theil weder ein Punkt, noch eine Fläche, sondern eine Linie, und wie Boetius in diesem Falle verfahren haben würde, ob er eines der beiden genannten Worte angewandt hätte, und welches, oder ob er ein drittes, von beiden verschiedenes, aufgesucht hätte, das können wir nicht wissen. Nach dem Bisherigen liegt letztere Vermuthung meines Erachtens am Nächsten; dass er, der griechischen Sprache kundig, das barbarische *chorauste* oder *coraustus*

gewählt haben sollte, muss wohl als unwahrscheinlich gelten. Wie aber aus dem Gebrauche des *vertex* an der genannten Stelle ein Beweis für die Aechtheit der Schrift über Geometrie hergeleitet werden könnte, vermag ich nicht zu finden.

Ich weiss nun wohl, dass ich, indem ich behaupte, Boetius sei nicht der Verfasser derselben, zugleich behaupte, es liege hier eine bewusste und absichtliche Unterschiebung vor. Denn dass, wenn eine Unterschiebung überhaupt stattfand, die Worte 390, 4: „in *nostrorum* arithmeticorum theorematibus", dass die mehrfach erwähnte Stelle 395, 25 — 396, 6, welche offenbar an das Prooemium zur Arithmetik erinnern soll, dass die, freilich unglücklich genug ausgefallene Berufung auf Nicomachus keinen anderen Zweck haben können, als den Leser zu dem Glauben zu verleiten, der Verfasser der Geometrie sei derselbe wie der der Arithmetik und Musik, ist unzweifelhaft. Obschon ich daher behaupte, diese Unterschiebung der ersteren sei eine bewusste und absichtliche gewesen, so behaupte ich doch nicht, dass diese Absicht nothwendig eine böswillige gewesen sein müsse. In unseren Tagen freilich würde ein solches Verfahren mit Recht für völlig unerlaubt und des strengsten Tadels werth gehalten werden, ungerechtfertigt aber würde es sein, wollten wir unseren Massstab auf jene früheren Zeiten anwenden, in welchen in literarischen Dingen eine uns unbegreifliche Naivität herrschte, der Begriff des literarischen Eigenthums noch nicht entwickelt war, der Name des Autors fast völlig hinter dem Inhalte der Schrift zurücktrat, und selbst einem Anderen ein Buch unterzuschieben nicht allein nicht für verwerflich, sondern, wofern dasselbe nur ein gutes war, eher für verdienstlich galt, denn man nahm ja dem angeblichen Autor nichts, sondern machte ihm vielmehr unter Verzichtleistung auf eigenen Ruhm ein Geschenk und erhöhte sein Ansehn. Dass man damit ein Unrecht begehe, dass man das Urtheil der Nachwelt irre leite, daran dachte man nicht (Zeller: Vorträge und Abhandlungen geschichtlichen Inhalts. 1865, 307—310). Möglich daher, dass der Verfasser der Geometrie dieselbe dem Boetius zuschrieb, damit der gefeierte Name desselben der Schrift eine günstigere Aufnahme bereite, möglich aber auch, dass er dem Boetius einen Dienst zu erweisen glaubte, indem er ihm ein in seinen Augen vortreffliches Werk beilegte, C. 188.

Ebenso wenig nun, wie die oben genannte Stelle, an welcher unser Pseudo-Boetius von seiner angeblich eigenen Arithmetik spricht, meine Ansicht zu ändern vermag, ebenso wenig vermögen mich seine Worte 389, 18—20: „Supra positarum igitur speculationibus figurarum . . . . . *a nobis* translatis" zu dem Glauben zu verleiten, der Verfasser habe den Euklid selbst übersetzt. Denn eine solche Uebersetzung kostet Mühe und Anstrengung; Nachdenken aber und geistige Arbeit, darin wird wohl Jeder mit mir übereinstimmen, war des Pseudo-Boetius starke Seite eben nicht.

Weshalb also sollte sich derselbe der nicht geringen Mühe der Uebertragung in das Lateinische unterzogen haben? Etwa, weil er den Euklid so hoch schätzte? Allein seine Verehrung desselben war wohl keine allzu grosse. Zwar gedenkt er des Verfassers der Elemente drei Mal lobend, indem er von ihm als einem „geometricae peritissimus“, 406, 14, einem „non segnis geometer“, 414, 17, von seiner „diligentissima perscrutatio“, 412, 21 spricht, er setzt jedoch kein Wort der Motivirung hinzu, und sein Lob erscheint eher als ein dem allgemeinen Urtheil gemachtes Zugeständniss, als aus eigener Ueberzeugung hervorgegangen. Sieben Mal erwähnt er ferner den Euklid ohne allen Zusatz, 407, 2; 408, 7; 413, 12; 416, 4, 8; 417, 12, 17, und an fünf Stellen findet er das, was derselbe im Allgemeinen, und speciell von den drei ersten Aufgaben sagt, „obscure“ 373, 22, „succincte difficulterque“, 389, 19, „nimis involute“, 390, 8, „obscure difficulterque“, 391, 3, „nimis strictim et ob id confuse involuteque“, 392, 7—8, dargestellt; freilich begreiflich genug, denn nach ihm sind ja nur die Lehrsätze und Aufgaben, nicht auch die Beweise und Constructionen, von Euklid. Vielleicht aber wird man einwenden, der Verfasser der Geometrie bedurfte des Euklid für das Folgende; in diesem Falle hätte allerdings ein triftiger Grund, ihn zu übersetzen, vorgelegen. Allein ich habe schon oben darauf aufmerksam gemacht, dass die wenigen, und noch dazu ganz trivialen, Stellen, wo er sich auf denselben beruft, den weitschweifigen Apparat einer Uebersetzung fürwahr nicht erfordern. Im Gegentheile, der Verfasser der Geometrie weiss eben augenscheinlich den Euklid gar nicht zu verwerthen, er eilt so rasch als möglich zu den Feldmessern hinüber, und das ganze Stück des Euklid könnte ohne Störung des Zusammenhanges der Geometrie fehlen. Es sind ferner, um den Euklid im Originale zu verstehen und ihn zu übersetzen Kenntnisse erforderlich; dürfen wir diese dem Verfasser der Geometrie zutrauen? Zunächst haben wir kein Zeugniss dafür, dass er der griechischen Sprache, wenigstens in ausreichendem Masse, mächtig gewesen sei. Denn seine Berufung auf Nicomachus bei Gelegenheit des Quadrates ist so vag und unbestimmt, dass es zweifelhaft bleibt, ob er denselben wirklich gelesen hat, und ist weit eher geeignet, die Meinung hervorzurufen, er wolle sich nur den Anschein geben, als ob ihm die Schrift desselben bekannt sei. Es gehören ferner zur Uebersetzung des Euklid auch geometrische Kenntnisse; diejenigen unseres Verfassers aber sind, wie wir sahen, die allerdürftigsten und zur Durchführung eines solchen Vorhabens lange nicht ausreichend; wie sollte der, welcher so thörichte Dinge schreiben kann, und nicht einmal die Eintheilung der Dreiecke bei Euklid zu verstehen im Stande ist, denselben, wie wir es finden, wenigstens im Ganzen richtig und mit Verständniss haben übersetzen können? Umgekehrt aber auch, wer diese Uebersetzung angefertigt, sollte der sich nach Vollendung derselben einer anderen Terminologie bedienen, als derjenigen, welche er

bei dieser angewandt hat? Wie sollte der den Satz $2\varrho = a + b - c$ dem Euklid zuschreiben? Wie sollte der vom Rechteck sagen, 416, 8: „Tetragonus autem altera parte longior ab Euclide quidem rectiangulum sed non aequilaterum dicitur, a Nicomacho autem ἑτερομήκης dicitur", musste er, wenn er den griechischen Text vor sich hatte, nicht sehen, dass Euklid dasselbe Wort gebraucht wie Nicomachus? Sollte der endlich das Uebersetzte so ganz und gar nicht zu verwenden wissen? Führt nicht dieses Alles zu dem Schlusse, dass dem Pseudo-Boetius eine von einem Anderen angefertigte Uebersetzung vorlag?

Wenn nun aber dieselbe, wie durch die Unwahrscheinlichkeit einer Uebersetzung überhaupt, durch das beharrliche Verschweigen des Namens „Euklid", durch die Abweichung in der Terminologie und den Definitionen des Quadrates und Kreises in der Arithmetik, durch das Fehlen des 12ten Axioms in der Geometrie, und vor Allem durch die Uebersetzung des ἑτερομήκης bewiesen wird, nicht von Boetius herrühren kann, von wem sollte sie sonst sein? Gab es überhaupt um seine Zeit Uebersetzungen des Euklid? Es liegen uns keine vor. Wenn es aber für möglich gehalten wird, A. 92, 131, 139, 169, dass lateinische Uebersetzungen des Heron unter den römischen Feldmessern verbreitet gewesen, sollten nicht auch Schriften des nicht minder berühmten Euklid, wenn auch vielleicht nur theil- und auszugsweise, übersetzt worden sein und sich in den Händen derselben befunden haben? Erinnern wir uns an jene Worte aus dem übersetzenden Theile des Pseudo-Boetius: „Petitiones vero, sive *postulata, ut veteribus placuit,* dicantur, quinque sunt"; geht nicht aus ihnen hervor, dass man das griechische αἴτημα früher mit *postulatum* bezeichnet habe? In den auf uns gekommenen Schriften Heron's aber kommt das Wort αἴτημα gar nicht vor; es kann nur das Euklidische gemeint sein. Haben wir hier nicht einen Beweis, dass auch Römer mit dem Euklid sich beschäftigten, dass sie wenigstens manches in seinen Werken Vorkommende, und gewiss nicht blos das eine oder andere Wort, übersetzten? Dürfen wir nicht schliessen, die vorliegende, dem Boetius zugeschriebene, Uebertragung des Euklid sei nicht die erste gewesen? Niemand aber unter den Römern konnte ein grösseres Interesse haben an der Uebersetzung des Euklid in das Lateinische, als die Feldmesser. Unter ihnen aber gab es hochgestellte und hochgebildete Männer, wie Frontin, Balbus, und gewiss noch manche Andere, die wohl nicht nur im Stande gewesen sein mögen, den Euklid in der Ursprache zu lesen, sondern die auch den Trieb in sich fühlten, neben den mehr praktischen Regeln Heron's den wissenschaftlichen Grund für ihre Rechnungs-Methoden kennen zu lernen. Schreibt doch Balbus, der den Kaiser Trajan auf seinem Feldzuge nach Dacien begleitet hatte, an Celsus, F. I, 93, 6—15: „Postquam ergo maximus imperator victoria Daciam proxime reseravit, ... ego ad studium meum tamquam

ad otium sum reversus, et multa velut scripta foliis et sparsa artis ordini inlaturus collegi. Foedum enim mihi videbatur, si genera angulorum quot sint interrogatus responderem *multa:* ideoque rerum ad professionem nostram pertinentium, in quantum potui occupatus, species qualitates condiciones modos et numeros excussi." Wenn nun derselbe Balbus Definitionen des rechten Winkels, der Geraden, der Fläche, der Ebene (s. Anm. 12) anführt in Worten, welche die getreue Uebersetzung der von Euklid gegebenen sind, so können wir allerdings nicht wissen, ob er sie demselben unmittelbar, oder mittelbar aus Heron, 41, entnommen hat. Sollte es aber nicht denkbar sein, dass ein solcher wissenschaftlich strebender und hochgestellter Vermessungsbeamter den Euklid entweder selbst übersetzt oder doch unter seiner Leitung für die Bedürfnisse seiner Untergebenen hätte übersetzen und bearbeiten lassen, dass aber solche Uebersetzungen und Commentare nur in geringerer Zahl vorhanden waren und die Kunde von der Existenz derselben deshalb nicht in weitere Kreise drang, weil die Besitzer jener sie nicht zu gebrauchen und in Folge dessen ihren Werth nicht zu schätzen wussten? Gab es doch unter der grossen Anzahl von Agrimensoren gewiss Männer von griechischer Abkunft — wie denn auch die Namen Nipsus und Epaphroditus auf solche hindeuten, A. 103, 117 — die wohl des Griechischen mächtig und bei einiger Hilfe im Stande waren eine solche Uebersetzung auszuführen. Sollte nicht das in der s. g. Geometrie des Boetius enthaltene Stück aus Euklid eine solche zum Gebrauche der römischen Feldmesser angefertigte Uebersetzung, oder vielmehr ein Auszug aus einer solchen, sein? Deutet nicht das sonst unerklärliche An-die-Spitze-stellen der Definition von „mensura", die Wiedergabe des ersten Grundsatzes durch: „Cum *spatia et intervalla* eidem sunt aequalia, et sibi invicem sunt aequalia", welche Lesart beizubehalten Friedlein gewiss guten Grund gehabt hat, darauf hin? Der, wie es scheint, handschriftlich nicht feststehenden Zeichnung von Grenzsteinen bei der Definition: „Figura est, quae sub aliquo vel aliquibus terminis continetur, terminus vero, quod cujusque est finis", will ich gar nicht gedenken. Wenn wir ferner berücksichtigen, dass Nipsus und Epaphroditus Aufgaben die auf quadratische, A. 106, 121—122, und ersterer auch solche, welche auf Gleichungen des ersten Grades mit 2 Unbekannten hinauskommen, mit Verständniss hindurchführen, so wird wohl meine aus sorgfältiger Prüfung des übersetzenden Abschnittes der vorliegenden dem Boetius zugeschriebenen Geometrie hervorgegangene Ueberzeugung, dass der Euklid, wenigstens zum Theil, unter den Römern nicht unbekannt war, ja dass Uebersetzungen und Bearbeitungen desselben für die Bedürfnisse der Agrimensoren, also noch vor Boetius, wenn auch nicht in grosser Anzahl, existirt haben, dass endlich der genannte Abschnitt der s. g. Geometrie des Boetius ein Stück einer solchen sei, nicht mehr allzu gewagt erscheinen, wie denn auch Hultsch, Metrol. II, 11, der Ansicht ist, die Kenntnisse der

römischen Feldmesser seien bisher wohl unterschätzt worden, und nicht in Abrede stellt, dass Balbus allerdings neben dem Heron auch den Euklid benutzt haben möge.

Mit dem Zusammenbrechen des römischen Reiches ging zwar auch der einst hochgeachtete und angesehene Stand der Agrimensoren unter, nicht aber hörte mit ihm die Nothwendigkeit des Feldmessens auf. Gemessen werden muss und musste allenthalben und zu allen Zeiten, und um so mehr, je öfter der Besitz im Grossen und im Kleinen wechselte, je häufiger Schenkungen an Klöster, u. dergl. vorkamen. Das Messen und Berechnen aber, falls man sich nicht, was freilich oft genug geschehen mochte, mit einer ungefähren Abschätzung begnügte, geschieht nach gewissen Regeln, und dass diese lediglich durch mündliche Ueberlieferung sich fortgepflanzt und erhalten hätten, würde undenkbar sein. Viel näher liegt vielmehr die Annahme, dass, wie die Erinnerung an den einst so einflussreichen Stand der Geometer gewiss nicht sobald erlosch, namentlich in Italien, auch Abschriften der um 450 n. Chr. gesammelten Feldmesser-Pandekten, A. 95, 116, 165, 175, oder doch einzelner dieser Schriften, und dass sich auch Exemplare der Bearbeitungen des Heron und des Euklid noch längere Zeit erhielten.

Wenn man aber endlich fragt, wer denn sonst der Verfasser dieser den Namen des Boetius tragenden Geometrie sein sollte, wenn nicht dieser selbst, so stehe ich nicht an, so gewagt es auch erscheinen mag, zu antworten: Muthmasslich ein praktischer Feldmesser einer späteren Periode, etwa bis zum 9ten oder 10ten Jahrhundert. Denn, was zuerst die Zeit betrifft, so muss, wie die Abacus-Stelle zeigt (und dass diese mit Ausnahme der Tabelle, nicht interpolirt sein kann, ergiebt sich aus der oben erwähnten Behauptung, 7 sei die 3te ungerade Zahl) die Schrift verfasst sein, bevor die Null im Gebrauche war, sie muss aber auch früher entstanden sein, als die ältesten Codices. Diese, der von Erlangen und der von Chartres stammen aber, Friedl. 372; Ch. 517, aus dem 11ten, und auch der schon früher erwähnte Vatican-Codex No. 3123, den Friedlein, 372, mit n_1 bezeichnet und in das 10te Jahrhundert versetzt, gehört, U. 47, dem 11ten—12ten Jahrhundert an; so ergiebt sich die obige Zeitbestimmung. Zu der Annahme ferner, die Schrift rühre von einem praktischen Feldmesser her, mochte derselbe nun dieses Geschäft für sich betreiben, oder vielleicht als Zugehöriger eines Klosters die vorkommenden Rechnungen, Bauten und Vermessungen zu besorgen gehabt haben, führt einmal der Umstand, dass in der betreffenden Geometrie Rechen-Aufgaben, wie sie die praktische Feldmesskunst mit sich bringt, unleugbar die Hauptsache sind, sodann aber auch die Ausdrucksweise. Denn, oft genug finden wir in der Arithmetik, und 1 Mal in der Musik, des Boetius die Geometrie erwähnt, wir lesen daselbst „*geometria*“, 9, 4; 10, 28, 30; 11, 12, 28; 12, 1; 91, 8; 229, 5; „geometrica *forma*“, 11, 4, 6; „*figura* geometrica“, 86, 12; „geometrica *vis*“, 140, 13; „geometrica *consideratio*“, 86, 18; „geometrica *disciplina*“, 11, 26; „geometrica *scientia*“, 86, 19; aber nicht ein einziges Mal „geometrica *ars*“; in der Geometrie hingegen finden wir zwar drei Mal „*geometrica*“, 396, 3; 406, 14; 412, 24; aber fünf Mal „geometrica *ars*“, 373, 22; 401,

4; 403, 1, 4; 425, 26, und noch fünf Mal *„ars“* (offenbar „geometrica“), 390, 2; 391, 3; 393, 1; 395, 3; 402, 28. Man sieht augenscheinlich, der Verfasser der Geometrie kennt dieselbe nicht als eine Wissenschaft, sondern als eine *„ars“*, und zwar weniger in der Bedeutung „Kunst“, A. 85, als „Handwerk“. Dieses war, wie sich aus seiner Darstellung ergiebt, die Anschauung unseres Geometers, C. 189. Er konnte schreiben und ein wenig rechnen, verstand seine Instrumente zu handhaben, war geübt im Zeichnen und Construiren, im Entwerfen der *figurarum* oder *formularum descriptiones,* der *figurae* und *descriptiones,* 373, 22; 389, 18; 391, 5; 392, 4, 10; 393, 4; 405, 21; 409, 18, und berechnete nach mechanisch eingelernten Regeln seine Figuren und Pläne, ohne sich um die Gründe seines Verfahrens sonderlich zu kümmern. Von einem Beweise und der Nothwendigkeit eines solchen hatte er keine Vorstellung, er begnügte sich mit der Anschauung; *ut subjecta descriptio monet,* 389, 4; *ut subjectae descriptionis formula docet,* 401, 20; *ut supter in pictura notatur,* 406, 30; *ut in subjecta figura notatur,* 408, 4; *ut patenter in subjecta formula declaratur,* 408, 24; *ut infra cernitur in figura,* 409, 29; *ut cerni potest in subjecta figura,* 412, 12; *quod subtus facta designat figura,* 413, 8; *ut supter apparet*, 417, 28; *ut in subterius scripta patet figura*, 418, 11; *ut infra scripta perspici potest in forma,* 419, 7 sind seine Ausdrücke. In seinen Händen befand sich eine Copie der gesammelten Feldmesser-Schriften, oder wenigstens einiger, aus welcher er seine Weisheit schöpfte und bei vorkommenden juristischen Controversen sowie geodätischen Aufgaben sich Rath erholte, und auch ein Exemplar einer für die Zwecke der Agrimensoren veranstalteten Uebersetzung oder Bearbeitung des Euklid, vielleicht nach der Theon'schen Ausgabe, Letzteres mochte wohl von früheren Besitzern herrührende Randglossen, grösstentheils feldmesserischen Inhaltes, enthalten, doch auch der Satz vom Innenkreis eines rechtwinkligen Dreiecks, vielleicht bei Eucl. IV, 4, sich unter ihnen befinden, und der Name eines Archytas in der einen oder anderen Beziehung vorkommen. Von dieser Geometrie des Euklid, unter welcher er jedoch nur die Lehrsätze und Aufgaben verstand, denn die Beweise und Constructionen waren in seinen Augen der Commentar des Theon oder eines Anderen, wusste er freilich keinen Gebrauch zu machen, er sah ihn wohl als einen älteren Fachgenossen an, der sich viel mit ebenso sonderbaren und schwierigen als für die Praxis unnützen Dingen beschäftigt habe, und hatte von der Lebenszeit desselben nur sehr dunkle Vorstellungen. Auch unserem Feldmesser nun war das Gerücht zu Ohren gekommen, der berühmte Boetius habe ein Werk über Geometrie verfasst und in demselben den Euklid übersetzt und commentirt; Niemand jedoch hatte dasselbe gesehen oder gelesen, sei es, dass Boetius gar nicht dazu gekommen war, es zu schreiben, sei es, dass er es wirklich geschrieben hatte, dasselbe aber schon früh verloren gegangen war. Dagegen gelangte die Arithmetik und Musik des Boetius in seine Hände. Er verstand sie zwar nicht völlig, und las sie wohl auch nicht ganz, sondern etwa nur den Anfang, und den von den figurirten, den heteromeken und promeken Zahlen handelnden Abschnitt, 86—136, der ihn wegen seines an das Geo-

metrische streifenden Inhaltes und der beigefügten Figuren besonders ansprechen musste. Im Prooemium zur Arithmetik nun fand er die Ansicht aufgestellt, die Zahl sei das Fundament der Geometrie, was er, gewohnt Alles von seinem beschränkten Standpunkte aus zu beurtheilen, dahin verstand, als habe letztere zum wesentlichsten Gegenstande die numerische Berechnung der Figuren, eine Meinung, welche seiner eigenen Auffassung um so mehr entsprach, als ja gerade die Flächen-Berechnung seine stete Beschäftigung war. Diese Bemerkung nun in Verbindung mit jenem Gerücht liess in diesem Feldmesser, der nach unserem Massstabe gemessen unwissend, für seine Zeit jedoch in gewisser Beziehung gelehrt war, und es jedenfalls zu sein glaubte, den Gedanken aufkommen, die fehlende Geometrie als dritten Theil zu den beiden anderen, der Arithmetik und Musik, hinzuzusetzen oder wieder hinzuzusetzen, und zwar im Namen des Boetius. So schrieb er denn aus der ihm vorliegenden Uebersetzung eine Anzahl von Lehrsätzen und Aufgaben (denn nur diese waren ja seiner Meinung nach von Euklid) ab, und gab dies für die von Boetius herrührende Uebersetzung aus; da er selbst wenig genug davon verstand, konnte es leicht geschehen, dass auch Manches aus den feldmesserischen Randglossen in den Text gerieth, vielleicht nahm er auch das Eine oder Andre absichtlich in denselben auf. Dazu fügte er die Uebersetzung der zu den drei ersten Aufgaben gehörigen Constructionen und Beweise, welch' letztere nach seiner Ansicht nicht von Euklid, sondern von Theon oder irgend einem Anderen herrührten, und stellte dieselbe als Commentar des Boetius hin. Sobald als möglich jedoch verliess er den Euklid und den wissenschaftlichen Theil der Geometrie, auf dem er sich nicht sicher fühlte, und wandte sich zu Gegenständen, die ihm geläufiger waren, zu einigen Rechenregeln, die er vielleicht um so eher in die Geometrie aufnehmen zu dürfen glaubte, da er ja auch bei Euklid Arithmetisches eingeschaltet fand, und zur Berechnung der Figuren, welch' letztere er aus den Schriften der Feldmesser compilirte. Allenthalben aber war er bemüht, seiner Schrift den Anstrich zu geben, als rühre sie von Boetius her. In dieser Absicht glaubte er die bizarre Behauptung, die Eins sei keine Zahl und dürfe nicht mitgezählt werden, eine Behauptung, die er aus der oben angeführten Stelle 117, 1 des Abschnittes über die heteromeken Zahlen herausgelesen, und die ihm überdies vielleicht als tiefe Weisheit besonders imponirt hatte, vor Allem in der Geometrie verwerthen zu müssen, und that dies bei der Erklärung des Abacus und beim Sieben-Ecke. Der Uebersetzer der Euklidischen Elemente ferner, welcher vor Boetius gelebt hatte, hatte in der (31ten) Definition des Rechtecks das ἑτερόμηκες des Euklid sinngetreu und der Anschauung entsprechend durch *parte altera longius* wiedergegeben, ohne zu ahnen, dass sich Boetius später in seiner Arithmetik desselben Ausdruckes in einer anderen Bedeutung bedienen würde. Unser Feldmesser nun, dem nur diese Uebersetzung, nicht aber der griechische Text des Euklid vorlag, konnte nicht wissen, welche Worte des letzteren durch *parte altera longius* ausgedrückt waren, und brachte, abermals in der Absicht, die Schrift als von Boetius herrührend erscheinen zu lassen, die genannte Bezeichnung in Be-

ziehung zu dem gleichlautenden Ausdrucke des letzteren in demselben Abschnitte über die heteromeken Zahlen, und glaubte um so sicherer zu gehen, da er hier dieselbe Figur fand wie bei Euklid. Er ahnte nicht, dass diese Berufung auf Nicomachus, und jene Vernachlässigung der Eins beim Zählen, durch welches Beides er die Autorschaft des Boetius gerade recht glaubhaft gemacht zu haben meinte, ihn einst verrathen würde. In derselben Absicht, seine Schrift als von Boetius verfasst erscheinen zu lassen, gedenkt er einige Mal der Pythagoriker und Platoniker, nur nicht da, wo dieser es gethan haben würde und wo wir es erwarten müssen; aus gleichem Grunde spricht er von seiner Arithmetik, von seiner Uebersetzung des Euklid und von seinem Commentar zu demselben; zu demselben Zwecke legt er dem Boetius als Anrede an Symmachus die Worte in den Mund: „mi Patrici geometrum exercitissime“, indem er offenbar „Patricius“ für einen Namen hält, und durch das sinnige Compliment: „Geübtester der Geometer“ alle erforderlichen Regeln der Höflichkeit erfüllt glaubt. Ein Prooemium zur Geometrie aber schrieb er nicht. Welchen Gedanken, namentlich welchen Gedanken, der dem Boetius hätte angehören können, hätte er auch in einer solchen Einleitung auszuführen vermocht? Auf diese Weise, meines Erachtens, entstand die Geometrie jenes Feldmessers, die er, vielleicht in guter Absicht, als eine in seinen Augen vortreffliche Schrift, dem Boetius beilegte. Den vierten Theil des Werkes desselben, die Astronomie, gleichfalls herzustellen oder wieder herzustellen hat er wohlweislich unterlassen, er hätte dabei unangenehm „in die Brüche“ kommen können.

So sehr wir nun auch vom heutigen Standpunkte aus das Verfahren dieses Feldmessers missbilligen müssen, so sehr wir geneigt sein werden, ihm zu zürnen, da er das Urtheil der die Wahrheit suchenden Nachwelt irre geleitet hat, so wenig haben wir gleichwohl Ursache, allzustreng mit ihm in's Gericht zu gehen. Denn, die ganze bisherige Untersuchung betraf die Frage nach der Aechtheit oder Unächtheit der den Namen des Boetius tragenden Schrift über Geometrie, und wir gelangten, gestützt auf die vorgebrachten Gründe, zu der festen Ueberzeugung, dass dieselbe nicht von Boetius herrühren könne. Das Resultat war demnach ein negatives. Ein solches ist zwar immerhin für die Feststellung der Wahrheit von hohem Werthe, vermag jedoch nicht, volle Befriedigung zu gewähren. Sollte aber wirklich die ganze, lange, mit der peinlichsten Sorgfalt durchgeführte Forschung mit einem verneinenden Erfolge abschliessen, sollten wir nicht etwas Positives durch dieselbe erfahren haben? Dies scheint in der That der Fall. Gewannen wir doch mit der Ueberzeugung, Boetius könne nicht der Verfasser der in Rede stehenden Geometrie sein, die andere, die in derselben enthaltene Uebersetzung eines Theils der Euklidischen Elemente sei ein Bruchstück einer für die Bedürfnisse der römischen Feldmesser veranstalteten Uebersetzung oder Bearbeitung des Euklid. Eine Uebersetzung des Euklid in das Lateinische zur Zeit der römischen Agrimensoren, mehr als tausend Jahre vor derjenigen Zamberti's, noch vor Boetius, vielleicht sogar vor Theon! Wohl möchte Mancher diese Folgerung, welche die Boetius-Schrift trotz ihrer Unächtheit immer noch als wichtig

genug für die Geschichte der Mathematik erscheinen lässt, allzu kühn finden. Allein wir wissen, dass in der That um die genannte Zeit bereits Uebersetzungen des Euklid existirten. Der Veroneser Palimpsest No. 38, jetzt No. 40, nämlich, auf welchen schon Blume aufmerksam gemacht hat, F. II, 65, Anm. 114, und dessen Friedlein, Praef. VI, als noch nicht enträthselt gedenkt, ist seitdem entziffert worden. Er enthält, wie Mommsen[7]), 153—156, mittheilt, Theile des Livius und Virgilius, ferner philosophische Gegenstände, und endlich sechs Blätter: *„Euclides Latine factus“*. Die ersteren beiden sind bereits veröffentlicht, das Bruchstück des Euklid haben wir von Studemund noch zu erwarten. Als Zeit aber, aus welcher die ältere Schrift dieses Palimpsestes (die spätere Ueberschreibung gehört dem 9ten Jahrhundert an) stammt, bestimmt Mommsen, 176, das vierte Jahrhundert n. Chr. Wurden wir also durch innere Gründe zu der Ueberzeugung geführt, es liege in der Boetius-Schrift ein Theil einer schon früh verfassten, lateinischen Uebersetzung Euklid's vor, so erhalten wir nunmehr in den äusseren Thatsachen den Beweis dafür, dass diese Ansicht nicht so gewagt ist, wie es vielleicht Anfangs scheinen möchte. Fragen wir aber, wie es möglich gewesen, dass sich eine aus so früher Zeit stammende, wohl nur in verhältnissmässig wenigen Exemplaren vorhandene Schrift bis auf unsere Tage erhalten habe, so kann die Antwort nur die sein: Weil sie, durch den berühmten Namen des Boetius geschützt, dem Untergange, welchem so manches andere Werk im Laufe stürmisch bewegter Jahrhunderte verfiel, entronnen ist. Dazu aber hat, freilich ohne es zu wissen und zu beabsichtigen, jener Feldmesser, welcher so lange das Urtheil der Nachwelt irre geführt, und sich nur durch übergrosse Schlauheit verrathen hat, wesentlich beigetragen. Wir haben daher immerhin Ursache, ihm in dieser Hinsicht dankbar zu sein.

Blicke ich jetzt am Schlusse auf die vorliegende Untersuchung zurück, so bin ich selbst nicht am Wenigsten von dem eigenthümlichen Laufe überrascht, welchen dieselbe genommen. Ihr Zweck war die Prüfung der Aechtheit oder Unächtheit der dem Boetius zugeschriebenen Schrift über Geometrie. Während mich nun der ganze Gedankengang in dieser Frage zur Opposition gegen die von Cantor ausgesprochene Ansicht treibt, führen mich, und es gereicht mir dies zu besonders freudiger Genugthuung, dieselben Schlüsse ebenso ungesucht und naturgemäss wie unerwartet in einer anderen Beziehung zur Conjunction, und zur Ueberzeugung von der Wichtigkeit des erhaltenden Einflusses der römischen Agrimensoren, auf welchen Hultsch und Cantor, A. 4, 185, aufmerksam gemacht haben.

---

7) „Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften. Aus dem Jahre 1868. (Philologisch-historische Abtheilung.) Berlin 1869“. Die Hinweisung auf diese den Veroneser Palimpsest betreffende Stelle, den ich noch nicht entziffert glaubte, ebenso wie die auf die bereits erfolgte Veröffentlichung des in Anm. 1) erwähnten Papyrus Rhind, und endlich auf die von Valerius Maximus begangene Verwechselung der beiden Euklide verdanke ich der Güte und Freundlichkeit des Herrn Cantor, welchem ich mich deshalb ausserordentlich verbunden und verpflichtet fühle.

Abhandlungen

zur

Geschichte der Mathematik.

Drittes Heft.



Leipzig,

Druck und Verlag von B. G. Teubner.

1880.

משנת המדות

MISCHNATH HA-MMIDDOTH

(LEHRE VON DEN MAASSEN)

AUS EINEM MANUSCRIPTE DER MÜNCHENER BIBLIOTHEK, BEZEICHNET
COD. HEBR. 36,

ALS ERSTE GEOMETRISCHE SCHRIFT

IN HEBRÄISCHER SPRACHE HERAUSGEGEBEN UND MIT EINIGEN BEMERKUNGEN
VERSEHEN VON

DR. M. STEINSCHNEIDER
(BERLIN 1864);

INS DEUTSCHE ÜBERSETZT, ERLÄUTERT UND MIT EINEM VORWORT VERSEHEN

VON

HERMANN SCHAPIRA
AUS ODESSA, STUD. MATH. IN HEIDELBERG.

Abkürzungen.

St. = Steinschneider.
M. b. M. = Mohamed ben Musa.

Vorwort.

I.

Eine hebräische Schrift betitelt „מִדּוֹת, Maasse“, wird von mehreren Autoren, besonders von רש"י (Salomon ben Isak, vulgo Raschi, gest. 1105), dem berühmten Comentator des Talmuds, der Bibel, etc. unter verschiedener Specialbenennung citirt. Zuweilen wird nämlich diese Schrift „משנת המדות“, die Mischna der Maasse genannt, zuweilen aber „מס' מדות“ Traktat der Maasse, מס' Abkürzung von מסכת Traktat, oder auch nach anderer Leseart מ"ט מדות 49 Maasse, ja zuweilen kommt diese letztere Leseart anstatt in Ziffern, in Worten deutlich ausgesprochen „ארבעים ותשע מדות“ vor, und endlich findet man noch den Namen „ברייתא“ Boraitha (externa, im Gegensatz zu der kanonischen Mischna) der Maasse. Man hielt allgemein diese Schrift für verloren, wie manche andere Schriften, die im Talmud citirt sind. Der Vernachlässigung war allerdings eine Schrift dem Namen nach, etwas Geometrisches oder Geodätisches enthaltend und nicht direct religiöse Fragen behandelnd, viel eher ausgesetzt, als andere direct religiöse Abhandlungen, da der Talmud und seine Schriftsteller diesen religiösen Zweck in erste Linie stellten, alles andere nur insofern behandelnd, als dasselbe in dieses Gebiet eingreift. Was im Uebrigen den Inhalt betrifft, so war die Zahl der verschiedenen Meinungen darüber nicht geringer, als die der verschiedenen Benennungen.

Herr Dr. Steinschneider gab zum siebenzigsten Geburtstage des Meisters Zunz (10. August 1864) eine Schrift genannt Mischnath Hammiddot, als erste geometrische Schrift in hebräischer Sprache mit einer kurzen Einleitung (auf die ich verweisen muss), heraus aus einem Funde, den er zwei Jahre früher in einem Cod. Hebr. 36 bezeichneten Manuscripte der Münchener Bibliothek gemacht hatte.

Nach der Meinung des Herausgebers sei diese Schrift identisch mit jener von Raschi und anderen citirten, und für den Fall, dass die Leseart מ"ט, 49, richtig wäre, so müsste, wenn diese Ziffer die Zahl der Sätze an-

geben sollte, angenommen werden, dass, da in der vorliegenden Schrift sich nur 42 Sätze vorfinden, entweder 7 Sätze verloren gegangen seien, oder, dass manche Sätze zu theilen wären.

Anmerkung. Auf die Einzelheiten der Citate, und wie von ihnen diejenigen, die sich auf den gleichnamigen Traktat im Talmud (Beschreibung der Stiftshütte) beziehen, zu sondern sind, näher hier einzugehen ist mir leider nicht möglich, weil ich nicht weitläufig werden darf. Indess kann ich nicht unterlassen, mindestens so viel zu bemerken, dass die verschiedenen Citate in zwei Kategorien zu theilen sind: die einen haben einen halachischen, die andern einen aggadischen Charakter; die ersteren gehören eher der Mischna, die andern dagegen der Boraitha, ja sogar der Gemara an. Fasst man dieses ins Auge und bemerkt noch dabei, dass nicht alle citirten Stellen in unserer gegenwärtigen Schrift sich vorfinden, und dass gerade diejenigen sich nicht vorfinden, die eher den Charakter der Boraitha oder Gemara haben, während unsere Schrift, wenn überhaupt echt (ich meine nicht nachgeahmt), doch gewiss den Stempel der Mischna an sich trägt, sowohl der Sprache und des Styles wegen, als auch dem Charakter des Inhaltes nach; bemerkt man dieses, sage ich, so gehört gar nicht zu viel Phantasie dazu (jedenfalls nicht mehr, als bereits für manche Vermuthungen über diese Schrift in Anspruch genommen wurde), um folgende Frage sich zu stellen: War nicht vielleicht zu dieser Mischna auch eine Gemara, wie zu den andern Theilen der Mischna, vorhanden und führen somit die verschiedenen Benennungen nicht etwa zu einem Widerspruche, sondern haben alle vielleicht ihren richtigen Grund? Dieses um so mehr, da einerseits diese verschiedenen Benennungen mit den angeführten zwei Charakterzügen sich gut vertragen, und andrerseits die sich nicht vorfindenden citirten Stellen direct auf eine ähnliche Vermuthung hindeuten. Dass der Stoff nicht ungeeignet ist talmudisch behandelt zu werden, zeigt hinreichend das Factum, dass mancher Satz daraus im Talmud wirklich citirt und behandelt wird. Man könnte nur zweifeln ob man es wagen darf ein so hohes Alter für diese Schrift zu vermuthen; dieses ist und bleibt, wie wir weiter sehen werden, vorläufig unentschieden. Jedenfalls ist die Sprache und der ganze Charakter so täuschend ähnlich einerseits, und ist es andrerseits in der Literatur eine solche Seltenheit einen so genauen und reinen Mischna-Styl anzutreffen, dass ich hier von Echtheit und Unechtheit zu sprechen berechtigt zu sein glaubte, wiewohl kein Verfasser genannt ist. Der Einzige, der einen der Mischna verwandten Styl besässe, wäre, so weit mir bekannt ist, vielleicht Maimonides; aber auch er schreibt bei Weitem nicht so täuschend genau. Mit einem Worte: diese täuschende Genauigkeit der Aehnlichkeit geht meines Erachtens so weit, dass wenn die Schrift nicht zur wirklichen Mischna gehört, so muss der Verfasser unbedingt die Absicht gehabt haben, täuschend ähnlich jenem wohlbekannten Style der autorisirten Mischna zu schreiben, und daher der Ausdruck echt. (S. Schlussbemerkung.) Was die Midraschische Spielerei mit den Bibelversen betrifft, die Herr Dr. Steinschneider darin findet, so glaube ich zur Genüge gezeigt zu haben, dass solche angeführte Stellen durchaus nicht etwa müssig, sondern meistentheils nothwendig sind, um jedesmal irgend etwas zu begründen, sei es die Richtigkeit des behaupteten Satzes selbst, sei es in Betreff der Definition, sei es in Betreff der Terminologie; und das ist durchaus im Charakter der Mischna. Der aufmerksame Leser findet diese Bemerkungen an den betreffenden Stellen.

II.

Auf Veranlassung meines hochverehrten Lehrers, Herrn Professor M. Cantor, habe ich die Uebersetzung dieser Schrift ins Deutsche und eine Erörterung derselben vorgenommen. Es lag mir durch die Freundlichkeit der Bibliotheksverwaltungen von München und Heidelberg das Münchener Manuscript zur Einsicht und genauerem Studium vor, wofür ich den genannten Verwaltungen, und insbesondere Herrn Oberbibliothekar Professor Zangemeister, meinen innigsten Dank hiermit ausspreche.

Bei der Gelegenheit möchte ich etwas Näheres über das Manuscript selbst mittheilen. (Ich bin allerdings nachträglich von Herrn Dr. Steinschneider auf seine Beschreibung im Catalog der Münchener H.-S. S. 12 aufmerksam gemacht worden; da es mir aber leider noch nicht möglich war Vergleiche anzustellen, so glaubte ich die folgende Beschreibung dem Leser nicht vorenthalten zu dürfen, weil es einerseits behufs der Beurtheilung der Zeit, des Ortes und Charakters vielleicht dienlich sein könnte, diese Beschreibung im Zusammenhange mit der Schrift vor Augen zu haben, und weil andrerseits hier sich vielleicht noch manches beachtenswerthe Wort für den weitern Forscher vorfinden könnte.)

Das Ganze ist eine Sammlung mehrerer Handschriften, die ihrem mehr oder weniger mathematischen Inhalte nach einander sehr verwandt sind. Die Hauptwerke darin sind eigentlich von einer Hand geschrieben und zwar in Quadratschrift; dagegen sind einige kleinere Abhandlungen in sogenannter Raschi-Schrift, eigentlich Spanisch-Hebräische-Cursivschrift. In letzterer Schrift sind auch mehrere Bemerkungen, Zusätze, Erläuterungen und Anhänge zwischen jene grössern Werke eingeschoben. Der Anfang fehlt, trotzdem dass der Einband wie der Inhalt verhältnissmässig sehr gut erhalten ist. Die Ränder derjenigen Abhandlungen, die in der zweiten Schrift geschrieben sind, tragen vom Buchbinder zur Hälfte weggeschnittene Aufschriften. Eine Art von Titelblatt findet sich nicht am Anfang des Ganzen, aber am Ende desselben. Vielleicht ist dieses Titelblatt nachträglich vom Bibliothekar bestellt und so behandelt worden, als hätte man es mit einer Schrift zu thun, die von links nach rechts gelesen wird. Eher aber möchte ich annehmen, dass man es hier mit zwei Büchern zu thun hat, die später zusammen gebunden wurden. Zu einem derselben dürfte vielleicht alles in Quadratschrift Geschriebene gehören, welches grössere Ränder hatte und deshalb verschont blieb, während die andern Abhandlungen im Texte von grösserem Formate waren und beim Zusammenbinden mehr leiden mussten. Dadurch wird auch erklärlich, dass unter den auf dem nachträglichen Titelblatte aufgezählten Werken manche fehlen. Der Inhalt des in Quadratschrift ausgeführten Titelblattes ist folgender:

ספר הפלוסופיא אשר בו נכתב הספירה:
וגם התכונה: ומעשה מרכבה: וחמשה עשר
ספרים האקלידה ממדת הארץ: גדר ארסטוטלוס
השם בספר פארי ארמניאס הועתק מלשון
הגרי אל לשון עברי אני משה בר שמואל
בר יהודה בן תבון זל מרמון ספרד
ונשלמה העתקתו בי"ז אלול שנת חמשת אלפים
ושלשים

Wörtlich:

Das Buch der Philosophie. Darin geschrieben: das Zählen (Arithmetik, gemeint wahrscheinlich die von Nikomachus, vgl. weiter unten), auch Astronomie, und Maasse Merkabah (kabbalistische Gottheitslehre), und fünfzehn Bücher des Euklid von Erdmessung (wörtlich Geometrie; in eigentlichen hebräischen Schriften nie so genannt, sondern Messkunst); Aristotelische Definition der Nomina im Buche *Περι ἑρμηνειας*; übersetzt aus dem Arabischen ins Hebräische von mir Moses ben Samuel ben Tibbon aus Granata in Spanien; und die Uebersetzung war beendigt am 17ten Elŭl 5030 (1270).

Bemerkenswerth sind dabei zwei Hauptpunkte: a) Das ganze Manuscript wird zusammen mit einem Namen „das Buch der Philosophie“ genannt. b) Es ist aus dem Arabischen ins Hebräische übersetzt von Moses ben Tibon im Jahre 1270 n. Chr.[1])

1) Die freundliche Bemerkung des Herrn Dr. Steinschneider, mit der er nach gefälliger Durchsicht dieser Zeilen mich brieflich beehrte, dass nämlich die Schlüsse aus den Ueberschriften in den Manuscripten vollkommen verfehlt wären, da dieselben von unwissender Hand gemacht seien, diese Meinung kann ich leider nicht theilen. Nach meiner unmassgebenden Ansicht muss in dem vorliegenden Falle der Schreiber des Titelblattes eine Quelle gehabt haben, aus der er sagen konnte: übersetzt durch mich (in erster Person) Moses u. s. w., und dabei Tag, Monat, Jahr und Ort der Beendigung der Uebersetzung angeben? Ich sage ausdrücklich Beendigung der ganzen Uebersetzung (wie es hier ausdrücklich heisst), da einzelne dieser Uebersetzungen Angaben von anderem Datum und Ort enthalten, wie es z. B. beim Euklid heisst (in dritter Person), Uebersetzung des grossen Weisen Moses, Sohn des Philosophen der Gottesgelahrtheit, Samuel ben Juda ben Saul ben Tibbon; er übersetzte es in Montpellier. Beim Schlusse des Euklid findet sich aber wörtlich jene letzte Phrase des Titelblattes vom Uebersetzer in der ersten Person; dann unterschreibt noch der Schreiber wörtlich: und habe es geschrieben ich Moses, Jonah Sohn des David des Griechen (?) in Konstantinopel 5240 (1480). Dieses ist ebenfalls in Quadratschrift. Alles macht auf mich mindestens den Eindruck, als wären die andern Schriften später mit dem Hauptwerke zusammengebunden worden. Jedenfalls finde ich, dass dem historischen Forscher, für den diese Arbeit überhaupt als Material zu betrachten sein sollte, jenes Titelblatt nicht ganz verschwiegen werden dürfte. Dem Forscher dient manchmal eine geringfügige treue Wiedergabe der Thatsache zur Entdeckung wichtiger Merkmale.

Daraus würde man im ersten Augenblick zu entnehmen geneigt sein, dass auch unsere Schrift aus dem Arabischen übersetzt sei; aber ein solcher Schluss stellt sich bei näherer Betrachtung als etwas übereilt heraus. Zunächst fehlt unsere Schrift in der angeführten Detaillirung des Inhaltes der Uebersetzung. Auch fehlt nicht sie allein, so dass die Möglichkeit der Annahme, dass sie etwa ihres unbedeutenden Rauminhaltes wegen es nicht verdient hätte in Reihe der viel voluminösern Werke gezählt zu werden ausgeschlossen ist. Es fehlen noch manche andere Schriften, die in demselben Manuscript enthalten sind. Ich will hier den wirklichen Inhalt des Manuscriptes kurz angeben:

1) מעשה חושב, Maasse Choscheb, Rechenkunst (und nicht etwa: Kunstwerk, wie jemand in einer Notiz dort glaubte), enthaltend eine ziemliche Zahlentheorie, von Rabbi Levi ben Gersom. Dieses Werk ist ein selbständiges und hat insofern etwas besonders Interessantes in sich, als der Verfasser bestrebt ist den Rang der Ziffern auch ins Hebräische einzuführen durch Einführung der Null unter Beibehaltung der sonst üblichen Bezeichnung der Ziffern durch Buchstaben.

2) Uebersetzung des Euklid aus dem Arabischen, wobei Vergleiche mit einem griechischen und einem lateinischen Texte am Rande sich finden. Darin finden sich Commentare zu einigen Capiteln derselben von Abunassar Alpharabi, von Mohamed ben Mohamed Alpharabi, worin die Ansicht des Jacob ben Mochir angeführt wird, auch dessen Beweise, und Erläuterungen zu manchen Figuren; von Abu Ali Alhassan ben Alhassan, von Joseph (wahrscheinlich Joseph ben Isaak Hajisraeli, der sehr oft in dem Manuscripte vorkommt).

Letzterer citirt aus türkischen Werken (ספרי ישמעאל, und nicht ערבי wie es heissen würde wenn arabische Schriften gemeint wären) den Satz, dass die Höhe im rechtwinkligen Dreieck, auf die Hypotenuse gefällt, die mittlere Proportionale sei zwischen beiden Abschnitten der Hypotenuse. (Es sei beiläufig bemerkt, dass dieser Satz bei Mohamed ben Musa sich nicht findet, ebenso nicht bei Alkarkhi und Beha-Eddin, wie auch in unserer Schrift; in letzterer findet sich dagegen allerdings die Aehnlichkeit beider durch die Höhe entstandenen rechtwinkligen Dreiecke zu einander und zum ganzen Dreiecke Art. IV, b). Vor dem 14. Cap. heisst es: hier folgen zwei Capitel, welche zum Euklid passen und sind von Hypsikles. Und schliesst dieses mit der Bemerkung, es sei übersetzt von dem grossen Weisen Moses ben Samuel ben Juda ben Saul ben Tibon, die Uebersetzung geschah in Montpellier.

3) Zurath hooretz, צורת הארץ von Abraham ben Chija Hanassie, (mathematische Geographie).

4) Hakadur, ספר הכדור (Himmelglobus).

5) Hoëchod, ספר האחד von Ibn Esra. (Eigenschaften der ersten zehn Zahlen.)

6) Unsere Schrift, ohne Ueberschrift. Am Ende heisst es: hiermit schliesst das Capitel und mit ihm die Mischnath Hammiddoth.

7) Darauf folgen mehrere Proportionen und Verhältnisse des ein- und umgeschriebenen Quadrates und Dreieckes zu den Kreisen u. s. w., ohne Angabe des Verfassers; dann ebenso einige algebraische Aufgaben.

8) Cheschbon Hamahalachoth ספר חשבון המהלכות von Abraham ben Chija Hanassie. (Berechnung der Planeten-Bewegungen.)

9) Commentar und Bemerkungen zu der Arithmetik von Nikomachus von einem Schüler des Jacob ben Ischak ben Alzabah Alcanari und Säuberung des genannten Buches von der fehlerhaften Auffassung des Chabib ben Bacharir Al-nestor, der es aus dem Syrischen ins Arabische übersetzt hatte für den berühmten Himiam Takad ben Alhassan. (Hier wird wiederum Abu Joseph oft citirt.)

10) Herstellung einer astronomischen Tafel, genannt Zapichah, von Abu Ischak ben Alsarkalah. Vollendet durch mich Moses ben Jonah, Donnerstag 3. Iior, 17. nach dem Paschah Feste 5245 (1485). Bemerkungen von Comtina über die Einrichtung des Instrumentes (17. Tebet 5223, 1462).

11) Aufsatz über Astronomie von Abraham ben Chija Hanassie.

12) Einrichtung der Kupferinstrumente. ספר תקון כלי הנחשת Astronomische oder astrologische Instrumente. (Comtina in dritter Person.)

13) Ein Werk (die Ueberschrift scheint oben abgeschnitten zu sein),[1]) in drei Abtheilungen: Arithmetik, Geometrie und Musik, worin die ersten zwei Theile etwas eingehend behandelt sind, dagegen ist die Musik nur erwähnt. Uebrigens sind auch die ersten mehr beschrieben, als eigentlich behandelt. (In der Geometrie wäre vielleicht der Satz hervorzuheben, dass die Summe der Winkel eines n-Ecks, $2(n-2)$ R beträgt, was übrigens nicht als Formel angegeben, sondern, wie natürlich zu erwarten ist, an einigen Beispielen nur gezeigt ist. Dieser Satz findet sich weder in unserer Schrift, noch bei Mohamed ben Musa, noch bei Alkarkhi oder Beha-Eddin. Bei allen diesen wird mit Winkeln nicht operirt, höchstens wird bestimmt, ob sie recht, spitz oder stumpf sind, und zwar auch dieses nicht direct, sondern durch Anwendung des Pythagoräischen Satzes auf die Seiten, und also als Kennzeichen $a^2 + b^2 \overline{\overline{\lessgtr}} c^2$. Im Uebrigen scheint der Verfasser sich auf

1) Nach Herrn Steinschneider sei dieses von Abraham ben Chija. Was die Nummer 13 anstatt 16 betrifft, so kommt das daher, dass ich kleine, eingeschobene Anhänge nicht gezählt habe.

das Werk von Nikomachus zu beziehen, wie das die Eintheilung verräth; allerdings ist der Verfasser bemüht, die Quelle aller dieser Weisheiten in Bezalel, dem Baumeister der Stiftshütte in der Wüste, (Exodus XXXI, 1—6; s. d.) zu finden[1]). Das Werk hat insofern Interesse, als man durch dasselbe einen ungefähren Ueberblick über den verloren gegangenen geometrischen Theil des Werkes von Nikomachus bekommen könnte.

14) Einige Artikel über manche Aristotelische Definitionen von Abu Alkass ben Aderes. Darin sind citirt Abu Akr Alchaman ben Takr Ibn Sina, Abu Alchananah ben Tolmeus, Alraschid, Abu Alchananah Joseph ben Jechija Hajisraeli aus dem Abendlande. Abuchmed Algasali Hamabo. המבא von Ibn Esra (?).

15) Erläuterung der Himmelserscheinungen, Auszug aus Ben Raschid, von Levi ben Gersom.

16) Wechsel der Blicke חלוף המבטים, (optisches Werk), von Euklid. Anfang: Der Verfasser sagt, da ich das Buch, das meinen Namen trägt, 13 Artikel als Vorbereitung zum Almagest, vollendet habe, so u. s. w.

17) Das Buch der Spiegel ספר המראים, von Euklid.

18) Erläuterung von Rabbi Simon Mutut über Linien die sich niemals treffen (Asymptoten). Ausführliche Beweisführungen über die Möglichkeit von Asymptoten überhaupt, und als Beispiel die Asymptoten der Hyperbel.

19) Die Messkunst, חבור חכמת התשבורת von Levi ben Gersom.

Hierauf folgt die oben erwähnte Aufschrift. Es bleibt also in Betreff unserer Schrift nicht ganz entschieden, ob sie den Uebersetzungen, oder der selbständigen Verfassung, wenn auch nach vorliegenden Modellen, angehört, da mehrere Werke und Abhandlungen von beiderlei Arten in demselben Manuscripte zusammengeschrieben sind, und zwar alles so durcheinander, dass dieselben nach dieser Eintheilung schwer zu trennen sind. Allerdings ist es bei den Uebersetzungen ausdrücklich gesagt, das sie solche seien, während bei den selbständigen Werken ein Stillschweigen die Selbständigkeit verstehen lässt. Da unsere Schrift nun unter den Uebersetzungen nicht gezählt ist, so bleibt jedenfalls die Möglichkeit, vielleicht auch die Wahrscheinlichkeit, sie als eine selbständige Abhandlung gelten zu lassen.

III.

Wenden wir uns nun zu der Sprache unserer Schrift. In I. erwähnte ich, dass die Sprache unserer Schrift auf ein früheres Alter derselben verweise. Dieses muss von zwei Standpunkten betrachtet werden: nämlich

1) Dass man beim Bau der Stiftshütte wirklich geometrische Kenntnisse anwandte, wie z. B. Kenntniss des Pythagoräischen Dreiecks, siehe weiter unten Art. IV. a, [1]a.

von Seiten des Styles und von Seiten der Terminologie, ich meine der mathematischen Terminologie.

Was erstere betrifft, so ist derselbe unverkennbar der leibhaftige Styl der Mischna. Schon der Anfang:

בארבעה דרכים (Art. I, a): In vier Wegen, Arten.
ואלו הן (Art. I, a): und zwar
זה הכלל (Art. I, a): die Regel ist.

Und so geht es fort:

איזו היא? זה ה־! (Art. I, b): was ist —? das was —!
שנאמר (Art. I, b); es heisst; und nicht das später gebräuchlichere Aramäische דכתיב, von derselben Bedeutung. והגג עצמו היא המשיחה als Refrain zum Schlusse von b, c, d, h. Ich lege auf diese Stellen um so mehr Gewicht, da alle diese Paragraphen sich bei Mohamed ben Musa nicht finden.
כיצד Wie so?
כבר אמרו es ist schon gesagt, (in der 3. Person Pluralis; sie (die Weisen) haben schon gesagt).
חסר ועולה חסר ועולה (Art. II, k); nimmt immer mehr und mehr ab.
מה תלמוד (Art. V, c); warum heisst es nun? eigentlich, was lernst du aus —
לפי שאמרו (Art. V, c); weil man sagte.
זה הכלל כל ש־ (Art. V, d); die Regel ist, alles was —
ג׳ דברים נאמרו (Art. V, d); drei Dinge sagt man; eigentlich: drei Fälle sind zu unterscheiden.
יחשב כדרכו (Art. IV, b); der rechne nur fort nach seiner Art.
ובלבד ש־ (Art. V, b); mit der Bedingung, dass —
הנתונה על הארץ (Art. V, c); welche liegt auf dem Boden;
הרי הוא אומר (Art. V, c); heisst es ja;
הא למדת (Art. V, c); so hast du gelernt u. s. w.[1]).

Was die wissenschaftliche Terminologie betrifft, so ist bemerkbar, dass die technischen Ausdrücke älter sind, als die in der arabisch-hebräischen wissenschaftlichen Literatur geläufigen, z. B. bei Abraham ben Chija Hanassie, Maimonides, Ibn Esra, Ben Gersom, ben Tibon u. s. w. So zum Beispiel findet man in unserer Schrift nicht die wörtlich aus dem Arabischen genommenen Ausdrücke קֹטֶר, Durchmesser, תשבורת im Sinne von Flächeninhalt (تكسيب) auch Körperinhalt תושבת für Basis, מעוין (معينة) für

1) Herr Steinschneider macht noch auf „מכאן ואילך צא וחשוב“ aufmerksam; eine Phrase, die in Jezira auch vorkommt.

Rhombus, vergl. III, 1 mit Mb.M; sondern die später in diesem Sinne nicht vorkommenden חוט, Faden, משיחה Ausmessung, arab. مساحة und تكسير was wohl zu beachten [Marre's Bemerkung über das erstere (S. 6 Anmmerkung) und Zeile 2 „superficie" sind ungenau und widersprechend, St.]; קבע, סוף Grund-Endfläche für Basis.

Ebenso ist auffallend die weibliche Form für Viereck, Dreieck, Kreis und Bogen, was die Ergänzung von צורה Figur voraussetzt[1]). Ebenso findet sich hier nicht das später sehr geläufige גשם für Körper, und ist dafür das später in diesem Sinne sehr seltene גוף. Für Multipliciren finden wir hier צרף, während später כפל (dupliciren) gebräuchlich ist; (wegen des ב siehe NB. zum Schlusse des Vorwortes).[2])

Dieses würde, wenn unsere Schrift überhaupt echt ist, dafür sprechen, dass sie mindestens älter als die arabisch-hebräische Periode ist. (Unter einer solchen Periode verstehe ich die Zeit von etwa 740—1200.)

IV.

Die Aehnlichkeit unserer Schrift mit der ältesten arabischen Geometrie ist ungeheuer gross. Es lagen mir bei dieser Arbeit drei Werke von dieser Art vor. Erstens Mohamed ben Musa (Alkharizmy) in zwei Uebersetzungen, einer englischen, umfassend die Algebra und die Geometrie, von Frederic Rosen, London 1831, und einer französischen, nur die Geometrie enthaltend, von Aristide Marre, Rome 1866. Die Ausgabe von Rosen enthält auch den arabischen Text, der mir leider unzugänglich ist; wohl aber machte mir die gütige Gefälligkeit des berühmten Orientalisten Herrn Prof. Merx, dem ich hiermit meinen innigsten Dank ausspreche, es möglich, einen Blick

1) In Verbindung mit צורה findet man allerdings diese Form bei Jehuda ibn Tibbon in der Uebersetzung von Saadia, worauf Herr Steinschneider auch verweist.

2) Besonders fällt ins Auge, dass hier zwei Termini gänzlich fehlen: 1) Parallelität, was hier sowohl wie bei M. b. M. durch Worte ausgedrückt ist, die nicht ganz deutlich sind, und etwa „gleich, gerade, passend" heissen, so dass die Uebersetzer von M. b. M. es verschieden auffassen (vgl. Art. II, f, Nota 18), während später das Wort „מקביל" für „parallel" sehr geläufig ist, ja sogar in den andern Werken desselben Manuscriptes sehr oft vorkommt. 2) „Diagonale" ist hier durch umständliche Beschreibung erklärt, z. B. der Faden, der durchschneidet von Winkel zu Winkel, von Ecke zu Ecke und der der allerlängste ist im Gag" (Art. I, b). Es wäre ein Irrthum, wenn man glauben wollte, der Terminus sei hier חוט Faden und das Uebrige nur eine in der Einleitung gegebene Definition desselben; da dasselbe Wort auch anderweitig gebraucht ist (Art. I, g. u. a. m.), und muss jedesmal erklärt werden: „Faden von Ecke zu Ecke". Später ist aber „אלכסון" von λοξόν = לוכסן dafür gebräuchlich. Das Wort kommt im Talmud oft vor, ist in der Mischna aber, soviel ich mich erinnern kann, noch nicht gebraucht. (Dasselbe kommt auch in Jezira vor und heisst auch oft Hypotenuse.)

über manche kritische Stellen zu bekommen. Zweitens lag mir das Werkchen von Mohamed ben Alhusein Alkarkhi vor, herausgegeben von Prof. Hochheim, Halle 1877/80, deutsch; und drittens, ebenfalls deutsch, Essenz der Rechenkunst von Beha-Eddin, herausgegeben von Nesselmann, Berlin 1843.

Auf die Verwandtschaft dieser drei arabischen Schriften in Betreff der Geometrie unter einander will ich hier nicht eingehen, da dieses bereits zur Genüge klar gelegt ist. Was die Verwandtschaft unserer Schrift mit diesen arabischen dagegen betrifft, so glaube ich zwar an den betreffenden Stellen hinreichend aufmerksam gemacht zu haben, indess möchte ich hier noch hervorheben, dass es auf mich den allgemeinen Eindruck macht, als hätten, erstens sowohl Mohamed ben Musa, wie der Verfasser unserer Schrift eine und dieselbe Vorlage, die jeder von ihnen nach seiner Art behandelte. Dass zweitens diese gemeinschaftliche Vorlage keinen theoretischen, sondern rein praktischen Charakter gehabt zu haben scheint; es mag eine Art Sammlung von Resultaten geometrischer Sätze, die dem Praktiker, vielleicht dem Beamten oder Richter, zum Handbuch wenn nicht zum Codex dienen sollte, gewesen sein. Drittens scheint dieses Handbuch sehr alten Ursprungs und wahrscheinlich bei verschiedenen Nationen, in verschiedenen Ländern, in verschiedenen Abschriften, zuweilen auch in verschiedenen, mehr oder minder selbständigen Bearbeitungen vorhanden gewesen zu sein. Viertens scheint die Abschrift, die Mohamed ben Musa vor sich hatte, mehr Indisches angenommen zu haben, wie z. B. die Bestimmung des Fusspunktes durch reine Algebra (Mohamed ben Musa schrieb ja auch eine Algebra). Unsere Schrift enthält auch nicht eine Spur von Algebra, dagegen hat sie manches Griechische hinzugefügt, wie z. B. die Heronische Formel für den Flächeninhalt des Dreiecks ausgedrückt durch die Seiten desselben, die bei M. b. M. nicht vorhanden ist, obwohl er dieselben Zahlen 13, 14, 15 für die Seiten des Dreiecks, die dort zu jener Formel gebraucht sind, ebenfalls benutzt. Alkarkhi und Beha-Eddin, die offenbar nach M. b. M. gearbeitet haben, geben auch die Heronische Formel zum Besten. Uebrigens haben diese beiden Araber schon viel mehr aus dem Griechischen, worunter am wichtigsten die Beweise der geometrischen Sätze sind, die sowohl bei M. b. M. wie auch in unserer Schrift nicht gegeben werden. Fünftens scheinen in unserer Schrift Commentarien und Zusätze späterer Zeit sich vorzufinden, wie z. B. die Winke der Verwandlung der Brüche in Decimalbrüche, was bei M. b. M. sich nicht findet und worauf ich seines Ortes aufmerksam gemacht habe.

Endlich sei noch erwähnt, dass unsere Schrift eine Einleitung an ihrem Anfange und ein paar Sätze über die Kugel im letzten Kapitel hat, was bei M. b. M. nicht vorhanden ist.

Zum Schlüsse möchte ich noch zur Entschuldigung etwa nicht genügender Berücksichtigung mancher Seite der berührten Frage erwähnen, dass die Beschäftigung mit dogmatischer Mathematik, die zur Zeit meine Hauptaufgabe bildet, mir es leider unmöglich macht, dem gegenwärtigen Gebiete, auf das ich von meinem hochverehrten Lehrer Herrn Prof. M. Cantor erst neu eingeführt bin, vorläufig die nöthige ernste Hingebung nach meinem Wunsche zu widmen; vielleicht wird es mir noch vergönnt sein, darauf später einmal zurückzukommen, wogegen ich vorläufig mich begnügen muss, gütigen Zurechtweisungen der Meister vom Fache mit Dank und Ergebenheit entgegenzusehen.

Heidelberg, im November 1879.

Der Uebersetzer.

NB. Dass ich bestrebt war, die Uebersetzung möglichst wörtlich zu halten und zwar auch da, wo die deutschen Termini abweichend sind, wird mir der Leser gütigst verzeihen. Wenn ich oft mit dem Inhalte etwas freier umging, wo es der richtige Sinn unbedingt verlangte, so habe ich dagegen die Form der Worttreue geopfert. Ich glaubte nämlich, dass gerade solche Momente dem Historiker dienlich sein können. Wenn ich z. B. hier durchgängig multipliciren **in** (anstatt mit) wörtlich wiedergebe, so sei das ein Wink, dass dieses auf eine Verwandtschaft mit dem Arabischen hinweist. Wenn ich nicht irre, schwankt ursprünglich auch im Deutschen beim Multipliciren und Dividiren der feste Ausdruck dafür; es heisst bald **mal**, bald **durch**, und bald **in**. Dies wird auch im Deutschen von der Verschiedenheit der Quellen der ersten deutschen Mathematiker herrühren. Weist doch Drobisch nach, dass Johannes Widmann von Eger 1489 arabische und römische Quellen benutzte, ersteres beweist der Gebrauch von Helmŭaym = Elmeŭian („מעוין“ in der arabisch-hebräischen Literatur) für Rhombus.

Art.[1]) I.

a) Aus vier Formen (דרכים sonst Wege, Arten) besteht die gesammte Messkunst, und zwar: dem Vierecke, dem Dreiecke, dem Kreise, dem Bogenartigen (hier Halbkreis). Die Regel ist: Das Zweite (das Dreieck) ist die Hälfte des Ersten (des Vierecks), und das Vierte (Bogenartige) ist die Hälfte des Dritten (des Kreises). Alle übrigen (Formen) sind mit einander verflochten wie der Gürtel (סינר, für סונר ζωναρ) mit dem Schenkelband (בברית, nach St. für בבריות im Cod.).[2])

b) Das Viereck ist aus drei Gesichtspunkten (zu betrachten): Seite, Faden (Diagonale) und Gag, גג, sonst: Dach; hier: Ebene, Oberfläche, Flächeninhalt).[3])

Seite heisst, was die Seiten des Gag hält (ausmacht); es heisst: „viereckig sei der Altar (Opferstätte)".[4])

Faden, der durchschneidet[5]) von Winkel zu Winkel, von Ecke zur Ecke, und ist der allergrösste in der Länge des Gag; und der

Gag selbst ist die M'schicha, (משיחה, Spannung, Ausdehnung, Messung, Ausmessung; hier Flächeninhalt; es wird wohl nicht entgehen, dass dieses fast identisch mit dem arabischen Messâhat, bei Mohamed ben Musa.[6])

---

1) פרק gebräuchlich in der Mischna, wörtlich articulus.

2) Ueber dieses Wort s. Levy's Neuhebr. u. chald. Wörterbuch בִּירִית I, 267, 288. Eine Erläuterung dieses orientalischen Bildes gehört nicht hierher, jedoch ist es wegen des Vaterlandes der Schrift beachtenswerth.

3) Herr Prof. Cantor macht hier aufmerksam auf das griechische *στέγη* Dach, und bei der Pyramide *στέγη τῆς πεϱαμίδος*, bei Heron, liber Geeponicus, Cap. 72 (ed. Hultsch S. 217).

4) Exodus 27, 1. Dort heisst es: fünf Ellen seine Länge, fünf seine Breite; viereckig soll der Altar sein, und drei Ellen seine Höhe. Die betreffenden Seitenflächen sind also Quadrate resp. Rechtecke und werden dennoch schlechtweg רבוע viereckig genannt; und deshalb ist wahrscheinlich diese Stelle hier citirt worden.

5) המפסיק wörtlich: „trennt", vielleicht zu ergänzen: „die Fläche", d. h. er theilt sie (St.). Dieser Ausdruck für das Durchschneiden der Diagonale ist nicht vereinzelt; vgl. diesen Art., Satz g; Art. III, d, e. Die Correctur המחזיק, המחדק scheint unnöthig.

6) s. St. S. IV. A. 4.

c) Das Dreieck — aus vier Gesichtspunkten: dem Schenkelpaare [1]), der Basis, der Höhe, des Gag.

Das Schenkelpaar, das sind die zwei Fäden (משוכים wörtlich Gedehnten). Rechts und [Links] [2]); es heisst: „denn nach Rechts und Links wirst du dich erstrecken“. [3])

Die Basis, das, worauf das Schenkelpaar (basirt) befestigt ist; es heisst: (die Säulen), auf denen das Haus feststeht“. [4])

Die Höhe [5]) ist der Faden, der im Allgemeinen [6]) aus dem Schenkelpaardurchschnitt auf die Basis fällt und (da) einen Winkel bildet, „zu den Winkeln des Stiftszeltes“; [7]) und der Gag selbst ist die M'schicha.

d) Der Kreis — aus drei Gesichtspunkten: Umfang, Faden (Durchmesser) und Gag.

Umfang ist die Schnur (קו, Linie) die den Kreis umringt; denn es heisst: „und eine Schnur von 30 Ellen umringt es ringsherum“. [8])

Faden ist, der vom Rande zum Rande gezogene; es heisst: „von seinem Rande zu seinem [anderen] Rande“; [9]) und der Gag selbst ist die M'schicha.

e) Das Bogenartige, — aus vier Gesichtspunkten: Bogen, Sehne, Pfeil und Gag.

---

1) In der Handschrift: בשני הצלע, also ganz einfach; in der gedruckten Ausgabe (Berlin 1864) hat sich ein Schreib- oder Druckfehler eingeschlichen (בשני׳ בצלע) und gab Veranlassung zu einem (sic). (Correcter wäre [wie gleich darauf] בשני הצלעות; doch ist der Singular vielleicht nach Analogie von Maassbezeichnungen zu erklären, wie zwei Fuss u. dgl. Bemerkung des Herrn Dr. Steinschneider). Dem gegenüber muss ich hinzufügen, dass hier שְׁנֵי־הַצֵּלָע „Schenkelpaar“, in der Analogie von שְׁלֹשׁ־הַקִּלְשׁוֹן aufzufassen sei und von שני צלעים, ־ות „zwei Schenkeln“ wohl zu unterscheiden. Der Ausdruck שני צלע kommt hier öfter vor: I, c. „שני צלע „זה; III, c. בשני צלע.

2) ימין ויכין, also eine Anspielung auf I. Kön. 7, 21. Dort ist allerdings יכין nicht die zweite, linke Säule; sondern die rechte Säule selbst wurde יכין genannt!

3) (Jesaia LIV, 3). Im vorhergehenden Verse ist dort von der Verlängerung der Seile bei der Spannung des Zeltes die Rede.

4) Richter XVI, 26, 29.

5) Bald: עמוד, Säule; bald עומד aufrechtstehender, Senkrechte; bald auch קומה, Höhe, s. unten Anm. 17.

6) חוט הכולל, hier vielleicht, um auszudrücken, dass es Fälle gibt, wo die Senkrechte ausserhalb der Schenkel, oder auch in einen der Schenkel selbst fällt.

7) Exodus XXVI, 23. Dort soll der Winkel ein rechter sein, obwohl es schlechtweg Winkel (oder Ecke) heisst; und deshalb wird wohl jene Stelle hier angeführt.

8) I. Kön. VII, 23.

9) Ibid.

Der Bogen ist ein Theil des Kreises; es heisst: „wie das Aussehen des Bogens (Regenbogens) in der Wolke“.[1])

Die Sehne,[2]) (ist) die den Mund des Bogens fasst; es heisst: „ein getretener (gespannter) Bogen“.[3])

Der Pfeil ist der aus der Mitte des Bogens zur Mitte der Sehne gezogene; es heisst: „sie setzten ihren Pfeil an die Sehne“.[4]) Und der Gag selbst ist die Mschicha.

f)[5]) Wie misst man die Mschicha (Flächeninhalt)? In Zahlen rechnest du eins auf eins, das ist die Mschicha, d. h. eine Elle auf eine Elle; so zählst du bei einem Gag, welcher an den Seiten und den Winkeln gleich ist, nach jeder Seite (Richtung); die Tabula (טבלא = Quadrat), welche aus zwei besteht auf jeder Seite, während die Winkel gleich sind,[6]) enthält als Ausmessung das vierfache Maass der Einheit, welche (selbst) eine Elle auf eine Elle ist; und wenn sie drei von jeder Seite hat, macht es das neunfache vom Maasse der Einheit; so auch vier auf vier und fünf auf fünf. Von da ab und weiter rechne so fort nach demselben Maasse aufwärts (d. h. steigend).

g) Was kleiner als die Einheit ist, theilst du so ein[7]): die eine (Quadrat-) Elle durch zwei von Rechts nach Links[8]) und von Oben nach Unten gehende und in der Mitte sich durchschneidende Fäden, so dass der Gag in vier Abschnitte getheilt wird, und so findest du eine halbe Elle auf eine halbe Elle, und die Mschicha selbst ist ein Theil von einer Elle, welches ein Viertel vom ganzen Gag[9]) ausmacht; so auch ein Drittel

---

1) (Ezech. I, 28.)

2) Das ו von והיתר in der Ausgabe ist Druckfehler.

3) Jes. XXI, 15.

4) Psalm XI, 2. חץ = سَهْمٌ Pfeil für sinus versus.

5) Bei Mohamed ben Musa fängt die Geometrie hier an; von der Classificirung aller geometrischen Formen zunächst nach Viereck (eigentlich Rechteck), Dreieck, Kreis und Bogen sowohl, wie von den vorangehenden Definitionen derselben findet sich dort nichts. Als Reihenfolge für die Behandlung wurde indess auch bei ihm die besagte Anordnung innegehalten, und zwar zweimal, einmal flüchtig und das zweitemal eingehender und specialisirender, während in dieser hebräischen Schrift diese Reihenfolge dreimal durchlaufen wird.

6) H. S. hier שוים gleich; nicht שנים zwei, wie in der Ausg.

7) Das ן von מחלקן fehlt in der Ausg.

8) Herr Steinschneider corrigirt hier mit Recht זה מפסיק anstatt והמספיק, ebenso anstatt das zweitemal ימין, שמאל, wenn nicht vielleicht יכין zu lesen ist (siehe c, Anm. 4.).

9) Es ist הגג für צד zu emendiren; die Worte מכל צד kommen in den letzten einigen Zeilen mehreremal vor, und das war für den Schreiber vielleicht die Ursache des Irrthums. In II, e wäre umgekehrt richtiger צד für das erste הגג

auf ein Drittel und ein Fünftel in ein Fünftel; wie bei gleicher [Länge und Breite], so auch bei ungleicher. Von da ab und weiter rechne so fort nach demselben Maasse abwärts.

h) Man hat schon gesagt (in der vorigen Mischna): ein Halb auf ein Halb ist ein Viertel, und so ein Drittel auf ein Drittel ist ein Neuntel[1]); wie in diesen, so in allen ähnlichen Fällen: man zählt (rechnet) es bei gleichen und bei ungleichen: **אבאהוא** (?)[2])

So zählst du: zehn auf zehn[3]) sind hundert, die Hälfte von zehn ist fünf, fünf mal fünf gibt 25 und das ist ein Viertel von hundert[4]), und die Zehn steht als Eins, und die Hundert als Zehn, und die Tausend als Hundert. Von da ab rechne so fort mit Brüchen nach Maass der Einheiten; aber bei den Einheiten nimmt es zu und bei den kleinern (als die Einheit) nimmt es ab.[5])

---

zu lesen, dann wäre nämlich jene Mischna in drei Theile zu theilen: 1. הרוצה למוד את צד המרובע, Ausmessung einer Seitenfläche des Parallelepipedons durch Multiplication von Länge und Breite. 2. חגג במנין שש פנים, Oberflächenbestimmung durch Addition (Zusammenzählen) der sechs Grundflächen. 3. מצרף ארך בתוך רחב בתוך העֹמֶק, Bestimmung des Körperinhalts.

1) Das Wort מְתֻשָּׁע allein heisst hier: ein Neuntel, wie das Wort מְרֻבָּע ein Viertel heisst; und das בהן ובדומין להן ist offenbar zusammengehörend aufzufassen, wie oben übersetzt. Diese Construction wiederholt sich hier und im Talmud überhaupt sehr oft. Herr Steinschneider S. IV. fasst מתשע בהן zusammen, er las es also wahrscheinlich מְתַשֵּׁעַ. An dieser Stelle wäre es gelegentlich zu bemerken, dass im Hebräischen für Stammbrüche (und nur für solche) nur bis Zehntel die weibliche Form מחצה, שליש, רביע, חמשית, ששית, שביעית, שמינית, תשיעית, עשירית $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$ sich vorfindet, auch im plur. עשיריות חֲמִשִׁיתָיו, etc. Sonst heisst es אחד מששים, eins von sechzig, anstatt ein Sechzigstel etc.

2) Wenn kein noch zu errathender Schreibfehler vorliegt, so scheint dieses Wort nicht hebräischen Ursprungs zu sein. Herr Prof. Cantor macht auf das indische Wort **अभ्यास** für Multiplication aus dem **भू** „sein" aufmerksam. Der Sinn ist jedenfalls offenbar der, dass man immer die beiden Dimensionen (Länge und Breite) als Zahlen-Factoren zu behandeln hat, gleichviel ob dieselben als Vielfache einer ganzen Einheit oder als Theile einer solchen auftreten; im ersten Falle kommt als Flächeninhalt das Product dividirt durch die Einheit und im zweiten Falle der reciproke Werth. [Das Wort אלא „jedoch" habe ich schon beanstandet, es scheint überflüssig; vielleicht מכאן ואילך „und so weiter" wie im vorhergehenden §? אב אהוא ist sicher kein Fremdwort; vielleicht אבגדהוז d. h. 1—7, ursprünglich 1—9. Dann schliesst sich sehr gut daran die Berechnung von 10. Steinschneider] (?).

3) Man beachte die Ausdrücke על und בתוך, auf und in beim Multipliciren, und den Ausdruck פעמים oder פעם, mal; man pflegt sonst erstere Ausdrücke bei Flächen und Kubikinhalt und letztere bei Zahlen zu gebrauchen. [NB. צרף על oder בתוך s. meine Einleitung S. IV. Steinschneider.]

4) Modern gesprochen $\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0{,}5$; $\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0{,}25$; also Verwandlung der Brüche in Dezimalbrüche!! S. pag. 29, 4.

5) D. h. sobald die Verwandlung der Brüche in Dezimalbrüche ermöglicht ist,

i) Das ist die Regel: Ein Halb auf ein Halb gibt die Hälfte des Halben, und ein Drittel auf ein Drittel den dritten[1]) Theil des Drittels, und so ein Halb auf ein Drittel die Hälfte des Drittels; und so ein Viertel auf ein Drittel den vierten Theil des Drittels. Ebenso in allen ähnlichen Fällen, bei gleichen und ungleichen.

Art. II.[2])

a) Wer viereckige Felder[3]) messen will, so gleiche (an Länge und

---

wird es möglich, alle Rechnungen mit Brüchen wie mit ganzen Zahlen auszuführen; nur dass man (in moderner Sprache) die Bestimmung der Dezimalstellen zu beachten hat.

1) Herr Steinschneider corrigirt mit Recht שליש anstatt חצי, welches sich wahrscheinlich aus dem nächsten Satze beim Abschreiben irrthümlich eingeschlichen, wie es in diesem Manuscript oft der Fall ist. Auffallend ist, dass gerade an dieser Stelle auch die Schrift des Mohamed ben Musa den Uebersetzern Anlass zu verschiedener Auffassung gegeben hat: in der englischen Uebersetzung heisst es „two thirds by a half“, während in der französischen „un demi tiers par un demi tiers“. Siehe die betreffende Anmerkung in der französischen Ausgabe Seite 4. Das System von $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, welches auf diese Weise bei Mohamed ben Musa sich herausstellt, trifft in der vorliegenden hebräischen Schrift nicht zu. Hier wird dieser Gegenstand in drei §§ getheilt: in g) bei der geometrischen Zerlegung der Fläche durch Linien sind die Ziffern $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ genommen; in h) vor dem Zahlenbeispiel (das bei Mohamed ben Musa nicht vorkommt und das dazu angethan ist, die Verwandlung von Brüchen in Dezimalbrüche zu lehren) kommt $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ vor; und in i) werden $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ bei der Behandlung einer ganz neuen Frage (die bei Mohamed ben Musa für Brüche unberührt geblieben), nämlich das Product ungleicher Factoren oder Rechtecke $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \ldots$ gebraucht.

2) Nachdem in Art. I. die vier Grundfiguren: Viereck, Dreieck, Kreis und Bogen und die Hauptbestandtheile derselben der Reihe nach in den §§ a bis e definirt sind, und in den folgenden f bis i der Flächeninhalt eine Einheit bekommt für ganze und gebrochene Zahlen, und die Multiplication der Flächenbestimmung für gleiche und ungleiche Factoren durchgeführt wird, fängt mit Art. II. die eigentliche Behandlung jener Figuren an, der obigen Reihe nach in den §§ a bis d. Von e bis m handelt es sich um Stereometrie, und zwar wird der Körperinhalt bestimmt für das Prisma, den Cylinder, die Pyramide und den Kegel; für die Halbkugel (was sich bei Mohamed ben Musa nicht findet), dann für die abgestumpfte Pyramide und den abgestumpften Kegel.

3) השדות die Felder, so ist es in der Handschrift, und nicht המדות die Maasse, wie in der Ausgabe. [Felder ist offenbar falsch conjicirt, es ist fast nirgends von concreten Dingen die Rede! Steinschneider.] Leider kann ich dieses nicht zugeben. Zunächst conjicire ich hier nicht, sondern befürworte im Gegentheil die Lesart השדות, wie sie sich im Manuscripte vorfindet. Im Uebrigen bin ich der Ansicht, dass hier sehr häufig, ja in diesem Kapitel sogar vorwiegend von concreten Dingen die Rede ist; vgl. התל או דבר מקובה „Hügel“ oder „gewölbter Gegenstand“; דופנותיו, seine „Wände“; כדור, „Ball“; i. עמוד, „Säule“ etc. Besonders kommt auch V, c. ausser בורות, מקואות, ימים „Meere“, „Bäder“, „Brunnen“ noch auch das Wort „שדה“ Feld selbst vor. Bei der Gelegenheit ist zu bemerken,

Breite), wie ungleiche, der multiplicire Länge in Breite, was sich aus beiden ergibt, das ist [1]) die M'schichah.

b) Beim Dreiecke, gleichviel ob gleichseitigen, oder ungleichseitigen,[2]) multiplicire man die Höhe[3]) mit der halben Basis, und was aus beiden sich ergibt, das ist die M'schicha, und mehrere Eingänge[4]) (Methoden) gibt es dabei.

c)[5]) Wie verfährt man beim Kreise? Man multiplicirt den Faden

---

dass auch alle Termini hier von concreten Bildern genommen sind: Faden (Messschnur), Brett, Pfeil, Sehne, Bogen, Wand, Dach, Kürbiss etc. Dass das Ganze für den praktischen Gebrauch und nicht für die abstracte Theorie geschrieben ist, beweisen auch die Ausdrücke: „wer zu messen braucht", „wer messen muss", „wer messen will" etc.

1) Das von St. beanstandete Wort הרחב hat sich hier beim Abschreiben irrthümlich aus der vorhergehenden Zeile eingeschlichen. Solche Schreibfehler sind in dem betr. Manuscript nicht selten.

2) Bei Mohamed ben Musa ist dieselbe Methode (Multiplication der Höhe mit der Hälfte der Basis) für den Inhalt des gleichseitigen Dreiecks. Vergleicht man jene Schrift mit der unsrigen, so ist es anzunehmen, dass bei M. b. M. (oder in dem Texte, aus welchem er es abgeschrieben hat) die Worte „oder des Ungleichseitigen" fehlen. Der Uebersetzer des M. b. M. bemerkt an dieser Stelle Folgendes: „Mohamed ben Moussa, versé dans les sciences des Hindous, ne donne point ici la formule particulière qui convient à l'aire du triangle équilatéral. Il donne le moyen général de mesurer un triangle quelconque; il n'oublie pas qu'il écrit pour le vulgaire et non pour des mathématiciens. Une seule règle qui convienne à tous les cas, lui paraît suffisante." Ja, das wäre alles sehr schön, wenn das Problem eines gleichseitigen Dreiecks von Jemand vorgelegt worden wäre und der Verfasser hätte sich nur zu Schulden kommen lassen, dass er zur Auflösung dieses speciellen Problems eine allgemeine Methode anwendet; hier ist aber der Fehler ein viel wichtigerer. Der Verfasser sagt, die Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks durch Multiplication von Höhe und Grundlinie habe die Gleichseitigkeit des Dreiecks als Bedingung der Gültigkeit, ohne dass von einem gleichseitigen Dreieck überhaupt die Rede war; dieses schliesst in sich die Behauptung ein „ein nicht gleichseitiges Dreieck kann auf diese Weise nicht behandelt werden." Wollte der Verfasser die Bestimmung allgemein aussprechen, so hätte er das Wort équilatéral weglassen müssen.

3) העומד, das Stehende, die Senkrechte, in der Handschrift; St. setzt dafür העמוד, die Säule, wie oben I b und sonst; die Gründe s. unten Nota zu c.

4) מבואתה in der H. S., bedeutet sonst: Eingänge, hier: Fälle, Methoden. Hiermit sind offenbar die Methoden weiter unten in Art. IV für die speciellen Fälle des rechtwinkligen oder des gleichschenkligen und gleichseitigen Dreiecks gemeint, die Höhe zu ermitteln, wenn nur die Seiten gegeben sind. Bei M. b. M. findet sich hier dieser Zusatz nicht. Vielleicht sind übrigens die drei Fälle gemeint, wenn der Fusspunkt der Höhe innerhalb, ausserhalb des Dreiecks oder in eine Seite desselben fällt. Diese Frage des Fusspunktes ist unter dem Namen „Masquet al hadjar" bei M. b. M. algebraisch (mit einer Gl. 2. Grades) behandelt; in unserer Schrift ist kein Wort davon zu finden. Siehe Art. IV, g. Nota.

5) Bei M. b. M. ist hier der Satz des Rhombus, welcher in vorliegender Schrift

(Durchmesser) in sich selbst, und werfe (subtrahire משליך) davon ein Siebentel und ein halbes Siebentel ab, der Rest[1]) ist die M'schichah.[2]) Z. B. ein Faden dehne sich aus zu Sieben, sein Product (Quadrat)[3]) ist 49; und ein Siebentel und ein halbes Siebentel ist, (zehn und einhalb)[4]), so dass die M'schichah 38 und ein halb ist.

d) Wie das Bogenförmige[5])? Man setze den Pfeil an die Sehne, beides allzumal, (addire sie zusammen), multiplicire dieselbe (Summe)[6]) in die Hälfte des Pfeils, und stelle es (das Product) bei Seite; man nehme dann wiederum die halbe Sehne, multiplicire sie in sich selbst und theile durch 14, das Ergebniss addire zum Hingestellten,[7]) was herauskommt ist die M'schichah. Es gibt dabei auch andere Arten.[8])

Art III, d sich findet, eingeschaltet, aber ohne das Zahlenbeispiel. Derselbe Satz findet sich aber bei M. b. M. nebst Zahlenbeispielen und Figur noch einmal an seinem richtigen Orte unter den Vierecken.

1) והיותר H. S., in der Ausgabe והותר ist Druckfehler und die Correctur והנותר ist überflüssig, s. IV, g.

2) Bei M. b. M. wird an dieser Stelle auch der Umfang des Kreises nach verschiedenen Methoden bestimmt, und dann durch Umfang und Diameter der Flächeninhalt. Das geschieht in unserer Schrift in Art. V. bei der nähern Behandlung des Kreises. Die Bestimmung des Flächeninhalts, wie sie hier gegeben ist, gibt auch M. b. M. an dieser Stelle, nur ohne Zahlenbeispiel; dasselbe kommt aber später ganz wörtlich bei der nochmaligen Behandlung, nachdem dort gesagt wird: Nous avons terminé l'exposé de leurs (de les cercles) propriétés et de leur mesure dans la première partie du livre. Bei Alkarkhi cap. XLVI. findet sich für den Inhalt des Kreises unter andern Methoden auch diese hier. Ebenso bei Beha-Eddin; bei allen der Ausdruck $\frac{1}{7}$ und $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7}$ ·

[3) צרופו ist Product, aber hier ist das vorhergehende בתוך עצמו (vgl. auch d) zu ergänzen also Quadrat. St.]

4) Die zwei Worte י׳ וחצי $10\frac{1}{2}$ fehlen in der H. S. und sind in der Ausg. mit Recht hinzugefügt. Bei M. b. M. sind sie vorhanden.

5) הקשותה. Es wird bei dieser Benennung nur der Bogen hervorgehoben, obwohl die Rede nicht von Bogenlänge, sondern vom Inhalt des Kreisabschnittes ist. Ebenso heisst es bei Alkarkhi, s. d. Cap. XLVII. Bei M. b. M. heisst es: „Tout segment de cercle est assimilé à un arc“ oder „every part of a circle may be compared to a bow.“

[6) oder lies אותם dieselben (Summanden). St.]

7) Dieses ist hier für jeden beliebigen Bogen aufgestellt, ohne Unterschied, ob er grösser, gleich oder kleiner als der Halbkreis ist. Was die Genauigkeit betrifft, so stimmt sie für den Halbkreis vollkommen $\frac{r^2 \pi}{2}$ und für andere Bogen bis auf zwei Dezimalen genau. Dieselbe Formel findet sich übrigens bei Heron von Alexandrien $A = (s + h)\,\frac{h}{2} + \frac{\left(\frac{s}{2}\right)^2}{14}$, wenn A den Kreisabschnitt, s die Sehne, h den Pfeil bezeichnet. Siehe M. Cantor, Römische Agrimensoren. Leipzig 1875. S. 48.

8) Vergleiche weiter unten Art. V f, g, und M. b. M. französ. und die Bemerkungen daselbst.

c) Wer beim Cubus[1]) den Gag aus Länge und Breite[2]) messen will, sei es bei gleichen [Seiten, Cubus] oder ungleichen [rechtw. Parallelepipedon][3]), der hat an diesem Gag die Zusammenzählung der sechs Ansichten (Oberflächen) auszuführen. (Sechs Flügel einem jeden)![4]); multiplicirt man Länge in Breite und Tiefe[5]), so ist das, was aus allen drei herauskommt, die M'schichah des Gag, die den Körper ausmacht.

f) Wenn er (der Körper) kreisförmig, (Cylinder), oder dreieckig, (Prisma), oder von irgend beliebiger Seitenförmigkeit ist, (obere und untere Grenzflächen — beliebige Polygone), wenn nur sein Boden eben und passend[6]) (gleich und parallel) ist, wonach misst man den Gag?

---

1) Das Wort המרובע, Rechteck, Quadrat, bezieht sich hier auf die Grenzflächen des Parallelepipedons, von dem, wie die Ausführung zeigt, die Rede ist. Die muthmassliche Vertauschung dieses הגג hier vor dem Worte המרובע mit dem Worte צד in I, g, siehe dort Nota 9.

2) Das Wort ועומק, Tiefe, welches in der Ausg. mit Fragezeichen eingeschaltet wurde, ist nach obiger Auffassung überflüssig. In diesem Theile der Mischna ist demnach von der Oberfläche, und erst im zweiten Theile vom Körperinhalt die Rede. Allerdings ist bei M. b. M. die Oberfläche nicht berücksichtigt, er beginnt: „Jeder viereckige Körper".

3) In der franz. Ausg. des M. b. M. ist die Bemerkung gemacht, dass eine Uebereinstimmung mit dem Indischen hier insofern stattfindet, als die Figuren in zwei Kategorien getheilt sind, die eine Parallelepipedon, Prisma und Cylinder unter einem Namen: sama-chata, und die zweite, Pyramide und Kegel enthaltend, unter dem Namen: souchi-chata etc. Dasselbe passt auch für unsere Schrift vollkommen.

4) Jesaia VI, 2. Offenbar ist כנפים hier wie כנפות gedeutet!

5) Der französische Uebersetzer des M. b. M. bemerkt (Seite 6): Nous remarquerons encore que la hauteur des solides de la première catégorie (les parallélipipèdes, les prismes et les cylindres) a le nom spécial de profondeur, tandis que la hauteur des solides de la seconde catégorie (les pyramides et les cônes) s'appelle colonne (aamoud), comme la hauteur d'un triangle. Ganz dasselbe bemerkt man auch in unserer Schrift: in e) und f) beim Parallelepipedon, Prisma und Cylinder ist עֹמֶק (wie arab. عمق) Tiefe als Höhe gebraucht, während bei Pyramide und Kegel in g) das Wort קומה die Höhe ausdrückt. Dass hier ein neues Wort קומה genommen werden muss und nicht dasselbe Wort עמוד, amud (Säule), das beim Dreieck (sowohl in b) als auch in Art IV, b) u. c)) gebraucht wird, beruht offenbar darauf, dass das Wort עמוד, Säule, schon für den Stumpf der Pyramide und des Cylinders in i), k), l) und m) vorweggenommen und ohne Anlass zu Missverständnissen nicht in einem andern Sinne zu verwenden ist.

6) Ausgedrückt durch ישר ונאה gerade, oder eben und passend; wahrscheinlich hier der Parallelismus gemeint. Bei M. b. M., wo das Ganze wörtlich sich findet, heisst es in der franz. Uebersetzung S. 5 ausdrücklich: egal und parallel, im Arab. S. 53, Zeile 6, in gegenwärtiger Ausgabe على الا ستسواء والموازاة, engl. S. 74 perpendicular [M. b. M. hat ebenfalls zwei Ausdrücke, den ersten fasst Rosen als perpendiculär, Marre als égal استواء ist שוה St.]. Siehe Vorwort III.

[Miss] den Gag in seinem Maasse (Maasseinheit)[1]) in besagter Art, so erfährst du die M'schichah, (Flächeninhalt der Basis), und wer dieses weiss (oder misst?)[2]), mulitiplicire es in die Tiefe[3]) und das ist die M'schichah des Körpers, (Körperinhalt in Körpereinheiten).

g) Bei der Pyramide (oder Kegel) (משוך gedehnt, verjüngt), deren Spitze (ראש, Haupt, Spitze, Anfang, oberes Ende) scharf und deren Basis, (סוף, Ende, unteres Ende) flach (ausgebreitet (?)[4]) sei sie viereckig, quadratförmig), oder kreisförmig, oder dreieckig, messe die M'schichah des Körpers, indem du zwei Drittel der M'schichah (Basisinhalt) wegwirfst, ergreifst das eine Drittel und multiplicirst es in die Höhe[5]), was herauskommt ist die M'schichah des Körpers[6]), von der Spitze bis zur Basis.[7])

h) Wer einen Hügel oder gewölbten[8]) Gegenstand zu messen braucht, wenn nur die Wandungen gleichförmig nach allen Seiten, wie z. B. eine Halbkugel oder etwas ähnliches, der multiplicire einen der Fäden von Ecke zu Ecke (Durchmesser) in die Hälfte des anderen[9]) Fadens, (des

1) Das Wort במדד ist nach St. corrumpirt und soll vielleicht במדה heissen (s. St. S. III); es ist aber auch möglich, dass diese eigenthümliche Construction hier ein Terminus für Maasseinheit sein soll.

[2) והמודע lies והיודע? oder והמודד (St. S. III). Im arab. M. b. M. S. 53 steht wörtlich: „Du kennst die M'schicha (تكسير) und was du mit der Tiefe multiplicirt hast, das ist die M'schicha" (تكسير). Die engl. und franz. Uebersetzungen geben nur den Sinn, nicht die Worte. Das Wort הגוף hat der arab. Text nicht, und Marre setzt du solide mit Recht in Klammern. Aber M. b. M. braucht es nicht ausdrücklich zu sagen, da bei ihm der Satz mit dem vorigen verbunden ist. St.]

3) העומק plene, H. S., nicht העמק.

[4) ממוצע ist von מצע, יצע abzuleiten; vgl. St. Vorw. St.]

5) Hier für Höhe קומה, vielleicht um den Fall, wenn die Höhe ausserhalb der Basis fällt, auszudrücken. Siehe oben pag. 21 Anmerkung (5).

6) Bei M. b. M. ist hier die Sprache viel einfacher und kürzer, obwohl der Gedankengang genau derselbe ist.

7) Bei M. b. M. findet sich dieser letzte Satz nicht; dieser hat vielleicht die Gültigkeit des obern Satzes für die schiefe Pyramide ausdrücken wollen, bei der die Höhe eine andere Linie ist, als die, welche von der Spitze zur Basis geht. Bei Beha-Eddin ist übrigens ausdrücklich als Bedingung für die Gültigkeit hinzugefügt, dass Cylinder und Kegel senkrecht resp. gerade seien.

8) מקובה. In den spätern arabisch-hebräischen Werken der Mathematik ist für Cubus das Wort מעוקב gebraucht; selbst z. B. in anderen Werken desselben Codex unzähligemal. Dagegen ist in denselben das hier gebrauchte Wort מקובה nirgends anzutreffen.

9) Unter den Worten: „In die Hälfte des andern" ist hier die Hälfte des Umfangsfadens zu verstehen (und nicht etwa des andern Durchmessers, was keinen Sinn gäbe). Dieser ungewöhnliche Ausdruck hat Anlass

Umfanges), was aus beiden herauskommt, ist die M'schichah, (Oberfläche).[1])

i) Säule. (Pyramide, oder abgestumpfte Pyramide.) Bei der Säule, die sich entweder bis oben verjüngt und ihre Spitze ist scharf, oder sich bis zur Hälfte oder zu irgend welchem Theil verjüngt, vollziehe man die Ausmessung durch die Basis und den Schnitt (קטוע, Schnitt, Abschnitt, Abstumpfung), welcher den oberen Abschnitt der Spitze bildet und wodurch beide, (die obere abgeschnittene Pyramide, und die Ganze), von einander getrennt[2]) sind, welche man als Endfläche (untere Basis) behandele, und messe es nach letzterer Berechnung, werfe dann die kleinere, (abgeschnittene, fehlende Pyramide), von der Ganzen ab; was übrig bleibt ist die M'schichah der Säule.[3])

---

zu falschen Correcturen עצמו anstatt האחד (in Art. V, a) und zu einem Zusatz או בתוך חצי עצמו in Art. V, b gegeben, was den richtigen Sinn verkrüppelt hat. Vielleicht sind auch die dadurch sinnlos gewordenen Sätze deshalb von M. b. M. weggelassen. Merkwürdig ist, dass Beha-Eddin, sowie Alkarkhi, diese Correctur gelassen, aber noch zwei Sätze eingeschoben haben, wodurch zwei Methoden aus der einen geworden sind.

1) Die Oberfläche der Kugel in Art. V, a, sowie die der Halbkugel, hier und in Art. V, b, kommt bei M. b. M. gar nicht vor. Sollte die Vermuthung richtig sein, dass letzterem dieselbe Quelle wie dem Verfasser unserer Schrift vorgelegen habe, so ist auch diese Erscheinung erklärlich, indem M. b. M. diese fehlerhafte Stelle, deren richtigen Sinn er vielleicht nicht errathen konnte, gänzlich weggelassen hätte. Bei Beha-Eddin sowie bei Alkarkhi finden sich die Bestimmungen dieser Oberfläche; bei letzterem aber nur die der Kugel; für die Halbkugel aber sagt er: Verfahre man wie bei der Kugel und nehme dann die Hälfte jenes Resultates. Dass dieses für unseren Verfasser nicht genügte, kann vielleicht daher rühren, dass die Halbkugel, als Hügel, bei der Feldmessung, die die Hauptaufgabe dieser Schrift ausmachen soll, öfter als die ganze Kugel vorkommt.

2) In der Handschrift heisst es hier ganz deutlich: מוחלק, abgetheilt, getrennt, und nicht מחלק, welches in der Ausgabe durch die Auffassung, als bezöge es sich auf den Messenden, der etwa abzuziehen hätte (was aber noch später folgt), zu einer Bemerkung Steinschneider's Veranlassung gegeben, dass חלק על dividiren hiesse (was allerdings in Ordnung ist), und חלק מן subtrahiren (!) bedeuten sollte, was sonst niemals gebräuchlich ist.

3) Auch dieser ganze Paragraph ist bei M. b. M. weggelassen. Dieser fängt gleich mit dem dazu gehörigen Beispiele an, wobei dieselben Ziffern wie bei unserem Verfasser und derselbe Gedankengang, an mancher Stelle sogar wörtlich, zu finden sind. Bemerkt man, mit welchen Schwierigkeiten unser Verfasser in diesem Paragraph sichtlich zu ringen hat in Betreff der Sprachausdrücke, so wird man wiederum an obige Vermuthung (Anmerkung 1) erinnert. Was den Sinn des ganzen Paragraphen betrifft, so bemerkt man, dass der Verfasser in Unklarheiten verfällt, während er sich besondere Mühe giebt klar zu machen, dass man bei der abgestumpften Pyramide mit zwei idealen Pyramiden es zu thun hat, von

k) Wie calculirt man (dabei)? Es sei z. B. die Säule viereckig (quadratisch), ihre Basis sei 4 Ellen auf 4 Ellen, sie steige immer mehr und mehr abnehmend auf, und das Haupt, (obere Basis), sei zwei Ellen auf zwei Ellen, viereckig, (quadratförmig), und du musst wissen, wie viel (beträgt) die M'schichah und wie viel die Höhe der Säule. Es ist das eigentlich schon oben bei der ganzen Pyramide (in g) gesagt worden, nur ist diese in unserem Falle abgestumpft und du wüsstest noch immer nicht, wie viel diese Säule betrüge, so lange nicht die Eine[1]) nach oben bis zu Ende (zu einem Punkte) aufginge.

l) Du berechnest in Zahlen: wie zwei das Maass von vier, (die Hälfte) ist, so ist auch die Länge der Säule (Stumpf) die Hälfte der aufsteigenden (Pyramide); folglich die ganze Säule, die bis zur Spitze verlaufen sollte, zwanzig Ellen, und bis zum Abschnitt[2]) 10 Ellen. Du lernst da, dass zwei ein Maass von vier, wie zehn ein Maass von zwanzig ist.

m) Wer messen muss, der greife nach dem dritten Theile der Basiskante[3]), $\left(\frac{4 \times 4}{3} = \frac{16}{3} = 5^1/_3\right)$, es beträgt fünf und ein Drittel; multiplicire dieses in 20, so beträgt es 106 und zwei Drittel Ellen; das stelle bei Seite; greife dann wiederum nach dem dritten Theile des ausmultiplicirten Abschnittes 2 auf 2, $\left(\frac{2 \times 2}{3} = 1^1/_3\right)$, das beträgt eine Elle und ein Drittel; multiplicire dieses in die zehn obern Ellen, das beträgt 13 Ellen und ein Drittel, werfe dieses ab von 106 und zwei Drittel, so bleiben 93[4]) und ein Drittel und du kommst zum Körperinhalt der abgestumpften Säule. Ist dieselbe rund (Kegel), so ist (der Körperinhalt) der Rest, (was bleibt), nachdem du vom Obigen ein Siebentel und ein halbes Siebentel weggeworfen hast.[5])

---

denen die eine gar nicht existirt (bis auf die Basis derselben, als welche das obere Ende aufzufassen ist), während von der andern Pyramide nur ein Theil existirt, und dass die obere Basis dieselbe Rolle spielt für die obere Pyramide, wie die untere Basis für die ganze Pyramide. Auffallend ist, dass es hier den Schein hat, als sollte der Fall der ganzen Pyramide in dem der abgestumpften enthalten sein; dass dieses in der That der Fall ist, da im speciellen Fall der Subtrahend Null wird, ist klar; es wäre doch aber zu viel gewagt, unserem Verfasser das zuzuschreiben.

1) Die eine der beiden idealen Pyramiden. St. emendirt חד, also „bis sie spitz endet".

2) הקטופה H. S. und Ausg., nach St. wahrscheinlich הקטוע zu lesen.

3) Die Correctur בט"ז ist überflüssig, da die mit sich selbst multiplicirte Basiskante ohnehin sechszehn beträgt, und das auffallende ראשו חד bleibt nach der Correctur eben so auffallend wie ohne dieselbe.

4) Also צ"ג und nicht ש"ט muss es offenbar heissen; ein Fehler, der in einer Handschrift gar leicht entstehen konnte.

5) Zu Mischna m) ist zu bemerken, dass der Abschreiber hier eine ganze

Art. III.[1]

a) Fünf Arten sind es bei den Vierecken, und zwar: α) gerade, (recht, gleich), in Seiten und Winkeln, β) ungleich in den Seiten und recht in den Winkeln, γ) gleich in den Seiten und ungleich in den Winkeln, δ) gleich und ungleich in Seiten und Winkeln, wobei zwei Längen besonders für sich und zwei Breiten für sich, (unter einander gleich sind), (Parallelogramm), ε) ganz und gar ungleich in Seiten und Winkeln.

b) Wie was gleich ist an Seiten und Winkeln? z. B. zehn von [jeder] Seite; man multiplicire Länge auf Breite, das Ergebniss ist die M'schichah, d. h. 100. Die eine Seite ist die eine Wurzel, (עקר erste Potenz), und beide Seiten sind die zwei[2]) Wurzeln (die zwei Factoren), *und so 3 und so 4.*[3])

c) Ungleich an Seiten und recht an Winkeln, z. B. acht in einem Seitenpaare und im andern Seitenpaare sechs; multiplicire Länge auf Breite, das gibt 48, und das ist die M'schichah. Gleich an Seiten [ist] recht an Fäden.[4])

Zeile von dem zweiten ושליש bis zum dritten irrthümlich zweimal geschrieben hatte, was in dem betreffenden Manuscript gar nicht selten ist. Uebrigens hatte er das erstemal כ"ו anstatt ק"ו geschrieben und bemerkte es erst, nachdem er schon das Wort והוא geschrieben hatte, da wollte er es verbessern und fing aus Ueberstürzung anstatt vom zweiten ושליש vom ersten an, und als er מצ vom Worte מצרף geschrieben hatte, bemerkte er es, dann liess er diese zwei Buchstaben stehen, fing von neuem an und schrieb dann alles in Ordnung weiter, nur vergass er das Ueberflüssige zu streichen.

1) Dieser Art. handelt wiederum von dem Viereck mit näherer Specialisirung, wobei die obige Reihenfolge der Figuren wiederum innegehalten wird, wie das auch bei M. b. M. geschieht. Dabei handelt Art. III vom Viereck, IV vom Dreieck, V vom Kreis und Bogen. Alle diese Unterabtheilungen kommen genau ebenso bei M. b. M. mit denselben Zahlenbeispielen und Figuren vor, mit Ausnahme von der Oberfläche der Kugel, wie ich schon oben bemerkt habe.

2) עקרה, wohl zu lesen עקריה.

3) Dieser letzte Satz lautet bei M. b. M. (bald am Anfang, Seite 4 oben): Dans tout carré, si l'un des côtés (est multiplié) par un, c'est la racine de ce carré; si par deux, deux racines; *que ce carré soit petit ou grand.* Ebenso in der engl. Uebers.: One side of an equilateral quadrangular figure, taken once, is its root; or if the same be multiplied by two, then it is like two of its roots, *whether it be small or great.* Es scheint hier wiederum eine abweichende Auffassung der gemeinsamen Quelle vorzuliegen. Während nämlich in unserer Schrift die Verallgemeinerung des Satzes auf mehrere Factoren ausgedehnt wird, und zwar auf drei, (Cubus), und auf vier, was keine geometrische Bedeutung mehr hat, bezieht M. b. M. die Verallgemeinerung auf die Unabhängigkeit von der Grösse des Quadrates; während er bei den zwei Dimensionen stehen bleibt. Ist es nicht augenscheinlich, dass der Verfasser unserer Schrift und M. b. M. einen Satz aus gemeinsamer Quelle verschieden deuteten? —

4) קו (קוי in der Ausg. Druckf.) Schnur, Linie, Diagonale. Es soll aus-

d) Wie (ist) gleich an den Seiten und verschieden an den Winkeln (Rhombus)? z. B. fünf von jeder Seite, zwei Winkel spitz (צר eng) und zwei Winkel stumpf (רחב breit), und zwei Fäden (Diagonalen) durchschneiden sich gegenseitig in der Mitte, eine von acht und die zweite von sechs. Wer messen will, der multiplicire einen der Fäden in die Hälfte seines Genossen, (Conjugirten), was sich ergibt ist die M'schichah. Wie dieses da! (deutet auf die Figur hin).

e) Wie berechnet man, was ungleich an Seiten und Winkeln, aber zwei Längen für sich und zwei Breiten für sich (einander gleich sind) und die Winkel schief?[1]) Man durchschneide (das Parallelogramm) in zwei, von Ecke zur Ecke, und bringe (es) auf zwei, (Figuren), und berechne jede für sich nach Maass eines Dreiecks, und so ist die M'schichah (erhalten). Und so misst du auch was ganz und gar verschieden ist: so dass du alle[2]) ungleichseitigen Vierecke (betrachtest als bestehend) aus seinen Dreiecken.

Art. IV.

a) Drei Arten (sind es) beim Dreiecke und zwar: α) das rechtwinklige (נצבה) aufrechtstehende[3]), β) das spitz- (חדה scharfe), γ) das stumpfwinklige (פתוחה) offene. Wie ist das rechtwinklige?[4])

---

drücken, dass im Rhombus die Diagonalen einander senkrecht halbiren. Dieser Satz soll als Lemma zum folgenden dienen. Die in der Ausgabe vorgeschlagene Correctur זוית, Winkel, anstatt קו führt zu keinem Verständniss des Satzes, der wohl von dem vorigen Satze zu trennen ist, da jener vom Rechteck handelt, und hier von gleichen Seiten die Rede ist. Vielleicht trägt dieser Satz zur Ergänzung der Zahl von 49 Sätzen bei, die man hier zu suchen bemüht ist. S. Einleit.

1) ממחשבה אמה emendirt St. מחשב אותה, und so ist es hier übersetzt.

2) Die zwei Worte פְּסְקָה לשנים die hier sowohl, wie auch am Ende des Artikels sich vorfinden, gehören wohl zu den nebenstehenden Figuren, ebenso die Worte המשונה בכל עיקר. Uebrigens könnten sich letztere auf die Dreiecke beziehen, in welche die Vierecke zu zerlegen sind. Die Dreiecke werden in der That im Allgemeinen ungleichseitig sein. Bei M. b. M. ist das Parallelogramm direct und nicht durch Zerlegung in zwei Dreiecke bestimmt.

3) Zum erstenmal der Ausdruck, der für einen rechten Winkel später sehr geläufig geworden „זוית נצבת“. Hier aber eigentlich nur zur Benennung des rechtwinkligen Dreiecks gebraucht, dann in b) allerdings auch für den Winkel des rechtwinkligen Dreiecks, sonst aber nicht. Vielleicht ist hier das Bild von einem massiven Dreieck genommen, welches aufrecht stehen kann?!

4) Bemerkenswerth ist, dass diese Eigenschaft $a^2 + b^2 \overline{\overline{<}}_{>} c^2$ nicht als Lehrsatz, sondern als Charakteristik, ja als Definition des recht-, spitz- und stumpfwinkligen Dreiecks hier aufgestellt wird. Ganz ebenso geschieht es bei M. b. M. (S. die engl. Uebers. S. S. 77, 78, 79; franz. S. S. 8, 9.) In der englischen Uebersetzung ist sogar das Wort definition ausdrücklich gebraucht, was sich allerdings im arabischen Texte nicht findet. Aber dass diese Eigenschaft der Seiten als

Seine zwei kürzeren Seiten, jede für sich quadrirt, sind (in Summe) gleich dem ersten [dem Quadrat der längeren]; z. B. sechs von einer Seite und acht von der andern Seite; was herauskommt aus diesen für sich, [wenn man sie quadrirt und addirt], ist hundert, und von jenem für sich, (Quadrat der längeren Seite), ist ebenfalls hundert.

Wer messen muss [multiplicire eine] der kürzeren in die Hälfte der andern, entweder 8 in 3 oder 6 in 4, und was sich ergibt ist die M'schichah.

b) Der Winkel, welcher zwischen den Katheten eingeschlossen ist, ist der rechte (נצבה aufrechtstehende); und [das Dreieck] ist die Hälfte des Rechtecks, das ungleiche Seiten und gleiche Winkel hat.

Wer dieses (Dreieck) durch die Höhe berechnen will, der rechne es so (immerzu) nach seiner Weise, wenn seine (des Dreiecks) zwei Katheten seine zwei Säulen[1]) (Höhen) sind. Sie (vielleicht durch die Höhe entstandenen Dreiecke?) sind ähnlich, anliegend und rechtwinklig (gerade).

c) Die Säule (Senkrechte), welche aus ihnen [den kürzeren d. h. von ihrem Durchschnittspunkte] gezogen wird, fällt auf die lange Seite, das ist die Basis.[2])

---

charakteristisches Kennzeichen für das Maass des Winkels gebraucht wird, was schon die Idee der Goniometrie berührt, ist hier deutlich ausgesprochen. Ebenso findet es sich bei Alkarkhi und Beha-Eddin. Ich werde hier unwillkürlich erinnert an den Ausspruch meines hochverehrten Lehrers, Herrn Prof. M. Cantor, dass Seilspannung schon bei den Aegyptern unter anderm dazu benutzt wurde, um den rechten Winkel zu bestimmen, indem ein Seil vielleicht von 12 Einheiten Länge in Dreieckform so gespannt wurde, dass die Seiten 3, 4 und 5 Einheiten bildeten. Diese Zahlen finden sich beim Bau der Stiftshütte sowohl, wie beim Tempelbau Salomonis. Ja es scheint sogar der von den Bauhandwerkern benutzte Maasstab die Form eines solchen massiven rechtwinkligen Dreiecks besessen zu haben, wobei jede der Seiten möglicherweise eine Marke in ihrer Mitte trug und auf diese Weise auch die Maasse $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$ direct angab. Dadurch ist erklärlich, dass (Exodus XXV, 10 und XXXVII, 1) die heilige Lade die Grösse hat $2\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{2}$ und so natürlich auch der Deckel; dass (XXV, 23 und XXXVII, 10) der Tisch $2 \times 1\frac{1}{2}$ ist; dass beim Stiftszelt nur die Vielfachen von 3, 4, 5 vorkommen (XXVI, 2 und XXXVIII); dass (XXVII und XXXVIII) der Altar von der Grösse $5 \times 5 \times 3$ war; dass in dem Brustschilde 12 Edelsteine in vier Zeilen zu je drei sassen u. s. w.; dass I. Regum VI und VII beim Bau des Salomonischen Hauses und Tempels fast ausschliesslich Vielfache von 3, 4, 5, ebenso beim Bau der Arche (Genesis VI, 15) vorkommen. Dass die Reihenfolge, die Beispiele und Ziffern genau dieselben bei M. b. M. sind, habe ich schon mehrmals erwähnt, und wo nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, ist das stillschweigend vorausgesetzt.

1) In der Ausgabe צלעותיה הקצורים כ̈ן הם שני צלעו̈תיה עמודיה. Ich habe die zwei Worte כן צלעותיה in der Uebersetzung unberücksichtigt gelassen, weil sie den Sinn erschweren und in der Handschrift mit Punkten, wahrscheinlich als Tilgungszeichen, überzeichnet sind; St. S. III bemerkt das nur von dem כן. Der Satz stimmt auch so ziemlich mit M. b. M.

[2) המשך lies המשוך? Für אל lies על? נופל steht an ungeeigneter Stelle?

Wer messen will, multiplicire die Höhe in die halbe Basis, und was aus der Rechnung sich ergibt, das ist die M'schichah.

d) Wie das spitzwinklige? (Die) zwei kürzeren (welche auch gleich sein können) jede für sich quadrirt und zu einander addirt geben mehr als das Quadrat der dritten Seite, welche die Basis ist. Es gibt unter den spitzwinkligen auch gleichseitige; wer messen will berechne es mit Hülfe der Basis (und Höhe); somit finden wir die Winkel spitz. Wie das Maass des ersteren, so das des letzteren מן החדים צלעי (?)[1]

e) Wer das Maas der Höhe wissen will, bei gleichen Seiten, (gleichseit. Dreieck), multiplicire eine der Seiten in sich selbst [und die Hälfte der andern Seite in sich selbst][2]), ziehe das Kleinere vom Grösseren ab, was bleibt ist das Fundament (יסוד Quadrat, wovon die Wurzel gezogen werden muss), was dann gefunden wird (beim Ausz. d. W.) das ist die Höhe.

f) Wie zählt (berechnet) man? Zehn auf zehn sind hundert, und die Hälfte der andern Seite welche 5 beträgt, in sich selbst multiplicirt (gibt) 25, werfe das Kleinere vom Grösseren ab, so bleibt dort 75, das ist das Fundament (Quadrat) und seine Wurzel ist 8 und ein Rest.

Wer den Flächeninhalt messen muss, der multiplicire die Wurzel in die Hälfte der unteren Seite, und was sich (aus der Rechnung?)[3]) ergibt, das ist die M'schichah, welches 43 und etwas beträgt.[4])

---

vergl. unten § g. Anstatt מקבע lies הקבע, also: die von ihnen gezogene Säule (Höhe) fällt auf die lange Seite, das ist die Basis (קבע). St.]

[1) Dieser erste Satz muss im Text stark emendirt werden, um der kürzeren Fassung des M. b. M. (franz. S. 8 unten) zu entsprechen. או השוים „oder gleichen", steht dort nicht. „קבועים" für addirt ist mir sonst nicht bekannt. Lies מחוברים? Für הצלע השני muss השלישי, für ויותר muss הוא יותר emendirt werden. Der Schlusssatz . . . נמצא bedürfte noch einer Erklärung. מן החדים gehört vielleicht noch zu מדת האחרון und צלעי allein wäre zu tilgen. Ich verstehe noch nicht, was die spitzen Winkel (des gleichschenkligen Dreiecks) hier zu thun haben, und in Analogie mit unten § k möchte ich es nur als Vordersatz auffassen: Folglich ist (in Bezug auf) Spitzwinkel wie das Maass des ersteren etc. St.] Was die spitzen Winkel betrifft, so glaube ich, dass der Verfasser hier beweisen will, dass die Winkel eines gleichseitigen Dreiecks alle spitz sein müssen, weil die Summe der Quadrate zweier Seiten hierbei entschieden grösser sein muss, als das Quadrat der dritten Seite. Siehe Art. IV, a (4). — Und was ferner den ungewöhnlichen Ausdruck קבועים für Addition betrifft, so könnte vielleicht der Verfasser damit das Ansetzen der geometrischen Quadrate an einander ausdrücken wollen.

2) Hier sind offenbar vom Abschreiber die eingeklammerten Worte „וחצי הצלע השני בתוך עצמו" irrthümlich wegen des homoteleuton weggelassen.

[3) Für מן liest St. היא; man könnte auch החשבון ergänzen, ist aber nicht nöthig.] S. V, c.

4) Beachtenswerth ist es, dass M. b. M. an dieser Stelle den Fusspunkt der Höhe unter dem Namen Masquèt al hadjar ganz ausführlich algebraisch, mit

g) Sieben[1]) andere Arten (Methoden) bei den Dreiecken. Bei einem gleichseitigen Dreieck [betrachte] jede[2]) Seite für sich; was von dieser Seite gesagt wird, das gilt auch von jener, und was von jener gesagt wird, das gilt auch von dieser.

Wer versteht בתפוח[3]), der multiplicire (quadrire) eine der Seiten für sich, was hundert beträgt; werfe den vierten Theil davon, 25, weg; es bleibt 75.

Wer (den Inhalt) messen muss, multiplicire 75 in 25, d. h. drei Viertel in ein Viertel 25[4]); das beträgt 1875, ergreife dann die Wurzel, und das ist die M'schichah, welche 43 und einen Rest beträgt. Daraus findest du, dass die Senkrechte (Säule) aus der halben Basis[5]) immer in die Spitze einfällt.

h) So hast du gefunden (herausgebracht) die Ausrechnung beim Gleichseitigen, und so bei einem ihm ähnlichen (wahrscheinlich gleichschenkligen Dreieck), aber zur Berechnung des ungleichseitigen hast du daraus kein

---

Benutzung einer Gleichung zweiten Grades, bestimmt, während unsere Schrift kein Wort davon erwähnt. Dass M. b. M. trotzdem, dass er die algebraische Lösung hat, dennoch gleich unserer Schrift dem Fall auszuweichen sucht, wo die Höhe ausserhalb des Dreiecks fällt, kommt wohl daher, dass er die negative Wurzel sichtlich vermeiden will.

1) Was diese sieben Arten bedeuten sollen, ist mir unverständlich, wenn man nicht einen Sinn hineinzwingen wollte. Vielleicht soll es auch יש בה, etwa il-y-a, anstatt שבעה heissen.

2) Ueber ראיה steht ..̣, vielleicht ein Zeichen, dass das Wort unrichtig sei und am Rande emendirt werden sollte.

3) Apfel (?). Soll es vielleicht den Ort, wohin der Apfel fällt, d. h. den Fusspunkt bedeuten, wie „msaquèt al hadjar"? der Ort, wohin der Stein fällt, bei M. b. M. (Vgl. Deutsch. Sprw. „der Apfel fällt nicht weit vom Stamme").

4) Diese Worte: drei Viertel und ein Viertel für 75 und 25, kommen bei M. b. M. nicht vor. Die Bemerkung, dass 25 und 75, wenn die Seite 100 ist, dieselbe Rolle spielen, welche $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$, wenn die Seite als Einheit genommen wird, und der Umstand, dass hier der Dezimalbruch schon bis auf 4 Dezimalen geht (modern gesprochen $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = 0{,}25 \times 0{,}75 = 0{,}1875$), erinnert wiederum an meine Bemerkung in Art. I, h, dass unser Verfasser (oder vielleicht Jemand, der diesen Zusatz eingeschoben hätte) auf die Verwandlung der Brüche in Dezimalbrüche aufmerksam zu machen sucht, während M. b. M. dieses übergeht.

5) An dieser Stelle heisst es im Texte ס"א d. h. in der sehr gebräuchlichen Abkürzung ספר אחר: in einem andern Buche. Ist das eine Bemerkung des Abschreibers oder des Verfassers selbst, der übrigens seinerseits ebenfalls ein Abschreiber ist? Jedenfalls ist es wichtig, zu wissen, dass mehr als ein Buch hier vorlag. Vielleicht erklärt schon dieses den Umstand, dass, trotzdem diese Schrift Hand in Hand mit Mohamed ben Musa geht, dieselbe doch Manches enthält, was sich bei Jenem nicht findet, und umgekehrt.

Mittel zur [1]) Berechnung der M'schichah. Wer dieselben genau untersucht, der wird es herausfinden, entweder durch die [2]) Seiten, oder durch Höhe und Basis.

i) Wie berechnet man z. B. [3]) ein ungleichseitiges Dreieck, welches spitze Winkel hat (und) 15 an einer Seite, 14 an der zweiten und 13 an der dritten beträgt?

Wer messen muss, nehme alle drei Seiten zussmmen, das beträgt 42; nehme die Hälfte und siehe um wie viel dieselbe grösser als die erste Seite ist, multiplicire die Hälfte mit dem Ueberschuss, was 21 $\times$ 6 ausmacht und 126 beträgt; dieses stelle bei Seite. Nehme wieder jene Hälfte, und siehe nun um wie viel sie grösser ist als die zweite Seite, multiplicire den Ueberschuss, d. h. 7 mit den ersten 126, es beträgt 882; stelle dieses bei Seite. Nehme zum dritten Mal die Hälfte, und siehe, um wie viel sie grösser ist als die dritte Seite, multiplicire den Ueberschuss 8 in 882, es beträgt 7056; die Wurzel daraus ist 84, und das ist eben das Maass der M'schichah.

k) Wie das offene (stumpfwinklige?)

Wenn jede der kürzeren Seiten für sich quadrirt [4]) und zusammen addirt, und die dritte Seite d. h. die Basis für sich quadrirt wird, so ist das Quadrat der letztern grösser, als die (Summe der Quadrate der) erstern. Ist z. B. 5 an einer Seite, 6 an einer andern Seite und 9 an einer andern (dritten) Seite, so findet sich, dass einer der Winkel offen, (stumpf), und breit ist. [Weil] das Erste (die Summe der Quadrate der kleinern) 61 ist, und das Letztere (Quadrat der Basis) 81 (und somit nach obiger Definition bewiesen).

Wer messen soll, der rechne (klar) durch Höhe und Basis; wenn er aber die Rechnung der Seiten und ihrer Hälfte (Heronische Formel) vorzieht, so rechne er nach einer Art immer.

---

1) Das hier sich findende Wort קשת giebt keinen Sinn. Dagegen fehlt dieses Wort augenscheinlich in V, f. Vielleicht stand dasselbe früher am Rande und kam dann an unrichtiger Stelle in den Text herein?

2) ישכיל H. S., ישפיל in der Ausgabe, ist Schreibfehler. Anstatt ב׳ צלעים möchte ich בין בצלעים lesen.

3) Dieselben Zahlen für die Seiten nimmt auch M. b. M., aber an die Heronische Formel erinnert er mit keinem Worte, wohl aber Alkarkhi Seite 23. Vgl. auch die Citate bei St. S. V., Anm. 12, und Zeitschrift für Mathematik und Physik X, 487.

4) מצורך H. S. und so übersetzt; nicht מצרך wie in der Ausgabe.

[5) מְחַשְּׁבָה (nicht מַחְשָׁבָה), wie am Ende der Mischna; ברורה würde noch מַחֲשָׁבָה (ist aber nicht Calcul) erfordern. St.]

Art. V.

a) Drei Arten giebt es bei dem Runden, und zwar: das Hängende, das Hügelartige und das Flache. Welches ist das Hängende? Das ist das[1]) runde nach allen Seiten, wie ein Ball, oder ist die M'schicha (Oberfläche) wie bei einem Kürbis[2]) (כאבטיח), welcher rings umher rund ist, wenn nur die Rundung gleichförmig ist nach Länge, Breite und Tiefe. Wie (bestimmt man) durch Messen? Man multiplicire einen der Fäden (Durchmesser) in die Hälfte des andern[3]), (Umfangs), was herauskommt ist die M'schichah (Oberfläche) der Kugel, wenn das verdoppelt wird. Denn sie (die Wölbungen) sind als ihre (cylindrischen) Wände zu betrachten.[4])

b) Welches ist das Hügelartige? Das als Hälfte des Hängenden dasteht, wie ein Hügel, oder wie (eine Höhlung), wie ein Zelt[5]), wenn (die Rundung) nur gleichförmig ist. Wer messen soll, der multiplicire einen der Fäden von Ecke zur Ecke, (Durchmesser), in die Hälfte des andern[6]) Fadens (Umfanges), was herauskommt ist die M'schichah, (Oberfläche der Halbkugel).

c) Wie das Flache? Das was auf dem Boden liegt, wie ein rundes Feld, oder eine runde Figur. Wer messen soll, multiplicire den Faden (Durchmesser) in sich selbst, werfe davon ein Siebentel und ein halbes Siebentel weg; der Rest ist die M'schichah, das ist ihr Gag.[7])

---

1) עומדת עקר ד' vermag ich nicht zu erklären. S. hebr. Text.

2) Bei Beha-Eddin kommt ebenfalls der Ausdruck Gurke und Rübe vor. S. 29 und 32. Siehe zu S. 29 die Anmerkung 17 des Uebersetzers auf S. 66.

3) Das Wort עצמו kann sich hier durch den Abschreiber irrthümlich anstatt האחד eingeschlichen haben.

4) Siehe Alkarkhi Cap. 11. Es ist also der Satz ausgesprochen, dass die Oberfläche der Kugel gleich ist dem Cylindermantel von derselben Höhe.

5) H. S. כקובה; in der Ausgabe כמו נקובה ist unrichtig. כ als נ zu nehmen war sehr leicht, und anstatt כמו findet man in der H. S. einen üblichen Zickzack zur Ergänzung der Zeile.

6) Die Worte או בתוך חצי עצמו werden wohl wie oben irrthümlich eingeschoben sein, und zwar von einem, welcher unter האחד einen andern Durchmesser verstand; und daher hielt er sich berechtigt und verpflichtet, die Bemerkung zu machen, dass man ebensogut den Durchmesser selbst noch einmal nehmen kann. Indess ist aber hier unter dem (andern) Faden nicht der Durchmesser, sondern der Umfang gemeint. Uebrigens siehe hier M. b. M. Er hat da nämlich zwei Methoden: in der einen kommt der Umfang, in der andern aber kommt wirklich der Durchmesser selbst. Ob nicht hier wiederum so eine zweideutige Stelle beide Verfasser auf verschiedene Wege führte? oder ob nicht vielleicht in unserer hebräischen Schrift durch Auslassung von ein Paar Zeilen beide Methoden in einander sich verschmolzen haben? — ich wage es nicht zu entscheiden.

7) Hier findet sich הוא anstatt מן und oben IV, f, umgekehrt מן anstatt היא: Verwechselung des Schreibers, wozu das gleiche Wort המשיחה Veranlassung gegeben hat.

Wenn du den Umfang ringsherum wissen willst, so multiplicire den Faden (Durchmesser) in $3\frac{1}{7}$, das beträgt 22 [wenn der Durchmesser 7 ist].

Willst du die M'schichah (durch den Umfang) bestimmen, so nimm den halben Umfang, das ist 11, multiplicire es in den halben Faden (Durchmesser), was $3\frac{1}{2}$ beträgt, und es kommen $38\frac{1}{2}$ heraus. So im ersten Falle, so auch im letzten. Heisst es ja[1]): „Er machte das Meer gegossen zehn Ellen von seinem Rande zu seinem Rande, rund ringsum, und fünf Ellen seine Höhe“, da es heisst: „Und eine Schnur von 30 Ellen umringt es ringsherum.“ Was lernst du (aus den Worten) „und eine Schnur von 30 Ellen“ u. s. w.? Da die Erdenkinder (Profanen) von einem Kreise behaupten, der Umfang enthalte drei und ein Siebentel in den Faden; davon aber ein Siebentel an die Dicke des Meeres an seinen beiden Rändern aufgeht, so bleiben dreissig Ellen, welche es umringen. In diesem Maasse sind gleich die Meere, die Bäder und die Brunnen in Länge, Breite und Tiefe. Somit hast du das Maass des Runden gelernt.

e[2]) Drei Dinge sind beim Bogenartigen gesagt worden und zwar:

(Es gibt) eine gleiche (Figur), eine mangelhafte und eine überschüssige.

Welches ist die gleiche? — Die als Halbkreis dasteht, nicht weniger und nicht mehr. Die mangelhafte — die weniger als ein Halbkreis, und die Ueberschüssige, welche den Halbkreis übertrifft. Die Regel ist: Die, deren Pfeil[3]) kleiner ist, als die halbe Sehne, ist die mangelhafte, und die, deren Pfeil grösser ist, als die halbe Sehne, ist die Ueberschüssige.

f) Wer die gerade[4]) (gleiche) messen will, multiplicire die ganze[5]) Sehne in sich selbst, werfe davon ein Siebentel (und ein halbes Siebentel)[6]) weg; von dem Rest werfe man die Hälfte weg; was gefunden wird, ist die M'schichah.

g) Bei den andern musst du wissen, wie viel die Rundung (der Bogen) beträgt. Wie (macht man das)? Man multiplicire die halbe Sehne in sich selbst, das Ergebniss theile durch den Pfeil, was aus der Theilung gefunden wird addire zum Pfeil, das Ergebniss ist der [halbe] Faden des

---

1) I. Regum VII, 23; II. Chron. IV, 2.

2) § d fehlt; es ist aber im Manuscripte kein leerer Raum dafür gelassen.

3) Es muss heissen שֶׁחְצָה, anstatt שחציה. Hier hat wohl auch Jemand verbessern wollen und hat dadurch das Errathen nur erschwert.

4) Das Wort היתר hat wohl der Abschreiber aus dem Nachfolgenden genommen. Vielleicht hat ihn das sich wiederholende Wort את dazu verleitet.

5) Auf בתוך finden sich im Manuscript zwei Punkte und auf כולו ein Punkt, um anzuzeigen, dass man כולו בתוך עצמו zu lesen hat.

6) Dass וחצי שביעי hier einzuschalten sei, ist klar.

Kreises. $\left(\frac{d}{2} = r\right)$; ergreife die Hälfte dieses Fadens, multiplicire ihn in den halben Bogen[1]), das Ergebniss stelle man bei Seite, und sehe zu, ob der Bogen ein mangelhafter ist, dann werfe (ziehe) seinen Pfeil von dem halben Kreisfaden ab und multiplicire den Rest in die halbe Sehne, und ziehe das ab von dem Hingestellten, der Rest ist die M'schichah.[2]) Ist aber der Bogen ein überschüssiger, so werfe den halben Kreisfaden[3]) von dem Pfeile selbst ab, multiplicire den Rest in die halbe Sehne und addire das zum Hingestellten. Was herauskommt ist die M'schichah. Wie das Maass des erstern, so auch das Maass des letztern.[4])

Der Art. ist zu Ende und mit ihm auch die Mischnath (so!)
Hamiddoth, mit Hilfe denjenigen, der die Räthsel kennt (versteht).

---

1) Vielleicht gehört hierher das Wort קשת von Art. IV, h, welches dort den Sinn nur erschwert. Das kann vielleicht am Rande als Correctur für החץ gestanden haben, und ist dann an unrichtiger Stelle in den Text hineingekommen.

2) Die zwei Worte ר״ח ומשליך geben hier keinen Sinn. Auch מן für היא s. oben.

3) Lies משליך חצי חוט העגולה מֶחִצָּה.

4) D. h. das Resultat beider Methoden ist dasselbe.

Schlussbemerkung.

Nachdem gegenwärtige Arbeit fertig war, sandte ich sie dem Herrn Dr. Steinschneider, dem wir überhaupt die erste Auffindung unserer Schrift in dem genannten Cod. der Münchener Bibliothek verdanken, zur gefälligen Durchsicht.

Ich spreche hiermit demselben meinen innigsten Dank aus für freundliche Bemerkungen, von denen ich mehrere in eckigen Klammern unter Bezeichnung St. zuzufügen mir erlaubt habe. Sollte ich manche Fragen nicht genügend beantwortet, resp. manche Einwendung nicht hinreichend widerlegt haben, so dürfte mir vielleicht der ungeheure Mangel an Zeit einigermassen zur Entschuldigung dienen.

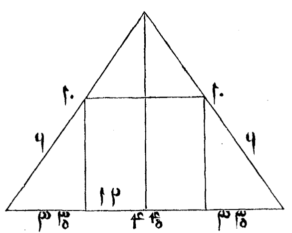
Wer vor mir versucht hätte diese Aufgabe zu lösen, wird es mir hoffentlich nicht übel nehmen, wenn noch vielleicht etwas zu wünschen übrig geblieben, falls die Aufgabe mindestens der Hauptsache nach als gelöst betrachtet werden könnte.

Vielleicht ist es mir später einmal vergönnt, auf den Gegenstand noch zurückzukommen. Vorläufig erwartet wohlwollende Zurechtweisungen in aller Ergebenheit der

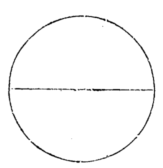
Uebersetzer.



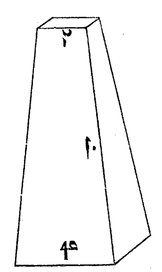
فان قيل ارض مثلثة من جانبيه عشرة اذرع عشرة اذرع والقاعدة اثنا عشر ذراعا في خوفها ارض مربعة كم كل جانب من المربعة فقياس ذلك ان تعرف عمود المثلثة وهو ان تضرب نصف القاعدة وهو ستة في مثله فيكون ستة وثلثين فانقصها من احد الجانبين الاقصرين مضروبا في مثله وهو ماية يبقي اربعة وستون فخذ جذرها ثمانية وهو العمود وتكسيرها ثمانية واربعون ذراعا وهو ضربك العمود في نصف القاعدة وهو ستة فجعلنا احد جوانب المربعة شيئا فضربناه في مثله فصار مالا فحفظناه ثم علمنا انه قد بقي لنا مثلثتان عن جنبتي المربعة ومثلثة فوقها فاما المثلثتان اللتان علي جنبتي المربعة فهما متساويتان وعموداهما واحد وهما علي زاوية قائمة فتكسيرها ان تضرب شيئا في ستة الا نصف شيء فيكون ستة اشياء الا نصف مال وهو تكسير المثلثتين جميعا اللتان هما علي جنبتي المربعة فاما تكسير المثلثة العليا فهو ان تضرب ثمانية غير شيء وهو العمود في نصف شي فيكون اربعة اشياء الا نصف مال فجميع ذلك هو تكسير المربعة وتكسير الثلث المثلثات وهو عشرة اشياء تعدل ثمانية واربعين هو تكسير المثلثة العظمي فالشيء الواحد من ذلك اربعة اذرع واربعة اخماس ذراع وهو كل جانب من المربعة ❋ وهذه صورتها ❋



يحيط بها وهو احد عشر فيكون ثمانية وثلثين ونصفا وهو تكسيرها فان احببت فاضرب القطر وهو سبعة في مثله فيكون تسعة واربعين فانقص منها سبعها ونصف سبعها وهو عشرة ونصف فيبقي ثمانية وثلثون ونصف وهو التكبير وهذه صورتها ❋

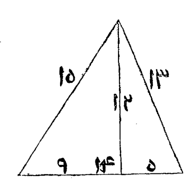


فان قال عمود مخروط اسفله اربعة اذرع في اربعة اذرع وارتفاعه عشرة اذرع وراسه ذراعان في ذراعين وقد كنّا بيّنّا ان كل مخروط محدد الراس فان ثلث تكسير اسفله مضروبا في عموده هو تكسيره فلما صار هذا غير محدد اردنا ان نعلم كم يرتفع حتي يكمل رأسه فيكون لا رأس له فعلمنا ان هذه العشرة من الطول كله كبعد الاثنين من الاربعة فالاثنان نصف الاربعة فاذا كان ذلك كذلك فالعشرة نصف الطول والطول كله عشرون ذراعا فلما عرفنا الطول اخذنا ثلث تكسير الاسفل وهو خمسة وثلث فضربناه في الطول وهو عشرون ذراعا فبلغ ذلك ماية وستة اذرع وثلثي ذراع فاردنا ان نلقي منه ما زدنا عليه حتي يخرط وهو واحد وثلث الذي هو ثلث تكسير اثنين في اثنين في عشرة وهو ثلثة عشر وثلث و ذلك تكسير ما زدنا عليه حتي انخرط فاذا رفعنا ذلك من ماية وستة اذرع وثلثي ذراع بقي ثلثة وتسعون ذراعا وثلث وذلك تكسير العمود المخروط وهذه صورته ❋

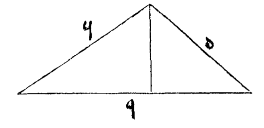


وان كان المخروط مدورا فالق من ضرب قطره في نفسه سبعه ونصف سبعه فما بقي فهو تكسيره ❋

ماية وتسعة وستين الا مالا هو العمود ايضا علمنا انهما متساويان فقابل بهما وهو ان تلقي مالا بمال لان المالين ناقصان فيبقي تسعة وعشرون وثمانية وعشرون شيئا يعدل ماية وتسعة وستين فالق تسعة وعشرين من ماية وتسعة وستين فيبقي ماية واربعون يعدل ثمانية وعشرين شيئا فالشيء الواحد خمسة وهو مسقط الحجر مما يلي الثلثة عشر وتمام القاعدة مما يلي الضلع الاخر فهو تسعة فاذا اردت ان تعرف العمود فاضرب هذه الخمسة في مثلها وانقصها من الضلع الذي يليها مضروبا في مثله وهو ثلثة عشر فيبقي ماية واربعة واربعون فجذر ذلك هو العمود وهو اثني عشر والعمود ابدا يقع علي القاعدة علي زاويتين قائمتين ولذلك سمي عمودا لانه مستو فاضرب العمود في نصف القاعدة وهو سبعة فيكون اربعة وثمانين وذلك تكسيرها وذلك صورتها ❋

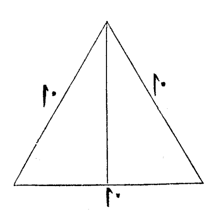


والجنس الثالث منفرجة وهي التي لها زاوية منفرجة وهي مثلث من كل جانب عدد مختلف وهي من جانب ستة ومن جانب خمسة ومن جانب تسعة فمعرفة تكسير هذه من قبل عمودها ومسقط حجرها ولا يقع مسقط حجر هذه المثلثة في خوفها الا علي الضلع الاطول فاجعله قاعدة ولو جعلت احد الضلعين الاقصرين قاعدة لوقع مسقط حجرها خارجها وعلم مسقط حجرها وعمودها علي مثال ما علمتك في الحادة وعلي ذلك القياس وهذه صورتها ❋



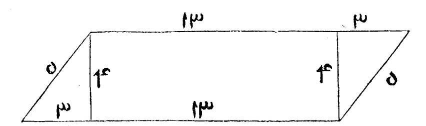
واما المدورات التي فرغنا من صفتها وتكسيرها في صدر الكتاب فمنها مدورة قطرها سبعة اذرع ويحيط بها اثنان وعشرون ذراعا فان تكسيرها ان تضرب نصف القطر وهو ثلثة ونصف في نصف الدور الذي

سوا اذا استوا الضلعان فان اختلفا خالف مسقط الحجر عن نصف القاعدة ولكن قد علمنا ان مسقط حجر هذه المثلثة علي اي اضلاعها جعلته لا يقع الا علي نصفه فذلك خمسة اذرع فمعرفة العمود ان تضرب الخمسة في مثلها وتضرب احد الضلعين في مثله وهو عشر فيكون ماية فتنقص منها مبلغ الخمسة في مثلها وهو خمسة وعشرون فيبقي خمسة وسبعون فخذ جذر ذلك فهو العمود وقد صار ضلعا علي مثلثتين قائمتين فان اردت التكسير فاضرب جذر الخمسة والسبعين في نصف القاعدة وهو خمسة وذلك ان تضرب الخمسة في مثلها حتي تكون جذر خمسة وسبعين في جذر خمسه وعشرين فاضرب خمسة وسبعين في خمسة وعشرين فيكون الفا وثماني ماية وخمسة وسبعين فخذ جذر ذلك وهو تكسيرها وهو ثلثة واربعون وشيء قليل وهذه صورتها ❋



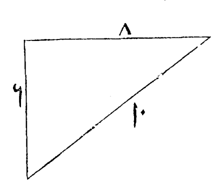
وقد تكون من هذه الحادة الزوايا مختلفة الاضلاع فاعلم ان تكسيرها يعلم من قبل مسقط حجرها و عمودها وهي ان تكون مثلثة من جانب خمسة عشر ذراعا و من جانب اربعة عشر ذراعا ومن جانب ثلثة عشر ذراعا فاذا اردت علم مسقط حجرها فاجعل القاعدة اي الجوانب شئت فجعلناها اربعة عشر وهو مسقط الحجر فمسقط حجرها يقع منها علي شيء مما يلي اي الضلعين شئت فجعلنا الشيء مما يلي الثلثة عشر فضربناه في مثله فصار مالا ونقصناه من ثلثة عشر في مثلها وهو ماية وتسعة وستون فصار ذلك ماية وتسعة وستين الا مالا فعلمنا ان جذرها هو العمود وقد بقي لنا من القاعدة اربعة عشر الا شيئا فضربناه في مثله فصار ماية و ستة وتسعين ومالا الا ثمانية وعشرين شيئا فنقصناه من الخمسة عشر في مثلها فبقي تسعة وعشرون درهما وثمانية وعشرون شيئا الا مالا وجذرها هو العمود فلما صار جذرها هذا هو العمود وجذر

واما سائر المربعات فانما تعرف تكسيرها من قبل القطر فيخرج الي حساب المثلثات فاعلم ذلك وهذه صورة المشبهة بالمعينة ❋



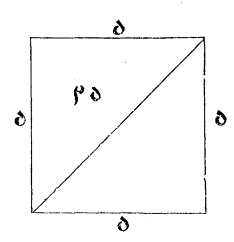
واما المثلثات فهي ثلثة اجناس القائمة والحادة والمنفرجة ❋ واما القائمة فهي مثلثة اذا ضربت ضلعيها الاقصرين كل واحد منهما في نفسه ثم جمعتهما [كان مجموع ذلك مثل الذي يكون من ضرب الضلع الاطول في نفسه ❋ واما الحادة فهي مثلثة اذا ضربت ضلعيها الاقصرين كل واحد منهما في نفسه ثم جمعتهما] كانا اكثر من الضلع الاطول مضروبا في نفسه ❋ واما المنفرجة فهي كل مثلثة اذا ضربت ضلعيها الاقصرين كل واحد منهما في نفسه وجمعتهما كانا اقل من الضلع الاطول مضروبا في نفسه ❋

فاما القائمة الزوايا فهي التي لها عمودان وقطر وهي نصف مربعة فمعرفة تكسيرها ان تضرب احد الضلعين المحيطين بالزاوية القائمة في نصف الاخر فما بلغ ذلك فهو تكسيرها ❋ ومثل ذلك مثلثة قائمة الزاوية ضلع منها ستة اذرع وضلع منها ثمانية اذرع والقطر عشر فحساب ذلك ان تضرب ستة في اربعة فيكون اربعة وعشرين ذراعا وهو تكسيرها ❋ وان احببت ان تحسبها بالعمود فان عمودها لا يقع الا علي الضلع الاطول لان الضلعين القصيرين عمودان فان اردت ذلك فاضرب عمودها في نصف القاعدة فما كان فهو تكسيرها وهذه صورتها ❋

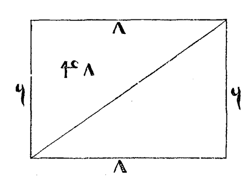


واما الجنس الثاني فالمثلثة المتساوية الاضلاع حادة الزوايا من كل جانب عشرة اذرع فان تكسيرها تعرف من قبل عمودها ومسقط حجرها واعلم ان كل ضلعين متساويين من مثلثة تخرج منهما عمود علي قاعدة فان مسقط حجر العمود يقع علي زاوية قائمة ويقع علي نصف القاعدة

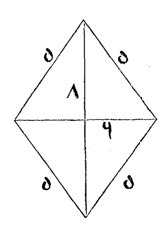
قائمة الزوايا فان تكسيرها ان تضرب الطول في العرض فما بلغ فهو التكسير ❊ ومثال ذلك ارض مربعة من كل جانب خمسة اذرع تكسيرها خمسة وعشرون ذراعا وهذه صورتها ❊



والثانية ارض مربعة طولها ثمانية اذرع ثمانية اذرع والعرضان ستة ستة فتكسيرها ان تضرب ستة في ثمانية فيكون ثمانية واربعين ذراعا وذلك تكسيرها وهذه صورتها ❊

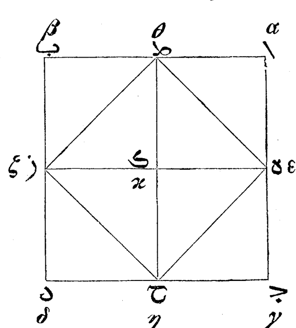


واما المعينة المستوية الاضلاع التي كل جانب منها خمسة اذرع فاحد قطريها ثمانية والاخر ستة اذرع فاعلم ان تكسيرها ان تعرف القطرين او احدهما فان عرفت القطرين جميعا فان الذي يكون من ضرب احدهما في نصف الاخر هو تكسيرها وذلك ان تضرب ثمانية في ثلثة او اربعة في ستة فيكون اربعة وعشرين ذراعا وهو تكسيرها فان عرفت قطرا واحدا فقد علمت انهما مثلثان كل واحد منهما ضلعاها خمسة اذرع خمسة اذرع والضلع الثالث هو قطرهما فاحسبهما علي حساب المثلثات وهذه صورتها ❊



واما المشبهة بالمعينة فعلي مثل المعينة ❊

الضلع الاطول في نفسه ❋ وبرهان ذلك انا نجعل سطحا مربعا متساوي الاضلاع والزوايا اب جد ثم نقطع ضلع اج بنصفين علي نقطة ه ثم نخرجه الي ر ثم نقطع ضلع اب بنصفين علي نقطة ط و نخرجه الي نقطة ح فصار سطح اب جد اربعة سطوح متساوية الاضلاع والزوايا والمساحة وهي سطح اک وسطح جک وسطح بک وسطح دک ثم نخرج من نقطة ه الي نقطة ط خطا يقطع سطح اک بنصفين فحدث من السطح مثلثين وهما مثلثا اطه وهکط فقد تبين لنا ان اط نصف اب و اه مثله وهو نصف اج و توترهما خط طه علي زاوية قائمة وكذلك نخرج خطوطا من ط الي ر ومن ر الي ح ومن ح الي ه فحدث من جميع المربعة ثماني مثلثات متساويات وقد تبين لنا ان اربع منها نصف السطح الاعظم الذي هو اد وقد تبين لنا ان خط اط في نفسه تكسير مثلثين و اه تكسير مثلثين بمثلهما فيكون جميع ذلك تكسير اربع مثلثات وضلع هط في نفسه ايضا تكسير اربع مثلثات اخر وقد تبين لنا ان الذي يكون من ضرب اط في نفسه و اه في نفسه مجموعين مثل الذي يكون من ضرب طه في نفسه وذلك ما اردنا ان نبين وهذه صورته ❋



اعلم ان المربعات خمسة اجناس فمنها مستوية الاضلاع قائمة الزوايا والثانية قائمة الزوايا مختلفة الاضلاع طولها اكثر من عرضها والثالثة تسمي المعينة وهي التي استوت اضلاعها واختلفت زواياه والرابعة المشبهة بالمعينة وهي التي طولها وعرضها مختلفان وزواياها مختلفة غير ان الطولين مستويان والعرضين مستويان ايضا والخامسة المختلفة الاضلاع والزوايا ❋

فما كان من المربعات مستوية الاضلاع قائمة الزوايا او مختلفة الاضلاع

بعض ❋ والدور اذا قسمته علي ثلثة وسبع يخرج القطر ❋ وكل مدورة فان نصف القطر في نصف الدور هو التكسير لان كل ذات اضلاع وزوايا متساوية من المثلثات والمربعات والمخمسات وما فوق ذلك فان ضربك نصف ما يحيط بها في نصف قطر اوسع دائرة يقع فيها تكسيرها ❋ وكل مدورة فان قطرها مضروبا في نفسه منقوصا منه سبعه ونصف سبعه هو تكسيرها وهو موافق للباب الاول ❋

وكل قطعة من مدورة مشبهة بقوس فلا بد ان يكون مثل نصف مدورة او اقل من نصف مدورة او اكثر من نصف مدورة و الدليل علي ذلك ان سهم القوس اذا كان مثل نصف الوتر فهي نصف مدورة سوا واذا كان اقل من نصف الوتر فهي اقل من نصف مدورة واذا كان السهم اكثر من نصف الوتر فهي اكثر من نصف مدورة ❋ واذا اردت ان تعرف من اي دائرة هي فاضرب نصف الوتر في مثله واقسمه علي السهم وزد ما خرج علي السهم فما بلغ فهو قطر المدورة التي تلك القوس منها ❋ فان اردت ان تعرف تكسير القوس فاضرب نصف قطر المدورة في نصف القوس واحفظ ما خرج ثم انقص سهم القوس من نصف قطر المدورة ان كانت القوس اقل من نصف مدورة وان كانت اكثر من نصف مدورة فانقص نصف قطر المدورة من سهم القوس ثم اضرب ما بقي في نصف وتر القوس وانقصه مما حفظت ان كانت القوس اقل من نصف مدورة او زده عليه ان كانت القوس اكثر من نصف مدورة فما بلغ بعد الزيادة او النقصان فهو تكسير القوس ❋

وكل مجسم مربع فان ضربك الطول في العرض ثم في العمق هو التكسير ❋ فان كان علي غير تربيع وكان مدورا او مثلثا او غير ذلك الا ان عمقه علي الاستواء والموازاة فان مساحة ذلك ان تمسح سطحه فتعرف تكسيره فما كان ضربته في العمق وهو التكسير ❋

واما المخروط من المثلث والمربع والمدور فان الذي يكون من ضرب ثلث مساحة اسفله في عموده هو تكسيره ❋

واعلم ان كل مثلث قائم الزاوية فان الذي يكون من ضرب الضلعين الاقصرين كل واحد منهما في نفسه مجموعين مثل الذي يكون من ضرب

باب المساحة ❋

اعلم ان معني واحد في واحد انما هي مساحة ومعناه ذراع في ذراع ❋ وكل سطح متساوي الاضلاع والزوايا يكون من كل جانب واحد فان السطح كله واحد ❋ فان كان من كل جانب اثنان وهو متساوي الاضلاع والزوايا فالسطح كله اربعة امثال السطح الذي هو ذراع في ذراع ❋ وكذلك ثلثة في ثلثة وما زاد علي ذلك او نقص وكذلك نصف في نصف بربع وغير ذلك من الكسور فعلي هذا ❋ وكل سطح مربع يكون من كل جانب نصف ذراع فهو مثل ربع السطح الذي هو من كل جانب ذراع وكذلك ثلث في ثلث وربع في ربع وخمس في خمس وثلثان في نصف او اقل من ذلك او اكثر فعلي حسابه ❋ وكل سطح مربع متساوي الاضلاع فان احد اضلاعه في واحد جذره وفي اثنين جذراه صغر ذلك السطح او كبر ❋

وكل مثلث متساوي الاضلاع فان ضربك العمود ونصف القاعدة التي يقع عليها العمود هو تكسير ذلك المثلث ❋

وكل معيّنة متساوية الاضلاع فان ضربك احد القطرين في نصف الاخر هو تكسيرها ❋

وكل مدورة فان ضربك القطر في ثلثة وسبع هو الدور الذي يحيط بها وهو اصطلاح بين الناس من غير اضطرار ❋ ولاهل الهندسة فيه قولان اخران احدهما ان تضرب القطر في مثله ثم في عشرة ثم تاخذ جذر ما اجتمع فما كان فهو الدور ❋ فالقول الثاني لاهل النجوم منهم وهو ان تضرب القطر في اثنين وستين الفا وثماني ماية واثنين وثلثين ثم تقسم ذلك علي عشرين الفا فما خرج فهو الدور وكل ذلك قريب بعضه من

Zur Vergleichung über die besprochene Analogie zwischen unsrer Schrift und der ersten arabischen **Geometrie** von **Mohamed ben Musa Alkharezmy** mag hier der arabische Text des letztern nach der Ausgabe von Rosen, London 1831, von Seite ٥٠ = 50 bis Seite ٦٤ = 64 folgen.

ו׳ (f) הרוצה למוד את הישרה מצרף את היתר כולו בתוך עצמו ומשליך ממנו שביע [וחצי שביע] והנותר משליך חציו והנמצא הוא המשיחה.

ז׳ (g) והאחרות צריך אתה לידע כמה שעור עגלתה, כיצד מצרף את חצי היתר בתוך עצמו והעולה מחלקו על החץ והנמצא מן החלוק מוסיפו על החץ והעולה הוא [חצי] חוט העגולה, ואוחז חצי־החוט הזה ומצרף אותו בתוך חצי “הקשת„ והעולה מעמידו על צד ורואה אם היתה הקשותה חסרה משליך חֲצָּה מֵחֲצִי חוט העגולה ומצרף הנותר בתוך חצי היתר ופוחת אותו מן הצד והנשאר “היא„ המשיחה. ואם היתה הקשותה יתרה משליך [חצי חוט] העגולה מֵחֶצָּה עצמה ומצרף את הנשאר בתוך חצי היתר ומוסיף אותו על הצד והעולה היא המשיחה. כמדת הראשון כן מדת האחרון.

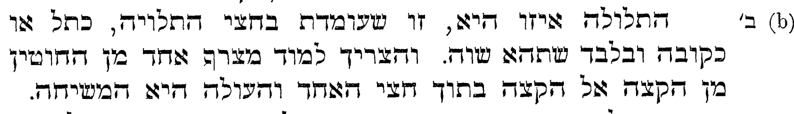
נשלם הפרק ובהשלמתו תמה משנת המדות,
בעזר יודע חידות.

(f) את הישרה so! das dazwischen befindliche Wort היתר ist überflüssig. — כולו בתוך עצמו anst. בתוך עצמו כולו in der Ausgabe. — [וחצי שביע] fehlt in Hs. und Ausgabe. — מוסיפו על anst. מוסיפו מן. — [חצי] fehlt in Hs. und Ausgabe. „חֲצִי־הַחוּט הזה“: diesen erwähnten *Radius*; und nicht etwa „die Hälfte des erwähnten Durchmessers“, da oben vom Radius und nicht vom Durchmesser die Rede war. — „הקשת“ anstatt החץ. — חֶצָּה anstatt חציה. — „היא“ anst. מן; nach המשיחה finden sich in Hs. und Ausg. zwei überflüssige Worte ומשליך ר״ח. — [חצי חוט] fehlt in Hs. und Ausg. — מֵחֶצָּה so!

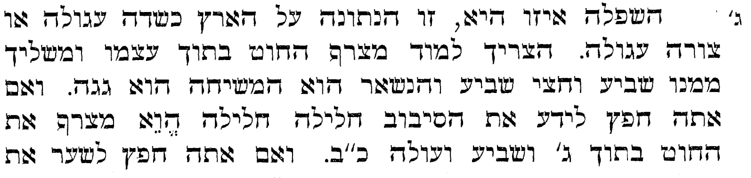
Schluss: משנת nach der Hs. anstatt מסכת׳ in der Ausgabe.

So der hebr. Text der Mischnath Hammiddoth wie ich ihn mir in der Uebersetzung gedacht habe. Die Abweichungen, die ich mir von Hs. und Ausg. erlaubt habe sind in den Randbemerkungen angegeben.

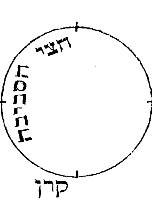
ועמק. במדה. כיצד מודד מצרף את החוטין הא׳ בתוך חצי „האחד“ והעולה היא המשיחה והכפל אותה שהן קירותיה.



(b) ב׳ התלולה איזו היא, זו שעומדת בחצי התלויה, כתל או כקובה ובלבד שתהא שוה. והצריך למוד מצרף אחד מן החוטין מן הקצה אל הקצה בתוך חצי האחד והעולה היא המשיחה.



(c) ג׳ השפלה איזו היא, זו הנתונה על הארץ כשדה עגולה או צורה עגולה. הצריך למוד מצרף החוט בתוך עצמו ומשליך ממנו שביע וחצי שביע והנשאר הוא המשיחה הוא גגה. ואם אתה חפץ לידע את הסיבוב חלילה חלילה הֱוֵא מצרף את החוט בתוך ג׳ ושביע ועולה כ״ב. ואם אתה חפץ לשער את המשיחה אחוז חצי הסביבה שהיא י״א וצרף אותה בחצי החוט שהוא ג׳ וחצי ועולין ל״ח ומחצה, כן בראשונה כן באחרונה. הרי הוא אומר ויעש את הים מוצק עשר באמה משפתו אל שפתו עגל סביב ושלשים אמה סביבתו שנ׳ וקו שלשים באמה יסב אותו סביב, מה תלמוד וקו שלשים באמה וגומ׳ לפי שאמרו בני ארץ בעגולה שהסביבה מחזקת שלש פעמים ושביע בחוט יצא מהם שביע אחד בעביו של ים לשתי שפתות ונותר שם ל׳ אמה יסוב אותו סביב ובשעור הזה שוים אחד הימים והמקואות והבורות בארך וברחב ועמק הא למדת מדת העגולה.



(e) ה׳ ג׳ דברים נאמרו בקשותה ואלו הן, הישרה, החסרה והיתרה איזו היא ישרה כל שהיא עומדת בחצי העגולה לא חסר ולא יתר, החסרה כל שהיא פחותה מחצי העגולה, והיתרה כל שהיא עודפת על חצי העגולה, זה הכלל כל שֶׁחִצָּה עומד פחות מֵחֲצִי היתר [בידוע] שהיא חסרה, וכל שֶׁחִצָּה יותר מֵחֲצִי היתר בידוע שהיא יתרה.

(a) האחד anstatt עצמו.

(b) כקובה nach der Hs. anst. כמו נקובה in Ausg. — Die vier Worte או בתוך חצי עצמו, die sich nach dem Worte האחד in Hs. und Ausg. vorfinden, sind offenbar einem Verbesserungsversuche, von einem, der das Original nicht verstanden hat, zuzuschreiben. S. Uebers.

(c) הֱוֵא so! — ועולין nach der Hs. anstatt ועולה in d. Ausg. — ל״ח anst. ל״ה — Zu der Figur V (c). קרן wahrscheinlich *Pol.* In der Hs. ist diese Figur viereckig anst. kreisförmig zu sein; die Figuren tragen überhaupt den Charakter einer flüchtigen Nachzeichnung an sich. An der Figur zu (a) habe ich ein Wort תלויה, welches dort keinen Sinn giebt, weggelassen; es soll vielleicht חצי התלויה heissen.

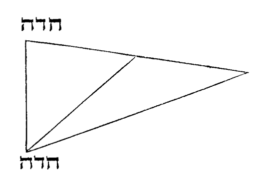
(d) סביבתו so!! wollte man die Lesart קומתו, wie in Hs. und Ausgabe auf Grund der betr. Bibelstelle beibehalten, so müsste man וחמש באמה anstatt ושלשים אמה setzen, und dann noch das folgende שנ׳ streichen. — בני ארץ Prophanen; nach einer Seite verwandt mit עמי הארץ. — שוים אחד anstatt אחד שוים in Hs. und Ausg.

(e) שֶׁחִצָּה anst. שחצייה in Hs. und Ausg. — [בידוע] nach St.

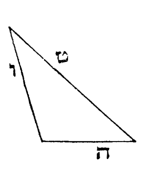
מצרף אחד מהם בפני עצמו שהם ק׳ ומשליך את הרבע שהוא כ״ה ונשאר ע״ה והצריך למוד מצרף ע״ה בתוך כ״ה שהם ג׳ רבעים ברבע (כ״ה) אחד והם עולים אלף ות״ת וע״ה ותופש את העיקר והוא המשיחה והוא מ״ג ושירים. מכאן אתה מוצא שהעמוד של חצי הקבע (ס״א) נופל לעולם.

(h) ה׳ הרי שהוצאת השוה וכן הדומה לו, אבל חשבון חלופים אין לך מהם בחשבון המשיחה, והמדקדק בהם ישכיל בין בצלעים בין בעמוד עם הקבע.

(i) ט׳ כיצד משער, כגון משלשת חלופים שהיא חדה בזויות ט״ו מצד ראשון י״ד מצד שני י״ג מצד שלישי, והצריך למוד מחזיק שלשתן בבת אחת עולים מ״ב, ולוקח את המחצה ורואהו כמה הוא יתר על צד ראשון ומצרף המחצה על היתר שהוא כ״א בתוך ו׳ והם נעשים קכ״ו ומעמידו לצד, וחוזר שנית ולוקח את המחצה ורואה כמה הוא יתר על צד שני ומצרף את היתר שהוא ז׳ בתוך קכ״ו הראשונים והם עולים ת״ת ופ״ב ומעמידו לצד. וחוזר שלישית ולוקח המחצה ורואה כמה הוא יתר על צד שלישי ומצרף את היתר שהוא ח׳ בתוך ת״ת ופ״ב האחרים והם עולים ז׳ אלפים ונ״ו ועקרם פ״ד והם הם שיעור המשיחה.



(k) י׳ הפתוחה כיצד, צלעותיה הקצרים כל אחד מהם "מצורף„ בפני עצמו, ומוסיפין זה על זה והצלע הג׳ שהוא הקבע מצורף בפני עצמו, הצירוף האחרון יתר מן הראשון כמו ה׳ מצד [זה] ו׳ מצד זה ט׳ מצד זה נמצאת א׳ מן הזויות פתוחה ורחבה נמצא הראשון ס״א והאחרון פ״א. והצריך למוד מחשבה ברור בעמוד עם הקבע. ואם חפץ הוא בחשבון הצלעים והמחצה מחשבה מדה אחת לעולם.



פרק ה׳. V.

(a) א׳ שלש מדות בעגולה, ואלו הן התלויה, התלולה, והשפלה. אי זו היא התלויה זו העומדת עקר העגולה מכל צד כדור או שהיתה המשיחה כאבטיח שהיא עגולה לסביבותיה ובלבד [שתהא] עגולתה בשוה ארך ורחב

---

welchem die drei Punkte wahrscheinlich als Tilgungszeichen anzusehen sind. — [זה] nach St. — בתפוח s. Uebers. — (ס״א) s. Uebers.

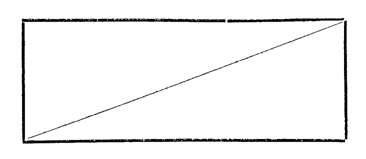
(h) Zwischen לך und מהם das Wort קשת in Hs. und Ausg. S. Uebers. — ישכיל בין בצלעים wird sich Rath schaffen, entweder mittels der Seiten, oder etc. anst. ישפיל ב׳ צלעים in Hs. und Ausg.

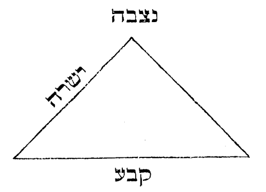
(i) Das Wort הם vor הראשונים in der Ausg. findet sich im Manuscripte nicht; dagegen steht an dessen Stelle ein Zickzack zur Ergänzung der Zeile.

(k) „מצורף" Hs. anstatt מצרף in der Ausg. — [זה] St. — ברור anstatt ברורה welches wahrscheinlich durch die irrthümliche Auffassung von מַחְשָׁבָה anstatt מְחַשְּׁבָהּ entstanden ist.

V. (a) העומדת anstat היא עומדת. — העגולה oder vielleicht ועגולה anstatt ד׳ עגולה. — עגולה anstatt העגולה. — [שתהא] fehlt in Hs. und Ausgabe.

(b) ב׳ והזוית שהיא עומדת בין הקצורים היא הנצבה והיא חצייה של מרובעת שהיא משונה בצלעים וישרה בזויות. המבקש לחשבה בעמוד יחשב כדרכו

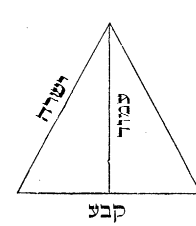




והוא ששני צלעותיה הקצורים הם שני עמודיה והם דומים סמוכים ישרים.

(c) ג׳ והעמוד המשך מהם אל צד הארוך נופל והוא מקבע. והרוצה למוד מצרף העמוד בתוך החצי הקבע והעולה מן החשבון היא המשיחה.

(d) ד׳ החדה כיצד, שני צלעותיה קצורים או השוים כל אחד ואחד מצורף בפני עצמו קבועים זה עם זה והצלע השני שהוא הקבוע מצורף בפני עצמו הצרוף הראשון יותר מן האחרון. ויש מן החדה שצלעותיה ישרות והרוצה למוד מחשב אותה כנגד הקבע נמצא הזויות חדות כמדת הראשון כן מדת האחרון.



(e) ה׳ הרוצה לדעת במדת העמוד בצלעות השוות מצרף את האחד מן הצלעות בתוך עצמו [וחצי הצלע השני בתוך עצמו] ומשליך המיעוט מן המרובה והנשאר הוא היסוד והנמצא הוא העמוד.

(f) ו׳ כיצד מונים, עשרה על עשרה ק׳ וחצי הצלע השני שהוא ה׳ מצורף בפני עצמו כ״ה ומשליך הקטן מן הרב נשאר שם ע״ה והוא היסוד ועקרו [ח׳] ושירים. והצריך למוד מצרף העקר בתוך החצי הצלע התחתון והעולה מן החשבון [היא] המשיחה שהיא מ״ג ושירים.

(g) ז׳ שבעה פנים אחרות במשולשות השוה בצלעותיה כל צלע וצלע. בפני עצמו את האמור של [זה] בזה ואת האמור של זה בזה והמבין בתפוח [?]

(b) הקצורים כֿןֿ הם שני צלעוֿתֿיה עמודיה anstatt הקצורים הם שני עמודי׳ in der Handschrift, wo die Doppelpunkte über כֿןֿ und צלעוֿתֿיה sicherlich Tilgungszeichen sind. In der Ausg. sind die Punkte weggelassen, und dafür nach כן ein Fragezeichen gesetzt.

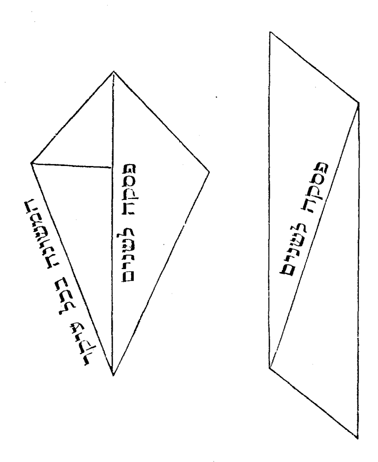
(d) יותר anst. ויותר. — Nach מדת האחרון finden sich im Text noch die Worte: „מן החדים צלעי“, die von St. mit (sic) begleitet wurden; vielleicht gehören sie auch den Figuren an.

(e) Die Worte von עצמו bis עצמו fehlen in Hs und Ausg.

(f) [ח׳] nach St. anst. ה׳ in d. Hs. — [היא] nach St. anst. מן einzusetzen; ich habe מן gelassen und habe analog dem Obigen (IV, (c)) noch החשבון hinzugefügt.

(g) שבעה s. Uebers. nach St. könnte es vielleicht ursprünglich ז׳ פנים אחרות geheissen haben, wobei ז׳ den Paragraphen bezeichnen sollte, und ist aus Missverständniss שבעה anstatt ז׳ geschrieben worden und dann noch ein ז׳ zur Bezeichnung des § obendrein (?). — Nach וצלע findet sich noch ein Wort ראֿיֿה, über

המשונה בצלעות ובזויות ושני ארכן לבד ושני רחבן לבד והזויות (e) ה׳
עקומות כיצד מחשב אותה פוסקה שנים מזוית לזוית ומעמיד בשנים ומחשב



כל אחד בפני עצמה כמדת המשולשת וכן היא המשיחה. וכן אתה מודד
חשבון המשנה בכל עקר וכל המרבעות המשונות עשה אותם ממשלשותיהן כזה.

פרק ד׳. IV.

שלש מדות במשלשות ואלו הן הנצבה, החדה, הפתוחה. איזו היא (a) א׳
נצבה שני צדיה הקצורים מצורפים כל אחד בפני עצמו והוא שוה לראשון
כגון ששה מצד זה ושמנה מצד זה והעולה מאלו בפני עצמן מאה ומזה
בפני עצמו מאה. והצריך למוד [מצרף אחד] מן הקצורים בתוך חצי חברו
או ח׳ בתוך ג׳ או ו׳ בתוך ד׳ והעולה היא המשיחה.

(e) מחשב אותה nach Steinschneider, anstatt ממחשבה אמה im Cod. — Nach וכל finden sich zwei Worte פסקה לשנים, welche offenbar zur Figur gehören; ebenso die Worte המשונה בכל עיקר und פסקה לשנים am Ende dieses Kapitels; ich habe diese Worte auch in die betreffenden Figuren, wo sie hingehören, hineingeschrieben. Hier der Text in der Ausg.: וכל [?] פסקה לשנים. המרבעות המשונות עשה [?] אותם משלישותיה המשונ׳ בכל עיקר כזה פסקה לשנים.

Was die Figuren überhaupt betrifft, so sind sie zwar als Freihandzeichnungen nicht ganz genau, indess konnte ich die Meinung des Herrn St. nicht theilen: „sie könnten etwa weggelassen werden, weil sie das Verständniss nicht förderten“(?). Ich habe sie hier wiedergegeben; nur genauer und in etwas grösserem Massstabe. Die Berechtigung dazu verschafft der augenscheinliche Sinn einerseits und die Vergleichung mit M. b. M. andererseits. — ממשלשותיהן anstatt משלישותיה.

IV. (a) [מצרף אחד] nach St.

אמות עליונות והם עולים י"ג אמה ושליש, ומשליך אותם מן ק"ו ושלישים נשתיירו שם צ"ג ושליש והוא באת [?] העמוד גיו הקטוע, ואם הר' עגול השלך ממנו השביע וחצי השביע והנשאר בו הוא [המשיחה].

פרק ג'. III.

(a) א' חמשה פנים יש במרובעות ואלו הן יש ישרה בצלעותיה ובזויותיה. ב'. ויש מי שהיא משונ' בצלעותיה וישרה בזויותיה. ג'. ויש שהיא ישרה בצלעותיה ומשונ' בזויותיה. ד'. ויש שהיא ישרה משונ' בצלעותיה ובזויותיה ושני ארכן שוין לבד ושני רחבן לבד. ה'. ויש מי שהיא משונה בצלעותיה ובזויותיה כל עיקר.

(b) ב' השוה בצלעות ובזויות איזו היא כגון עשרה מן [כל] צד מצרף ארך על הרחב והעולה היא המשיחה והם ק' והצלע האחד הוא עקדה האחד ושני צלעותיה הם שני עקריה וכן ג' וכן ד'.

(c) ג' והמשונה בצלעותיה וישרה בזויותיה, כגון ח' בשני צלע וששה בשני צלע, מצרף ארך על רחב שהן מ"ח והיא המשיחה, ישרה בצלע וישרה בקו.

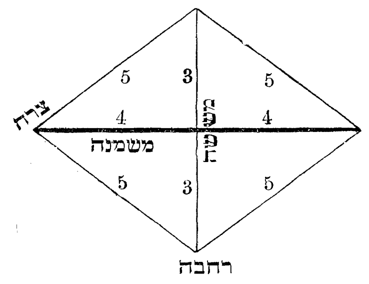
(d) ד' הישרה בצלעותיה ומשונה בזויותיה איזו היא, כגון ה' מכל צד ושני זויות צרים וב' זויות רחבים וב' חוטין מפסיקין זה את זה באמצע הא' משמנה והב' מששה. והרוצה למוד מצרף הא' מן החוטין בתוך חצי חברו והעולה משניהם היא המשיחה כ"ד אמה כזה.

Schreiber selbst verbesserter, und später aus Irrthum stehen gelassener Satz: ושליש, והשלך מן כ"ו ושלישים נשתיירו שם ע"ט ושליש והוא מ'צ' ומשליך אותם מן ק"ו ושלישים נשתיירו שם ש"ט ושליש והוא וכו'. — צ"ג anstatt ש"ט. — באת St. will מדת einsetzen; dafür würde auch der Umstand sprechen, dass der Schreiber das erste mal nach והוא ein מ' angefangen hatte; das צ gehört vielleicht dem צ"ג an anstatt dessen ש"ט irrthümlich geschrieben ist. S. Uebers. — [המשיחה] nach St.

III. (b) [כל] nach St. — עקריה anst. עקרה in d. Ausg.

(c) בקו wie in der Hs. anstatt [בזור' ?] in der Ausg.

(d) כזה zeigt auf die nebenstehende Figur, welche offenbar von dem Schreiber missverstanden wurde; die Figur ist so gemeint:



Man beachte, dass zur Herstellung des rechten Diagonalwinkels hier wiederum die sogenannten Pythagoräischen Zahlen 3, 4, 5 gewählt sind. Dieselbe Figur findet sich bei M. b. M.

ה' (e) הרוצה למוד את הגג המרובע אפי' שהוא שוה אפי' הוא מחלף שהוא
ארך ורחב הגג במניין שש פנים, שש כנפים לאחד, מצרף ארך בתוך רחב
בתוך העמק והעולה משלשתן היא משיחת הגג והוא הגוף.

ו' (f) ואם היה עגול או משולש או לכל מיני צדדין מלבד שיהיה עמקו ישר
ונאה ממה מודד הגג במדד שלו במדה שאמרו ותדע המשיחה והיודע
אותה מצרפו בתוך העומק הוא משיחת הגוף.

ז' (g) והמשוך ראשו חד וסופו ממוצע ואפי' מרובע או שיהי' עגול או משולש,
אתה מודד משיחת הגוף והשלך שני שלישי המשיחה ואחוז השליש [ה] אחר
ואתה מצרפו בתוך הקומה והעולה הוא משיחת הגוף מראש ועד סוף.

ח' (h) הצריך למוד התל או דבר מקובה ובלבד שיהיו דופנותיו שוות מכל
צד כחצי כדור או כדומה לו, מצרף א' מן החוטין מן הקצה אל הקצה
בתוך חצי האחד והעולה משניהם היא המשיחה.

ט' (i) עמוד. ובעמוד אם היה משוך לראשו וראשו חד או משוך לחציו הקובה
או לכל שהוא מכין בסופו ובקטועו שהוא הקטוע הראש מוחלק זה מזה
כשיעור הסוף ומודדו (כמו) בחשבון האחרון ומשליך הקטן מן החבל והנשאר
הוא משיחת העמוד.

י' (k) כיצד משער כגון עמוד מרבע וסופו ד' אמות בתוך ד' אמות חסר ועולה
חסר ועולה וראשו שתי אמות על שתי אמות רבוע, וצריך אתה לידע כמה
משיחתו וכמה קומתו, וכבר נאמ' באחרון אלא שזו קטוע ועדין אי אתה
יודע כמה הוא העמוד עד שיכלה אחד מלמעלה.

יא' (l) במניין אתה משער, כמדת שתיים מארבע' כן ארך העמוד שהוא חצי
המעלה, נמצא כל העמוד עד שיכלה הראש עשרים אמה ועד הקטופה י'
אמות הא למדת שמדת שנים מן הארבעה כמדת הי' מן העשרים.

יב' (m) הצריך למוד אוחז שליש ראשו חד צורף בסוף והם ה' ושליש ומצרפו
בתוך כ' אז הם עולים ק"ו אמות ושני שלישי אמה ומעמידן לצד אחד, וחוזר
ואוחז שליש צרוף הקטופה ב' על ב' והוא אמה ושליש ומצרפו בתוך עשר

(e) שהוא ארך ורחב, so! St. ergänzt auch hier ועומק; s. Uebers. — כנפים, hier in dem Sinne von כנפות, Ecken, Kanten gedeutet!

(f) במדד vielleicht eine eigene Form für Massstab. — והיודע anst. והמודע, s. M. b. M. — העומק, anstatt העמק.

(g) [ה]אחר, St. — מראש nach St. anst. וראש.

(h) האחד; in d. Ausg. האחר.

(i) הקובה; St. emendirt המקובה. — מוחלק Hs. anst. מחלק in der Ausg., welches Veranlassung zu einer andern Auffassung gegeben hat. — (כמו) in der Ausg. weggelassen; sieht in der Hs. auch aus wie ein Zickzack zur Ergänzung der Zeile. — החבל von St. mit Fragezeichen begleitet; vielleicht: Messschnur.

(k) אחד eine der im gegenwärtigen Falle zu betrachtenden zwei Pyramiden; einfacher jedoch die Emendation חד von St.

(m) בסוף Basis, die in unsrem Falle 16 beträgt; die Correctur בט"ז ist also unnöthig. — ושליש ,ומשליך, so!! In der Hs., wie in der Ausg. findet sich zwischen diesen beiden Worten noch ein ganzer, falsch geschrieben gewesener, dann vom

(g) ז' והפחותין מן הא' כך אתה מחלקן, אמה אחת לשני חוטין זה מפסיק את זה באמצע מצלע ימין לצלע שמאל וכן מרום לתחת, נמצא הגג חלוק בד' פסקאות ואתה מוצא חצי אמה על חצי אמה ומשיחה עצמה חלק מאמה שהוא רבע מכל הגג, וכן שליש על שליש וחומש בתוך חומש בשוים ובחלופים. מכאן ואילך צא וחשוב בשבורים במדה הזאת ולמטה.

(h) ח' כבר אמרו מחצה על מחצה הוא מרובע וכן שליש על שליש הוא מתשע, בהן ובדומין להן. אלא בשוין ובחלופים מנים להם אב אהוא[?] כך אתה מונה עשרה על עשרה הרי הן עולין ק' וחצי העשר הוא ה'. ה' פעמים ה' הם כ"ה והוא רבע ק'. ומעמד הי' בא' ומעמד הק' בי' ואלף בק'. מכאן ואילך צא וחשוב בשבורים כמדת האחדים אבל באחדים הוא מוסיף ובפחותים הוא גורע.

(i) ט' זה הכלל מחצה על מחצה, חצי המחצה. ושליש על שליש שליש השליש. וכן מחצה על השליש חצי השליש. וכן רביע על השליש רביע השליש. בהן ובדומין להן בשוים ובחלופים.

פרק שני. II.

(a) א' הרוצה למוד השדות המרבעות בשוים ובחלופים מצרף הארך על הרחב והעולה משניהם הוא המשיחה.

(b) ב' ובמשלשת בין בשוים בין בחלופים מצרף חעומד בחצי הקבע והעולה משניהם היא המשיחה, והרבה מבואותה בה.

(c) ג' העגולה כיצד מצרף החוט בתוך עצמו ומשליך ממנו שביע וחצי שביע והיתר היא המשיחה. כמו חוט שהוא משוך לז' וצרופו מ"ט ושביע וחצי שביע הוא [י' וחצי] נמצאת המשיחה ל"ח ומחצה.

(d) ד' הקשותה כיצד נותן החץ על היתר שניהם בבת אחת ומצרף אותה בתוך חצי החץ ומעמידן לצד, וחוזר ולוקח חצי היתר וצורפו בתוך עצמו ומחלק על י"ד והעולה מוסיפו על העומד והעולה היא המשיחה. ויש בה פנים אחרים.

(g) מחלקן so! — זה מפסיק nach St. anst. והמספיק im Cod. ebenso שמאל anstatt ימין. — מאמה so; Ausgabe מ'[?] אמה; auch מכל הגג anstatt מכל צד Manuscr. u. Ausg.

(h) lies מְתֻשָּׁע; von אלא bis אבאהוא s. Uebersetzung.

(i) שליש השליש nach St. anst. חצי השליש; s. Uebers.

II. (a) השדות nach Manuscr. anstatt המדות Ausg. — הוא המשיחה so! das zwischen diesen beiden Worten eingeschlichene Wort הרחב ist sicherlich eine irrthümliche Wiederholung von oben.

(b) העומד nach der Handschr. anst. העמוד in der Ausg. — מבואותה Hs. Ausg. מבואתה.

(c) שביע; im Mscr. wie in d. Ausg. heisst es bald so und bald שביעי; ich habe überall das erstere in Analogie mit שליש gesetzt. — והיתר; St. corrigirt והנותר. — [י' וחצי] von St. mit Recht ergänzt.

I. פרק א׳

א׳ (a) בארבעה דרכים המדידה נקבצת ואלו הן המרבעת, והמשלשת, והעגלה, והקשותה, זה הכלל השניה חצי הראשון, והרביעית חצי השלישית, ושאר האחרות משלבות זו בזו כסינר בברית.

ב׳ (b) המרבעת בג׳ פנים, בצלע, בחוט, ובגג. אי זו היא הצלע זה המחזיק דופנותיו של גג, שנאמר רבוע יהיה המזבח, והחוט זה המפסיק מזוית לזוית מן הקצה אל הקצה והוא היותר בארכו של גג. והגג עצמו היא המשיחה.

ג׳ (c) והמשלשת בד׳ פנים, בשני־הַצֵּלָע, בקבע, בעמוד, בגג. אלו הן שני צלע זה השני משוכים ימין ויכין שנ׳ כי ימין ושמאל תפרוצי. והקבע זה ששני צלעים קבועים עליו שנ׳ אשר הבית נכון עליהם. והעמוד זה חוט הכולל היורד מבין שני הצלעים לקבע והוא בזוית למקצעות המשכן. והגג עצמו היא המשיחה.

ד׳ (d) העגול בג׳ פנים, בסביבה, בחוט, ובגג. איזו היא סביבה הוא הקו המקיף את העגול שנ׳ וקו שלשים באמה יסב אותו סביב. והחוט זה המשוך משפה אל שפה שנ׳ משפתו אל שפתו. והגג עצמו היא המשיחה.

ה׳ (e) והקשותה בד׳ פנים, בקשת, וביתר, ובחץ ובגג. איזו היא קשת [זה] החלק מן העגול שנ׳ כמראה הקשת אשר יהיה בענן. היתר זה המחזיק בפי הקשת שנ׳ קשת דרוכה. והחץ הוא המשוך מאמצע הקשת לאמצע־ היתר שנ׳ כוננו חצם על יתר. והגג עצמו היא המשיחה.

ו׳ (f) כיצד מודדין את המשיחה במנין אתה מחשב אחד על אחד זהו המשיחה והיא אמה על אמה. נמצא הגג השוה בצלעים ובזויותיו הרי אתה מונה אותם מכל צד. והטבלא העומדת שנים מכל צד והזויות שוים. והמדידה מחזקת ד׳ מונים במדת הא׳ שהיא אמה בתוך אמה, וכשהיא ג׳ מכל צד הרי הוא ט׳ מונים במדת הא׳, וכן ד׳ על ד׳ וה׳ על ה׳. מכאן ואילך צא וחשוב במדה זאת ולמעלה.

I. (a) האחרות St. ergänzt hier הצורות, man muss aber bedenken, dass dieses Wort überhaupt schon für die obigen bestimmten Figuren wie המרבעת etc. hier zugedacht werden muss. — בברית nach St. anstatt בבריות im Cod.

(b) המפסיק so! die Correctur המהדק, המחזיק halte ich für überflüssig; wiederholt sich ja hier der Ausdruck פְּסִקָה, פוסקה, מפסיק im Sinne des Durchschneidens.

(c) בשני הצלע Manuscript; בשני׳ בצלע Ausg. fehlerhaft.

(d) בזוית unter rechtem Winkel, anst. später gebräuchl. בזוית נצבת; s. Uebers.

(f) והזויות שוים Manuscript; Ausg. שנים unrichtig.

משנת המדות

נמצאה בכ״י במינכען על ידי המגלה צפונות בגנזי בית עקד ספרי כ״י הרב ד״ר שטיינשניידער והובאה בפעם הראשון לדפוס על ידו; ועתה העתקתיה ובארתיה בשפת אשכנז, אחרי אשר הוספתי לנקותה משגיאות רבות על פי הכ״י ועל פי ספר המשיחה למחמד בן מוסה אלחריזמי, המחבר היותר קדמון בחכמת המאטהעמאטיק בספרות הערבית, בהראותי כי מקורו גם מקור משנתנו ממקור אחד נבער,

הערמאן שפירא יליד רוסיא,

יושב כעת בשבת תחכמוני,
ודורש חכמת המאטהעמאטיק

פה היידעלבערג בארץ באַדען.

בשנת מִשְׁנָה זוֹ אֵין מִדָּה טוֹבָה הֵמֶּנָּה לפ״ק.

ABRAHAM IBN ESRA

(ABRAHAM JUDAEUS, AVENARE).

ZUR GESCHICHTE

DER

MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN IM XII. JAHRHUNDERT.

VON

MORITZ STEINSCHNEIDER.

Uebersicht.

§ 1.

Auf die Bedeutung des 12. Jahrhunderts, und insbesondere der durch Juden vermittelten morgenländischen Wissenschaft, habe ich vor 12 Jahren hingewiesen, als ich in der Zeitschrift für Mathematik u. s. w. Bd. XII (1867, S. 1) den älteren „Abraham Judäus“ (Abraham bar Chijja oder *Savasorda*) behandelte und einleitend von verschiedenen Anführungen eines Juden Abraham in älteren nichtjüdischen Quellen sprach (vgl. weiter unten). Während „Savasorda's“ Geometrie (*Liber Embadorum*) in der Uebersetzung des Plato aus Tivoli fast unbekannt blieb, erfreuten sich die astrologischen Schriften des Abraham (Sohn des Meir) ibn Esra (oder Ezra) einer Berühmtheit neben denen des 400 Jahre ältern Juden Maschallah (*Messahala* etc.) und des fälschlich als „*Ismaelita*“ (für Israelita) geltenden Sahl ben Bischr (*Zael Bembiç* etc.). Die Juden selbst kannten Abraham bar Chijja hauptsächlich als Astronomen, und zwar insbesondere in Anwendung der Sternkunde auf Zeitmessung, Chronologie und das Kalenderwesen, ibn Esra vornehmlich als Exegeten, Grammatiker, Theologen, Dichter, allerdings auch als Astrologen, indirect oder direct. In unserer Zeit, wo die sogenannte rabbinische (neuhebräische) Literatur nach allen Richtungen hin sich immer mehr und mehr historischer Behandlung erfreut, ist auch ibn Esra als Mathematiker ins Auge gefasst worden. Sein Name hat sich einen Platz in den vielen encyklopädischen Wörterbüchern erworben, die Geschichte der Mathematik, namentlich der Astronomie, hat ihn frühzeitig als hervorragende Erscheinung berücksichtigt[1]), allerdings mit sehr geringer Kenntniss des Einzelnen und Eigenthümlichen, mit groben Irrthümern, auf

---

1) In Riccioli's Tabelle (Almagest.) ist Abraham Abenesra unter Rabbi zu suchen. — Ueber Weidler, Bibliogr. astron. p. 5, und Lalande, Bibliogr. p. 5, s. Abr. Jud. S. 36. — Im XVI. Jahrhundert gab es in Constantinopel und Salonichi eine Familie ibn Esra, darunter einen Arzt Abraham; s. Halberstamm in *Kebod ha-Lebanon* (Paris) VI, 285. Die ungenaue Bezeichnung der Quelle bei Coronel in *Kochbe Jizchak* (Wien) XXIV, 29, verleitete mich zu einer irrigen Conjectur (Hebr. Bibliographie VI, 129 und im Verzeichniss der hebr. Handschriften der k. Bibliothek in Berlin S. 32 unter fol. 60b und vorletzte Zeile). Vielleicht sind von diesem Arzte die Erklärungen zu Kidduschin bei Benjacob, *Thesaur. libr. hebr.* Wilna 1880, S. 175 n. 247?

deren Beleuchtung ich von vornherein verzichte, angesichts der schwereren Aufgabe, das Material zu einer gerechten Würdigung zu liefern, und der lockenden Versuchung, auf Gebiete zu gerathen, auf welche die gewöhnlichen Leser dieser Blätter kaum folgen würden, oder auch könnten, ohne dass ich ihnen alle und jede Berührung damit ersparen kann. Hingegen hielt ich es für angemessen, der hebräischen mathematischen Terminologie, für welche noch sehr wenig im Zusammenhange geleistet ist, eine grössere Beachtung zuzuwenden.

Dass die beiden Abraham, ungeachtet gleicher Studien, unter ehrenvoller Erwähnung vielleicht auch Bearbeitung des älteren Seitens des jüngern, nicht in einem persönlichen Verhältniss von Lehrer und Schüler gestanden, ist schon im Artikel Abraham Judäus (S. 11 A. 20) nachgewiesen, die irrige Behauptung aus einem Missverständniss erklärt und beleuchtet. Es wird sich die an Unmöglichkeit grenzende Unwahrscheinlicheiner solchen Annahme ergeben, wenn wir uns erinnern, dass der ältere Abraham um 1136 in Barcellona lebte, gelegentlich nach Südfrankreich kam[2]) und für die Bewohner dieses Landes hebräisch schrieb, während ibn Esra jene Gegend erst als gereifter Mann berührte. Dies führt uns auf die ersten Momente, welche als Grundlage weiterer Darstellung zu erörtern wären.

§ 2.

Wenn auf anderen Gebieten nicht selten die bekannten Lebensverhältnisse eines Schriftstellers einen festen Boden für die Aneinanderreihung, einen Schlüssel für die Würdigung seiner Schriften darbieten: so gehört das in der jüdischen Literatur des Mittelalters zu den höchst seltenen Ausnahmen; vielmehr ist man meistens darauf angewiesen, aus Titeln,

---

2) Das Wort צרפת (Frankreich), welches bei Geiger (Mose ben Maimon S. 76, vgl. Abr. Jud. S. 7 A. 10) fehlt, und durch andere Conjectur ersetzt wird, fand ich später in der von ihm benutzten Hs. München 10 f. 207b deutlich! Vgl. auch Abr. Jud. S. 42 und S. 6 Anm. 6. Bei Henricus Bates im *lib. de mundo* (s. unten § 21) f. 77a liest man: „*Insuper Abraham princeps, quem Avenare magistrum suum profitetur in quinto redemptionis israel.*“ Das ס׳ הקץ in der Hs. Oppenh. 254 fol. f. 6, an dessen Ende ibn Esra als Verfasser vermuthet wird, ist in der That (wie Dukes, Litbl. der Orient XI, 341 andeutet) der Schluss des *Megillat* etc. von Abraham bar Chijja (Hs. Bodl. 160 f. 113 ff.); ibn Esra zu Daniel 10, 31 nennt es הקצים von „Abraham ha-Nasi“. Die polemische Tendenz habe ich richtig errathen. S. mein Polemische und apologetische Literatur, Leipzig 1877, S. 350. Eine Confusion mit dem Nasi ist die Bezeichnung *Abraham Ducis seu Principis*, in der Leipziger astrologischen Hs. bei Feller, p. 327. — Ob der von ibn Esra angeführte „Spanier“ (*Sefaradi*) — Abr. Jud. XII, 7 A. 10, S. 15 A. 24; Zeitschrift D. M. Gesellschaft XVIII, 177 — der Nasi sei, werde ich anderswo erörtern.

Nachschriften von zweifelhafter Geltung, einzelnen Stellen, Vor- und Rückverweisungen, die auch nachträglich eingeschoben sein können, u. dgl., die Linien zu einem dürftigen Lebensabriss zusammenzuholen. Bei unserem Autor kommt noch hinzu, dass er heimathslos unter welchselndem Aufenthalt, seine Schriften für verschiedene Personen abfassend — wenn die ausdrücklichen Widmungen nicht bloss als Complimente gelten sollten[3]) — dieselben grossentheils zweimal herausgab, das zweitemal wahrscheinlich oft ohne im Besitz derersten Recension zu sein[4]). Einiges trägt die deutlichen Spuren fremder Hand, wie man frühzeitig bemerkte; man kennt sogar Namen von Hand anlegenden Schülern[5]). Aber ganze Schriften sind offenbar untergeschoben oder irrthümlich beigelegt; es werden Titel citirt, die entweder zu anderweitig bekannten Schriften gemacht, oder aus der Luft gegriffen sind[6]). Die Neigung, das unbekannte Leben bedeutender

---

3) Der um 1216—18 alle drei Welttheile durchziehende berühmte Dichter Al-Charisi (der hebräische 'Hariri) widmete seine Makamen nicht weniger als vier verschiedenen Personen; die vierte hebräische Widmung, an einen Schemarja b. David in Jemen, findet sich in einer Hs., welche Herr Shapira aus Jerusalem kürzlich aus Jemen brachte; dafür ist die Widmungsstelle der arabischen Vorrede gekürzt, welche nächstens im *Bollettino Italiano degli Studj orient.* erscheint. — Von solchen Doppelwidmungen ist bei ibn Esra allerdings nichts bekannt; auch sind die Personen, denen er widmet, nicht als vornehme Mäcene bezeichnet; vgl. weiter unten.

4) Vgl. die Stelle aus *Safa Berura* (f. 15 ed. Fürth 1839) bei Grätz, Geschichte VI, 449.

5) Joseph ben Jakob ממדויל mit abweichender Orthographie und Auslegung (Catal. libr. hebr. in Bibl. Bodl. p. 1477; *Ozar Nechmad*, her. von Ign. Blumenfeld II, 223, III, 152); Grätz, Geschichte der Juden VI, 1861, S. 447 Nr. XI erklärt *Mondeville* (?); in *Hamwasser* her. von J. Kohn 1862, S. 49: „*Monteville* in der Normandie"; bei Berliner, Magazin für die Wissenschaft der Juden I, 108: „*Corbeil*" sicher falsch; daselbst S. 111: „*Morvil* oder *Marvil*" in England; Friedländer *Essays* etc. p. 209: „*Maudeville*". In zwei Hss. des *Jesod More* (unten § 13), nämlich Bodl. bei Uri Nr. 318, Luzzatto 114, jetzt Berlin 244, Oct., ist der Endvers ergänzt: אודה בהשלימו לאל לידידו יוסף בנו יעקב על מתנת ידו, also wäre das Buch für denselben Joseph ben Jakob verfasst. — Ein Anderer, Isak ben Jehuda, beruht theilweise auf sehr verdächtiger Autorität, s. meinen Artikel Mosconi, Magazin für die Wissenschaft des Judenthums, her. von A. Berliner und D. Hoffmann, III, 1876, S. 149 unter Mose ibn Esra, der fälschlich zum Bruder unseres Abraham gemacht und mit ihm nach Palästina (oder Aegypten) geschickt wird; s. weiter unten. Vgl. Magazin III, 49; Grätz, Geschichte VI, 446 identificirt einen jüngeren Homonynus, s. unten § 13, Anm. 132. — Ueber Zusätze vgl. Comtino in *Catal. Codd. hebr. Lugd. Bat.* 1858 p. 207. Vgl. auch unten Anm. 9.

6) Z. B. כחות שנות האדם „Kräfte der Jahre des Menschen", über den astrologischen Einfluss auf die Kräfte des Menschen je nach dem Lebensalter, worin der Verfasser seine eigenen Schicksale (als Beleg?) angeführt und woraus nach

Männer durch Legenden zu ergänzen, hat sich auch unseres fahrenden Autors bemächtigt, um ihn mit einem anderen, nicht minder berühmten Dichter und Theologen durch einen kurzen Roman in Verwandtschaft zu bringen. Nimmt man noch hinzu die knappe, sich gerne in Anspielungen ergehende Ausdrucksweise unseres Autors: so wird man eine annähernde Vorstellung gewinnen von den kritischen Misslichkeiten einer für Nichthebraisten berechneten Darstellung des Mannes und seiner Leistungen. Glücklicherweise kommt es uns, da wir ibn Esra nur als mathematischen Schriftsteller (im weitesten Sinne) vorzuführen beabsichtigen, auf die Genauigkeit einiger Daten (Zeit und Ort) weniger an, und es sollen hier nur die Hauptmomente des äusseren Lebens fixirt werden, so weit sie spruchreif erörtert vorliegen, oder in kurzer Erörterung zu gewinnen sind.

§ 3.

Die Unsicherheit der Daten in älteren Quellen[7]) und die anscheinenden Widersprüche in den Epigraphen und Verweisungen des Autors selbst hat man in neuerer Zeit auszugleichen gesucht. S. L. Rapoport[8]) hat

der Vermuthung des höchst verdächtigen Mosconi, ein angeblich im Jahre 1170 (?) in der Bulgarei lebender Supercommentator Abischai seine — wiederum verdächtigen — Daten geschöpft habe. Meine Abweisung dieses Materials (Hebr. Bibliogr. XV, 90) hat Berliner (Magazin III, 48) der Erwähnung werth gehalten. Friedländer (*Ess.* p. 214, Anm. 3) lässt ein Wort des Titels weg und sagt nicht deutlich, dass er im Namen Mosconi's berichte.

7) Aeltere Quellen verzeichnet Wolf, Biblioth. hebr. I, S. 86, jüngere bis ungefähr 1850 mein *Catalogus libr. hebr. in Bibliotheca Bodleiana* (Berlin 1852—60) p. 689, und Addenda, wo nachzutragen eine (von Depping citirte, mir nicht näher bekannte und schwerlich bedeutende) Abhandlung von Boissi in dessen *Dissert. Tom.* II. Ferner erwähne ich, wegen des mit der jüdischen Literatur vertrauten Verfassers, einen Artikel von J. Derenbourg (früher Dernburg) in der *Biographie Universelle*, und die populär gehaltene Charakteristik bei A. Geiger, Das Judenthum und seine Geschichte, Bd. II, Breslau 1865, S. 130—137, vgl. S. 183. Der Lebensabriss bei M. Friedländer (*The Commentary of ibn Ezra on Isaiah, vol.* I. *translation, London* 1873, *Introd.* p. XI ff.) folgt meist Grätz (Geschichte der Juden VI, 198 ff.); s. Hebr. Bibliogr. XIII, 27.

8) „Kritischer Apparat zu den Werken A. Ebn Esra's", in A. Geiger's Wissenschaftliche Zeitschrift für jüdische Theologie, IV. Band, Stuttgart 1839, S. 261—282. Geiger (daselbst S. 282) schliesst sich der grundlegenden Abhandlung des „gelehrten, gründlichen und scharfsinnigen Verfassers" [gestorben als Rabbiner zu Prag 16. Oct. 1867] in den allgemeinen Resultaten an und erhebt nur Bedenken gegen die Abfassung des Commentars zu Exodus (der uns näher angeht) durch Schüler; Friedländer, *Essays*, p. 152, betrachtet denselben als besonderes Werk. — Einen Ueberblick der Zeitfrage gibt De Rossi, Historisches Wörterbuch der jüdischen Schriftsteller, deutsch von Hamberger, Leipzig 1839 (2. Aufl., d. h. neues Titelblatt ohne Jahr) S. 3 (vgl. dazu Geiger, wissenschaftliche Zeitschrift IV, 446).

nach den vor 40 Jahren und in Lemberg zu Gebote stehenden Mitteln den Grund gelegt, auf welchem seitdem fleissig, wenn auch nicht immer richtig, weiter gebaut wird[9]).

Da bestimmte Nachrichten über das Geburtsjahr fehlen, so musste man, allerdings nicht ohne alle Berichtigung, die Notizen über seinen Tod zu Grunde legen. Es wird erzählt, dass er Montag, Neumond des ersten Adar 4927 (Februar 1167) gestorben, im Tode die Worte Abrahams (Genesis 12, 4) auf sich angewendet, also 75 Jahre alt geworden sei[10]). Das jüngste Datum in seinen Schriften ist ebenfalls 4927 (1166/7)[11]) und zwar

---

9) Die chronologischen Fragen behandelt im Zusammenhange, nicht ohne gewaltsame Hypothesen, Grätz, Geschichte der Juden, VI, 440—454, Note 8 „Ibn Esra, die Reihenfolge seiner Schriften und die Daten seiner Reise"; eine Uebersicht der Resultate S. 451. Theilweise andere Resultate gewinnt S. H. Halberstamm im Vorwort zum Buch *Ibbur* (unten § 21) S. 14—16 (vgl. dazu Hebr. Bibliogr. XIV, 90). M. Friedländer, *Essays on the writings of Abraham ibn Ezra*, London 1877 (vgl. dazu Hebr. Bibliogr. XVII, 217) giebt die Epigraphe einzelner Bibel-Commentare zerstreut (der Index S. IX ist zwischen S. 166 und 183 uncorrect) und ordnet S. 195 die Commentare in Italien (meist ohne Jahrzahlen) und Frankreich. Seine englische Uebersetzung ist nicht überall genau; so z. B. S. 147 in der Anmerkung: „*till he reached his sixty fourth year*", im Originale: „Die Zahl seiner Lebensjahre ist acht [multiplicirt] mit acht", also im 65. Jahre (wie im Text: *in the age of 64*), der Ausdruck zugleich bezeichnend für den Mathematiker und Zahlsymboliker. Ueber die für die Abfassungszeit wichtige Stelle p. 146 s. unter Anm. 91. — Unbequem ist bei Friedländer die nachträgliche Behandlung der Handschriften (195 ff.); z. B. S. 184, 188 (Hiob) und 210 über angebliche Bearbeitung eines Schülers (vgl. oben Anm. 5). Die Kreuzverweisungen bespricht Mathews in einer Note zur 1. Recension des Comm. Daniel (*Miscellany of Hebrew Literature, ed. by A. Löwy*, London 1877, p. 272).

10) In dem hebräischen Epigraph des Cod. Vatican. 39, bei Assemani S. 29, steht so wenig als in andern bekannten, etwas vom Monat Ab; letzteres ist in der lateinischen Uebersetzung vielleicht aus dem Worte בארבעה, wenn der Anfang dieses Wortes am Ende der Zeile zur Ausfüllung steht, zu erklären (vgl. Grätz S. 451, dem wohl Assem. selbst nicht zugänglich war). Damit erledigt sich die Bemerkung De Rossi's, die in der deutschen Uebersetzung S. 4 kaum verständlich ist. S. folgende Anm.

11) Vom Schlussgedicht zum Pentateuchcommentar haben wir eigentlich zwei Recensionen von 7 oder 10 Zeilen mit geringen Varianten (Friedländer, *Ess.* 158—160 und Anhang S. 69, spricht von vier Recensionen); die letzten drei, welche das Datum enthalten, nennen einen „6. Tag" als Freudentag für Israel, und hier bietet nur die HS. in Cambridge eine wesentliche Variante, indem sie den Monat Adar nennt; aber die Worte „*the month*" bei Friedl. 160 stehen nicht im Texte, und das Ganze klingt sehr hart. Friedl. (158) verdächtigt allerdings auch die 3 Verse des Datums. Der 6. Tag kann nicht Freitag bedeuten, da Purim im Jahre 4927 nicht auf diesen Tag fiel; Grätz VI, 449 denkt an Chanukka, welches Halbfest allerdings 8 Tage dauert, der 1. war ebenfalls nicht Freitag;

in Rom[12]). Dafs ibn Esra in dieser Stadt gestorben und begraben sei, besagt weder die oben besprochene Notiz von der Todeszeit ausdrücklich, noch indirect durch ihren Platz hinter dem Abfassungsdatum. Aber auch anderweitige, nach Jahrhunderten auftauchende Nachrichten über das Grab des weithin berühmt gewordenen Mannes verdienen nicht mehr Glauben, als Gräberlegenden überhaupt[13]). Ist das Todesdatum 1167 wegen der

---

der Monat Adar fehlt aber in der HS. Cambridge in der darauffolgenden Notiz über den Tod, welcher dort in das J. 928 (1168) verlegt wird, wie bei älteren Autoren (vgl. Grätz, S. 450). Aber auch zur Grammatik *Safa Berura* giebt Cod. De Rossi 314 „*feria sexta A. 4927*" ohne Monat; die Punkte bei Grätz S. 449 gehören letzterem, der wohl die Lücke bemerkte, aber nicht verwerthete; offenbar liegt ein Doppelgänger vor. Die von Dr. Berliner mir mitgetheilten Textworte des Cod. 314 bestätigen diese Vermuthung. Es frägt sich also, welchem Buche der Prioritätsanspruch gehöre. Dazu kommt eine anderweitige Schwierigkeit, die auch Friedländer entging. Die Worte: שנת תפקוד אסורים sind durch Punkte bezeichnet in einem Supercommentar (Letterbode, Amst. 1876/7 II, 87, zu Friedländer S. 245 s. Hebr. Bibliogr. XVII, 119), dessen Verfasser Elieser oder Elasar ben Mattatja, in Aegypten, wahrscheinlich mathematische Kenntnisse besass (s. Berliner, Magazin IV, 147). Die Ziffernsumme des angeblichen Chronostichons ist aber nur 907 = **1147**! — Das angeblich „mystisch-philosophische Büchlein" סודות התורה bei Grätz 450 (nach Bartolocci [I, 38], Wolf I, 75, III, 47, De Rossi, Wörterb. S. 6 n. 3) ist wiederum nur der Pentateuchcommentar oder ein Supercommentar über die Geheimnisse, d. h. über die Stellen, in welchen ibn Esra auf ein Geheimniss (meist Astrologie) hinweist, wie sich ergibt, wenn man die angeführten HSS. weiter verfolgt; so z. B. Biscioni S. 311, Plut. II. Cod. 42[13] ist Joseph Caspi.

12) Die Gründe, welche Grätz für seine, gegen alle Handschr. und Zeugnisse vorgehende vermeintliche Emendation (Rhodez) anführt, sind nicht stichhaltig. So z. B. gibt er an, der Jünger Salomo habe die vier älteren Grammatiken „nicht auftreiben können", ohne hinzuzufügen, dass die Besitzer sie nicht hergeben wollten, was am besten für Rom passt, welche Stadt ibn Esra den anderen Städten gegenüber einfach nennen konnte. Ein Wortspiel mit Zahlbuchstaben, zwischen dem 260. Cyclus und der Stadt, ist schwerlich beabsichtigt; das entstand erst durch die Corruptel (oder durch die in einem überflüssigen Bedürfniss nach Alliteration vorgenommene vermeintliche Emendation) 240; am allerwenigsten befriedigt Rhodez (רודם, ר"ס), was Grätz nicht nur vorschlägt, sondern (S. 452) für beide Schriften mit dem J. 1166 (obwohl der Monat ganz unsicher ist) festhält.

13) Man fand seine Grabstätte in Kabul in Palästina, neben Jehuda ha-Levi und Salomo b. Gabirol (s. Carmoly, *Itineraires de la terre sainte*, Bruxelles 1847, p. 453 n. 165 und p. 483). Abraham Sacut (schrieb in Tunis um 1502, vielleicht später im Orient, s. Hebr. Bibliogr. XIX, 100) weiss (217 ed. London, aber nicht 130 b ed. Cracau, was Kaufmann [unten A. 16] S. 48 nicht beachtet) von dem gemeinschaftlichen Grabe der Töchtersöhne ibn Esra und Jehuda ha-Levi; bald darauf (131 Crac., 218 Lond.) lässt er ihn in קלאהורא (Calahorra in Spanien, nach Zunz, Zeitschr. f. d. Wiss. d. Jud. 150) gestorben sein, und diese

Uebereinstimmung mit dem Kalender festzuhalten (wie schon Sacut bemerkt), das Alter von 75 wegen der Anspielung weniger sicher, so ist er jedenfalls zwischen 1093—6 geboren, und zwar zu Toledo, wie schon ältere Quellen angeben[14]); höchst wahrscheinlich bestätigt dies ein Zeitgenosse und Verwandter, wie sich zeigen wird.

§ 4.

Der berühmte Dichter Moses ibn Esra aus Granada, der um 1138 bereits ein Greis war, verfasste in späten Lebensjahren ein arabisches

---

Angabe hält Grätz (S. 451, Friedländer, *Comm.* I, p. XXVI) für „sicher"; sie passt zu seiner Verwandlung von Rom in Rhodez; Sacut fügt auch hier hinzu, dass er von dem Begräbniss in Palästina gehört; so haben Augenzeugen (ed. London, wo vielleicht מי שראה בעיניו zu lesen) berichtet dem Salomo ben Simon — offenbar Sal. Duran in Algier (gest. 1467, s. Catal. Bodl. S. 304). — Wolf, Bibl. Hebr. I. p. 71 setzt zu *Kalahora* (so): *„quam Rhodum alii vocant"*, ohne Parenthese, als ob das bei Abr. Sacut vorkomme! Assemani, zu Cod. 78, theilt zwei Epitaphe mit, welche das Grab Abrahams auf Rhodus enthalten soll; De Rossi (S. 5) bemerkt, dass darin weder Namen noch Jahr vorkomme. Das erste: הידעי [ה]דמעות ist in der That für den Grabstein eines Abraham gedichtet von Jehuda ha-Levi, nach dem Appendix des Divans (Cod. Pocock 74 f. 5) und daraus mitgetheilt von E. Carmoly, Litbl. d. Orient 1850, S. 476, von Edelmann und Dukes in Treasures of Oxford (Oxford 1850, S. 27), neuerdings von Carmoly *(Chikeke Eben*, S. 24, hinter *ha-Orebim*, Rödelheim „1861", aber später beendet), welcher verschweigt, dass Assemani die Epitaphe auf ibn Esra beziehe — der jedenfalls den Dichter überlebte. Geiger, Blüthen (1853) S. 42, conjicirt einen von Jehuda ha-Levi gefeierten Abraham; doch ist hier nicht der Ort, dergleichen weiter zu verfolgen. — Das zweite Epitaph, anfangend ארם ולא אדם ist wahrscheinlich auf Maimonides (רמב"ם wurde vielleicht zu רא"בע) verfasst; es ist als solches, aber incorrect, gedruckt bei El. Aschkenasi, *Dibre Cachamim*, Metz 1849, S. 86, und bei Carmoly, *Chikeke*, S. 24; correcter in HS. München 224 f. 137^b (im Catalog S. 87 nicht besonders erwähnt), wie bei S. Sachs (Vorwort zu *Maase Nissim* her. v. Goldberg, Paris 1867, S. XVII), welcher, nach der Randnote einer HS., Bedarschi (um 1300) als Verf. annimmt (?). — Von Rhodus kann überhaupt nicht mehr die Rede sein, nachdem man dahinter gekommen, dass רודוס nicht Rhodus, sondern Rhodez in Frankreich (Languedoc) bedeute (s. das Citat bei Grätz S. 445; in Bezug auf die Quelle, Cod. Paris 188^1, vgl. Hebr. Bibliogr. XVII, 119; hingegen scheint „רדום in der Nähe von England" bei Elasar b. Mattatja (Magazin etc. IV, 149, Letterbode II, 87) Rouen (s. Histor. Jahresberichte für 1878, Berlin 1879, I, 46). — Mose ben Chisdai aus Tachau (s. unten § 9) will von Leuten aus England (s. Hebr. Bibliogr. III, 62) gehört haben, dass Abraham dort, durch böse Geister in Gestalt von schwarzen Hunden erschreckt, in eine Krankheit verfiel, an der er starb.

14) Die Angabe „aus Granada", bei Sacut ed. London S. 218, steht ganz isolirt und ist verdächtig, wie Manches in jener Ausgabe. Sie beruht offenbar auf Verwechslung mit Moses ibn Esra, s. § 5.

Werkchen über hebräische Poesie, welches die kostbarsten Nachrichten über jüdische Schriftsteller in Spanien darbietet, auch anderen Autoren als Quelle gedient zu haben scheint.[15]) Daselbst (Bl. 42b) heisst es: „Abu'l-'Hasan ben el-Levi, der Taucher nach den Perlen . . . und Abu Is'hak ben [el-Mudschid, am Rande] Esra von den Theologen, den eleganten und beredeten, beide Toledaner dann Cordovaner." Ich habe bereits im Bodl. Catalog (S. 1801) bemerkt, dass ersterer offenbar der — namentlich durch Heine allgemein bekannte — Dichter abu'l-Hasan Jehuda ha-Levi (geb. um 1080)[16]), der andere unser Abraham sei, der also nach Cordova gewandert war. Als Cordovaner bezeichnet er sich in der Uebersetzung der grammatischen Schriften des Jehuda 'Hajjudsch[17]), welche wohl zu seinen ersten literarischen Producten in Rom (also um 1140) gehört, wenn auch darin die Uebersetzung des Mose Gikatilia (Chiquitilla) angeführt wird[18]).

Dass Abraham und Jehuda eine Zeit lang in persönlichem Verkehr lebten, ist nicht zu bezweifeln, da ersterer Erklärungen des letzteren anführt[19]) und ein Gedichtchen verfasst zu haben scheint, worin der verstorbene Jehuda ihn auffordert, an der himmlischen Seligkeit theilzunehmen, er aber antwortet: „Mein Bruder Jehuda! geh wieder zur Ruh! Gott will nicht, dass ich mit dir gehe, bis ich Kinder erzeuge" u. s. w.[20]). Der Ausdruck „Bruder" bedeutet hier weder den leiblichen, noch den Vetter[21]); die leibliche Verwandschaft, mit welcher die Legende Jehuda und Abraham entweder schon

15) Ich besitze eine genaue Durchzeichnung der bis kürzlich einzigen Bodleian. HS.; ein defectes Exemplar erwarb neulich die Petersburger Bibliothek. — Ueber ein corruptes hebräisches Excerpt (bei Sacut, ed. London S. 229[2], vgl. S. 203, bei Grätz VI, 392 mit falschen Conjecturen), dessen unvollständigen Schluss die eben zu besprechende Stelle bildet, s. Hebr. Bibliogr. XIII, 107.

16) Vgl. auch Dav. Kaufmann, Jehuda Halevi, Versuch einer Charakteristik, Breslau 1877, S. 41.

17) Herausg. von L. Dukes, Stuttg. 1844.

18) Herausg. von John W. Nutt, London 1870.

19) Zu den Stellen bei Geiger (Divan des ... Abu'l-Hassan Juda ha-Levi, Breslau 1851, S. 150) kommt noch Exod. 13, 14 nach HS. Benzian. Ueber Benutzung des Buches *Kusari* von Jehuda ha-Levi (verf. um **1140**) s. Kaufmann Gesch. d. Attributenlehre etc. Gotha 1877, S. 517.

20) In der Bodl. HS. hinter dem Divan f. 76[b] und im Nachtrag f. 4; gegen die Auffassung Edelmann's (Ginse Oxford, S. 20 u. XVIII) s. Geiger, Divan l. c., welchem Friedländer (*Comm.* p. XX) folgt, ohne ihn zu nennen. In einer Wiener HS. (Catalog S. 126 und Litbl. des Orient 1846, S. 565) wird der oben (A. 3) erwähnte al-Charisi als Verf. angegeben.

21) Im Neuhebräischen wird „Bruder" mitunter für Vetter gebraucht, insbesondere „zweiter Bruder". — Als Geschwisterkinder fanden wir die beiden Männer bei Sacut, oben Anm. 13. Vgl. auch die unter § 6. A. 32 citirte Stelle aus Parchon.

bei der Geburt, oder durch Heirat mit der Tochter Jehuda's, bis zur Grabstätte verbindet, hat um so weniger historischen Boden, als die Charaktere, Anschauungen, und selbst die Wege ihrer Wanderungen sie frühzeitig von einander, fast nach entgegengesetzten Richtungen, für immer trennten[22]).

22) Der höchst unzuverlässige Gedalja ibn Ja'hja (Traditionskette f. 41 ed. Ven. 1587, f. 31 ed. Amst.) will allerlei Geschichten von ibn Esra gehört und der Kürze wegen übergangen haben; aber die Legende von der Heirat konnte er doch nicht unterdrücken. Gedalja scheint dafür die älteste bisher bekannte Quelle, wahrscheinlich auch für die Erzählungen von ibn Esra und Maimonides in der jungen, aus Kairo stammenden HS. Paris 583. Jüdisch-deutsch bearbeitete die Erzählung Simon (Akiba Baer) b. Josef in seinem *Maase Adonai* (1691 etc.), und daraus floss sie in die Ausgaben des sogenannten „*Maase-Buch*" seit 1703 (s. meine Erörterung und Nachweisung in der Zeitschrift *Serapeum*, herausgegeben von Naumann, Leipzig 1866, S. 5, vgl. 1869 S. 138). Deutsch erzählt sie (ohne Quallenangabe) A. Geiger, Jüdische Dichtungen, Leipzig 1856, S. 29; englisch (ebenso) M. Friedländer, *Commentary* etc. p. XII. — In deutschen Versen erzählt und erweitert dieselbe Abr. M. Tendlau, Das Buch der Sagen und Legenden jüdischer Vorzeit, Frankfurt 1842, 1845, 3. verm. Aufl. 1873, S. 150 n. 32 (vgl. S. 367); zuletzt (S. 157) erkennt Jehuda den „Vetter" (wovon nichts bei Gedalja) in dem genialen Ergänzer seines Hymnus, und an diesen scheint die Legende zu knüpfen, wie sonst z. B. bei Salomo b. Gabirol, der nach Indien geschickt wird, Meir ben Isak, der zu den „rothen Juden" kömmt. In neuester Zeit ist die „Geschichte des Jehuda ha-Levi" sogar arabisch bearbeitet in der Sammlung von Erzählungen: *Maase Scha'aschuim*, Livorno 1868 f. 64, wo die Tochter Jehuda's דילא (Dilla?? woher?) heisst (über diese angebliche Dichterin, welcher Carmoly noch den Namen Esther angedichtet hat, — vielleicht weil bei Gedalja der ergänzte Vers diesen Namen der Königin Esther enthält? — s. Hebr. Bibliogr. 1879 S. 11). Die am Schlusse der arabischen Erzählung f. 65 befindliche Nachricht über die vom Arzte Chijja redigirte Sammlung, in Tunis noch vorhanden im Jahre 1805 (vgl. Catal. Bodl. 1341), hat mit der vorangehenden Legende nichts zu schaffen. — Die vermeintliche Anspielung Abraham's auf seine Frau bei Friedländer (*Comment.* p. XVI) hat Schiller-Szinessi (*Catal. of the Hebrew manuscr. . . . Cambridge*, P. I. 1876 p. 120) mit Recht auf die Armuth bezogen; s. Magazin etc. III, 141. Einen Versuch Reichersohn's, die Verwandschaft durch ein Gedicht zu begründen, weist Kaufmann S. 13 zurück, der auch die Vetterschaft durch Missverständniss eines Gedichtes für erklärlich hält. — Ich besitze ein Druckschriftchen, betitelt שבחי פון אבן עזרא, „Rühmliches von Ibn Esra" in jüdisch-deutschem Jargon gedr. in Lemberg ohne Jahrzahl (XIX. Jahrh.) in Oct. 8 Bl. Die darin erzählten Wunderthaten und Erlebnisse, welche zum Theil an Sindbad's Reisen u. dgl. erinnern, sollen nach dem Titel die Wunderwirkungen des Gebets beweisen; „es ist ganz gewiss war, was drinnen steht" — eine ältere Quelle dieser Volksschrift ist mir nicht bekannt. — Ueber eine angebliche Himmelfahrt eines Enkels ibn Esra's s. Hebr. Bibliogr. IV, 23, IX, 115.

§ 5.

Wann und in welcher Richtung sich Abraham aus Cordova entfernte, kann wiederum nicht mit Bestimmtheit, kaum nach combinatorischen Erörterungen entschieden werden. Dass er „wegen der Wuth des Bedrückers" sein Vaterland verlassen, sagt er selbst unter Anwendung einer Bibelphrase [23]), doch darf seine Auswanderung nicht mit den durch die fanatischen Almohaden hereinbrechenden Calamitäten combinirt werden [24]). Letztere eroberten Marocco 1146, Cordova 1148; wir wissen aber, dass Abraham bereits 1140 in Rom den Commentar zu Kohelet verfasste [25]), vielleicht schon 1136 in Beziers, wenn er Verfasser der Nativität, die ich im Art. Abr. Jud. (S. 41) besprochen habe. Er hatte zu dieser Zeit jedenfalls das 40. Lebensjahr lange überschritten, und wenige Jahre darauf (1143) finden wir bereits in Bagdad seinen Sohn Isak [26]), der später zum Islam überging, wie uns der Dichter Charisi berichtet [27]). Andererseits wissen wir, dass Abraham um 1139, oder kurz vorher, einige mathematische Fragen des David b. Josef aus Narbonne beantwortete (s. unten § 7), woraus man schliessen möchte, dass er zunächst nach Nordspanien oder der Provence wanderte [28]). Im Zusammenhange damit steht die Feststellung der Orte,

23) Jesaias 51, 13; Friedländer, *Essays* 183; vgl. Grätz S. 440.

24) A. Geiger, Moses ben Maimon. Studien, 1. Heft, Breslau (1850) S. 7, dem ich in „Polemische und apologetische Literatur etc." Leipz. 1877, S. 352 folgte, ohne näher zu untersuchen.

25) Grätz S. 440, 449; Friedländer S. 187 vermuthet eine Umstellung im Epigraph, welche bei einer wörtlichen Uebersetzung unnöthig ist. Ibn Esra spielt wahrscheinlich auf die am Ende des Jahrtausends zu erwartende Erlösung an.

26) Isak verfasste ein Lobgedicht auf den bekannten jüdischen Arzt abu'l-Berekat Hibet Allah, den Verfasser eines arabischen Commentars zu Kohelet, der später zum Islam übertrat und vielleicht auch Isak dazu verleitete. Das richtige Verhältniss und die Identität Isak's habe ich zuerst in der Hebr. Bibliogr. I (1858) S. 91 festgestellt, vgl. II, 109 und die nachfolgende Anm. 27. Dass Isak den Vater auf Reisen begleitete (Grätz), ist möglich, aber unerwiesen; die Trennung in Damask (Friedländer *Comment.* p. XIV) hat gar keinen Boden, da der Vater schwerlich bis dahin gekommen ist, s. weiter unten S. 69.

27) Ueber die richtige Lesart s. Hebr. Bibliogr. XII, 20; S. 19 lies: bei Benedetti S. 193 (für 139). Eine weitere Combination mit einem ابن عزرا s. Zeitschrift d. D. Morg. Gesellschaft Bd. XX, S. 427—30.

28) Dass David sich eine Zeitlang in Spanien aufgehalten, kann ich aus dem Briefe bei Geiger, Divan S. 129, nicht ersehen. Ein zweifelhaftes Zeugniss, dass Abraham 1138 noch in Spanien war, s. Hebr. Bibliogr. XIII, 27 über einen Hymnus (vgl. HS. Carmoly 83?); vgl. XIV, 90 und unten § 7 A. 36. Ueber ein Gedicht Jehuda ha-Levi's an denselben David s. Hebr. Bibliogr. III, 32 A. 2. — In Narbonne nahm man schon 1143 auf ibn Esra's Theorie der Horoscope (vgl. unten § 18 A. 230) Rücksicht; s. HS. des Rabbiners Wallerstein in Rzeszow, beschrieben

welche Abraham überhaupt auf seinen Reisen berührte, wie weit sich letztere ausdehnten.

§ 6.

Eine gelegentliche und vereinzelte Notiz aus dem Ende des XIII. Jahrh. berichtet im Namen Abraham's, dass er in seiner Gefangenschaft in Indien ungesäuertes Brod zur Nahrung erhalten habe. Für die Würdigung der Mittheilungen Abraham's, welche Indien und indische Gelehrte betreffen, unterzog ich die Frage: „Ist ibn Esra in Indien gewesen?“[29]) einer genaueren Prüfung und gewann ein verneinendes Resultat; auch bis Palästina ist er schwerlich gekommen[30]). Hingegen war er jedenfalls in Aegypten[31]), vielleicht auch in einem angrenzenden Theile Africa's[32]). Von anderen Gegenden und Orten[33]) sind sicher: Rom (1140, wahrscheinlich auch 1167),

---

in Benzian's Catalog 1869 S. 2 n. 5 f, wo die Tabellen für Cyclus 257 (1105—23) vielleicht die des Abr. bar Chijja sind. *

29) Zeitschr. d. D. Morgenl. Gesellsch. XX, 427—30.

30) Das angebliche Gespräch mit 15 alten (!) Masoreten in Tiberias, bei Grätz (und daher Friedländer, *Comm.* I, p. XIX), habe ich auf Einschiebung des Wörtchens „ihm“ bei Carmoly zurückgeführt (Z. D. M. G. XX, 427); ich finde nachträglich diese so wesentliche Einschaltung schon bei Gedalja ibn Ja'hja f. 41. — Irrige Angaben über Palästina und Längenentfernungen sind schon im XIV. Jahrhundert gerügt worden (von Josef b. Elieser, vgl. Zunz, Geogr. Lit. n. 36, Grätz S. 444, daher Friedländer, l. c.). Beachtenswerth sind folgende Angaben: im Brief des Sabbat (Pforte II, Kerem Chemed IV, 168) wird die Entfernung von Jerusalem und Bagdad auf zwei Drittel (mit Worten) Stunde (also 10° Länge) angegeben. Nach dem Buche *Ibbur* (f. 8b) sind zwischen Verona und Jerusalem mehr als 2 Stunden (30°), zwischen Bagdad und Jerusalem mehr als 1½ Stunde, also gerade das Doppelte der obigen Angabe! Vgl. Friedländer, *Ess.* 152 A. 3.

31) Dort fand er die Kritik des Dunasch (ben Labrat oder Librat ha-Levi), die er in dem Buche *Sefat jeter* (Frankfurt am Main, 1843) widerlegte; letzteres verfasste er in Lucca, nach Halberstamm S. 12 im Jahre 1245.

32) Der, Ende des J. 1160 in Salerno schreibende Salomo Parchon (f. 4 Col. 3 ed. Pressburg 1844) bemerkt, dass der verstorbene Jehuda ha-Levi und ibn Esra „den Gott erhalte“ (lies ש״ץ) nach „Afrika“ (אפריקי) kamen u. s. w., nachdem eben von Palästina, Aegypten, Westen (Magreb) die Rede gewesen. Parchon war aber nicht ein „Jünger“ derselben (Grätz S. 452); sie werden in der Vorrede (S. XXII) nicht als persönliche Lehrer bezeichnet, wie Rapoport richtig annimmt (wonach Kaufmann, Jehuda ha-Levi S. 36 und 32 zu berichtigen ist). Dass ibn Esra überhaupt in Salerno gewesen und dort ein Spottgedicht verfasst habe, ist eine in der Luft schwebende Hypothese Grätz's, s. meine Bemerkung in Virchow's Archiv für pathol. Anatomie u. s. w. Bd. 38 S. 74 und dazu Gross in Berliner's Magazin II, 34. — Einen „Gelehrten aus Afrika“ citirt Abraham in dem von Zedner herausgegebenen Commentar zu Esther, S. 15, 22.

33) Vgl. den Artikel von Zunz in seiner Abhandlung: Geograph. Literatur der Juden; Gesammelte Schriften, I, Berlin 1875, S. 162 n. 36 (zuerst in engl.

Lucca 1145[34]), Mantua 1145, Verona 1146/7, Beziers 1155/6, Rodez 1156/7[35]), London 1158/9, Narbonne 1160; zweifelhaft Beziers 1136.

Wann war er in Aegypten? Grätz (S. 452) meint, es habe sich Niemand die Frage klar gemacht, wann er in „Africa, Aegypten, Palästina und noch anderen Ländern [d. h. des Orients] war", und gibt als etwas ganz Neues aus, dass „seine weiten Reisen" vor 1140 fallen, indem er ausserdem die Frage des David Narboni, welche sich auf das Jahr 1139 bezieht, so emendirt, dass sie „lange vorher" geschehen sein könne! Wir dürfen jedoch kaum über 1138 hinaufgehen[36]); es bleiben uns dann zwei Jahre. Schon im Jahre 1851 lässt Geiger[37]) unseren Abraham von Spanien nach Nordafrica und von dort nach Asien oder Aegypten entkommen[38]). Diese Annahme hat etwas von vorneherein Bestechendes, bedarf aber darum noch weiterer Bestätigung. Man ist stets von den weiten Reisen ausgegangen, welche eine längere Zeit erfordern; handelt es sich aber nur um den Osten

---

Uebersetzung im II. Bd. von Benjamin of Tudela 1840 p. 250, bei Friedländer, *Comm.* I. S. XVII) und Grätz S. 452 (mit Hypothesen, die ich weglasse, wie z. B. Salerno, s. die vorangehende Anm.), Halberstamm l. c. S. 14.

34) Gegen Grätz's willkürliche Aenderung 1155 s. Halberstamm l. c. S. 12, welchem stillschweigend Friedländer, *Essays,* p. 164, folgt; s. jedoch N. Brüll, Jahrbücher für jüdische Geschichte III. Jahrg. Frankfurt a. M. 1877, S. 164.

35) Nicht Rhodus, s. oben S. 65 A. 13. Hier müsste der Weg durch Nordfrankreich eingeschaltet werden, auf welchem Abraham mit Jakob Tam aus Rameru zusammengekommen wäre (Halberstamm S. 15); über die nicht ganz gesicherten Wechselverse, bei Friedländer, *Comment.* I, p. XXVI, s. verschiedene Nachweisungen in meinem Katalog der hebr. Handschr. in Hamburg (1878) S. 6 n. 32, Verzeichniss der hebr. Handschr. der k. Bibliothek in Berlin S. 126 n. 119. — Abzuweisen ist die Stadt „Mora" (מורה), über welche Abraham, mit Anspielung auf „Amora" (Gomorrha), ein Epigramm verfasst haben soll, welches aus ungeordneten Notizen einer Bodleianischen HS. mit der hier nöthigen Reservation mitgetheilt wurde von Dukes im Litbl. des Orient, her. von Fürst, 1850, S. 686 (vgl. S. 343), anfangend הקנקן ריקן. Die gehäuften, theilweise gesuchten Alliterationen sind nicht im Geschmack Abrahams's, und man muss sich wundern, dass A. Geiger jenes Epigramm ohne Weiteres unter den Namen des ibn Esra dem grösseren Publikum in deutscher Uebersetzung zugeführt hat („Blüthen" im deutsch-israel. Volkskalender, Johannisberg 1853, S. 27, und Jüd. Dichtungen 1856, S. 37).

36) Ein sehr zweifelhaftes Zeugniss, dass Abraham im Jahre 1138 noch in Spanien war, s. oben § 6, A. 29.

37) Moses b. Maimon, S. 7.

38) Geiger, Judenthum u. s. w. II. (1865) S. 131: „Wie es scheint, ist er über Nordafrica und Egypten nach den christlichen Landen, zunächst nach Italien gegangen, wo wir ihn in Rom, Lucca, Mantua sehen, dann nach der Provence, . . . dann nach Nordfrankreich . . . Von dort geht er nach England . . . Dann tritt er die Rückreise wohl in derselben Weise (?!) an, bis er in Rom im 75. Jahre die irdische Lebensbahn verlässt."

Africa's, welchen Abraham durch ein Schiff erreichen konnte[39]), so haben wir bis 1155 Lücken genug, in welche die Reise fallen konnte, insbesondere zwischen 1140 und 1145[40]).

§ 7.

Neben Raum und Zeit, ja im Zusammenhang mit denselben, tritt uns die Frage nach der Sprache entgegen: Hat ibn Esra arabisch geschrieben? Alle bekannten unverdächtigen Schriften sind hebräisch verfasst, alle Nachrichten von arabischen erweisen sich nicht als stichhaltig. Sie sollen hier zuerst kurz besprochen werden.

1. Ein „Buch von den Wesen" (העצמים *ha-Azamim*) hat sich in einer unedirten hebräischen Uebersetzung erhalten, deren Handschriften den Uebersetzer nicht nennen, nämlich in Parma, Cod. De Rossi 1055³, ausführlich beschrieben von P. Perreau (*Bollettino Italiano degli studii orientali,* 1877, S. 229—232), in Florenz (Plut. II, Cod. 25, 2, S. 25 bei Biscioni ed. in Oct. — unvollständig), Bodleiana (Michael 316)[41]), jüd. Gemeindebibliothek in Mantua (ein Expl. beschrieben von M. Mortara in Hebr. Bibliogr. II, 93 — vgl. XV, 16, XVI, 109 — wurde vom Wasser ruinirt, ein zweites s. in Mortara's *Catalogo dei manoscritti ebraici della biblioteca della comunità israel. di Mantova*, Livorno 1878, S. 61 n. 78 f), HS. Ghirondi-Schönblum 81 (S. 28 meines Catalogs 1872, wo jetzt, ist mir unbekannt), Luzzatto 114, jetzt der k. Bibliothek in Berlin 244 in Oct. (S. 56 meines Verzeichnisses).[42]) Das kleine philosophisch-theologische Schriftchen handelt 1) von Gott, 2) von den Emanationen der intellectualen Kräfte

39) Friedländer, *Comm.* I, S. XXI, erzählt als Schiffsanekdote das „Stratagem", worüber unten § 20.

40) Grätz, S. 441, schaltet hier als Ort zwischen Rom und Mantua (!) Salerno ein (Friedländer, Comm. I, p. XXII, A. 41 versprach eine Erörterung darüber im III. Bde., wo er sich jedoch auf die Commentare beschränkte); s. dagegen oben S. 69 A. 32. — 1145 erscheint als Grenze durch die Widerlegung des Dunasch (oben S. 69 A. 31). Derselbe ist zwar schon in der ersten Grammatik (*Mosnajim* in Rom um 1140?) erwähnt, jedoch, wie es scheint, nicht das in Africa gefundene Werk; ausserdem wird Dunasch nur noch citirt in der Grammatik *Zachot* (1145) f. 146ᵇ ed. Ven. (dieses Citat fehlt bei Dukes, Literaturhist. Mittheil. über die ältesten hebr. Exegeten u. s. w., Stuttg. 1844, S. 153) und f. 160, Comm. zu Psalm 9, Vers 1, 7, 10 und Psalm 42, Vers 5.

41) Daraus stammt wohl die Copie Edelmann's (*Chemda Genusa*, Königsberg 1856, Bl. 43).

42) Die in H. B. II, 93 angeführte HS. Paris hat irrthümlich den Titel *ha-Azamim;* der Catalog S. 23 n. 189⁴ verbessert mit Recht *ha-Teamim*, da es eine der astrologischen Abhandlungen ist (s. § 21), was Geiger (jüd. Zeitschr. IV, 187) übersehen hat, wie ihm auch alle älteren Nachweisungen wirklich vorhandener HSS. entgangen sind!

auf die seelischen, 3) von den Sabiern, Nabatäern und Chaldäern, 4) von der Seele (beginnend mit einer Verweisung auf einen Abschnitt über die Elemente), 5) von Thieren, 6) von den Sphären; 4 und 5 werden in einigen HSS. zusammengezählt, so dass nur 5 Abschnitte herauskommen; fehlt ein 3. über Elemente? Samuel Zarza berichtet, dass dieses Schriftchen für ihn (um 1367) aus dem Arabischen von Jakob ibn Alfandari übersetzt worden; sein Zeitgenosse Samuel Motot übersetzt kurz aus dem arabischen Original[43]. Auch ein dritter Supercommentator derselben Zeit in Berbiesca (Briviesca), Schemtob ibn Major, citirt das Buch Azamim als echt. Aber ein vierter, um wenige Jahre jüngerer, Schemtob Schaprut, bezeichnet es schon vorsichtig als „dem ibn Esra beigelegt". Letzterer ist sicherlich nicht Verfasser des Schriftchens, das erst um 1360 auftaucht, im Original wieder verschwindet, vielleicht in der Literatur der Muslimen zu suchen ist.

2. נסיונות *(Nisjonot,* Erfahrungen — entsprechend dem arabischen häufig vorkommenden *Mudscharrabât),* Zusammenstellung von leicht zu bereitenden Heilmitteln, theils sympathetisch und superstitiös, in 10 Tractaten oder Abschnitten, welche in Kapitel zerfallen; HS. Michael 205 der Bodleiana, Paris 1134 und 1170. Nach Carmoly[44]) scheint diese Schrift aus dem Arabischen übersetzt. Ich habe die Michael'sche HS., in welcher der X. Abschnitt fehlt, vor ungefähr 25 Jahren oberflächlich angesehen. Der I. Abschnitt handelt im Allgemeinen von den specifischen Mitteln oder Kräften, der X. von Fiebern. Es sind fast nur Excerpte aus der griechisch-arabischen Medicin; citirt werden Aristoteles (Physik und Thiergeschichte), Dioscorides, Galen, vielleicht Alexander (el-Iskenderi? VII, 2 ff.), der weise Salomo (VI, 10), auch das „Siegel Salomo's" (VII, 11)[45]), von Arabern ibn Maseweih, at-Thaberi[46]), al-Razi (Rhazes), manchmal heisst es: „Ich der

---

43) Supercomm. zu Mischpatim, (Exod. 23, 21) f. 24[c] ed. 1553: „Dies ist der wesentliche Inhalt seiner Worte in arabischer Sprache." Das Citat bildet einen Theil der Erklärung von Exod. 23, 21, welche man als besonderes Stück findet in Cod. München 285[5] und Paris 825[6], wo der Catalog S. 140: „Geheimniss des Gottesnamens und der Engel nach Abr. ibn Esra" angiebt! Eine Abschrift dieses Stückes besitzt Rabbiner Dr. Gross. Andere Stellen bei Motot zu Beschallach 21[b], Jitro 22[c]. Ueber die abweichende Recension Motot's s. Hebr. Bibliogr. XV, 16.

44) *Histoire des médecins juifs*, p. 46.

45) Ich weiss nicht, ob die Pflanze gemeint ist; vgl. meine Mittheilung bei S. Günther, Ziele und Resultate der neuern mathem.-hist. Forsch., Erlangen 1876, S. 118.

46) Wahrscheinlich der von Razi angeführte, nicht ibn Haitham, s. Zeitschr. D. Morg. Gesellsch. IX, 842, mein: Toxolog. Schriften der Araber, in Virchow's Archiv f. pathol. Anat., Bd. 52, S. 476 und Hebr. Bibliogr. XIV, 40.

Schreiber", oder der Experimentator (המנסה), und wird die bekannte Formel „erprobt und bewährt" (בחון ומנוסה) angewendet. III, 3 handelt von den „Namen" (d. h. Anwendung von magischen Wörtern und Zeichen), VI, 9 von sympathetischer Anwendung des „das Eisen anziehenden Steines, genannt *Calamita*" קלמיטה).[47]) Von einer solchen Schrift Abraham's weiss, so viel mir bekannt, das Mittelalter nichts, welches gerade nach derartiger Literatur besonderes Verlangen trug; erst aus dem Ende des 17. Jahrh. ist mir ein directes Citat bekannt[48]). Auch wird Abraham nirgends als Mediciner gerühmt.

3. מדות *(Middot)*, ein arabisches Werk über Ethik, HS. in der ehemaligen Sorbonne n. 9, erwähnt Wolf (Bibl. hebr. III p. 1138 n. 332), der jedoch vermuthet, ibn Esra sei darin nur angeführt und das Werk identisch mit dem eines viel später lebenden Anonymus. Die HS. scheint jetzt Sorbonne 54, aber der neue Pariser Catalog unter 830 meldet nichts von diesem und einigen andern bei Wolf genannten Bestandtheilen dieser HS[49]).

4. Ein arabisches Buch der Nativitäten *(Mawalîd)* im Escural Cod. 935, geschrieben 1395, nach Casiri's Catalog p. 376, von *ben Azari* (? die Vocalisation des arab. Textes ist unsicher) *al-Kha'sibi*, dem jüd. Astronomen (oder Astrologen) aus Toledo. Der Schreiber, der die spanische und christliche Aera angibt, war ohne Zweifel Christ oder getaufter Jude und will unseren ibn Esra als Verfasser bezeichnen, wenn die lateinischen Worte

47) Vgl. Abr. Judäus S. 3, Anm. 1 und meine Abhandl. *Intorno ad alcuni passi . . . relativi alla calamita*, Roma 1871 (aus Boncompagni's *Bullettino* abgedr.), S. 25 die Stelle aus dem kurzen Comm. zu Exod. 7, 11, woraus vielleicht im grösseren (interpolirten) zu Exod. 28, 9; über תולדת s. weiter unten Anm. 94, wonach dort *nella generazione* zu lesen wäre.

48) In einer anonymen (von ?יר"ם) zu Busseti in Italien gegen Ende 1688 verfassten Abhandlung über das Gedächtniss (HS. Reggio 24 in der Bodl. 4 f. 9b) werden „*Segullot*" aus ibn Esra's Buch Nisjonot Tr. III, 2, 5 citirt. — Um 1600 bemerkt Abraham Jagel aus Monselice (HS. Reggio 10 Kap. 47) bei Gelegenheit des Cerastes (Plin. IV, 23), er habe gehört, dass ibn Esra ein Schlangenhorn im Griff seines Messers zum Schutz gegen Vergiftung angebracht, da es von nahendem Gifte schwitze. Aus einem dem Abraham beigelegten Buche „Anordnungen der Speisen" (תיקוני מאכלים) citirt Elasar ben Mattatja; vgl. Verzeichniss der hebr. HSS. in Berlin, S. 48². — In Benjacob's grossem bibliogr. Werke, welches nächstens in Wilna erscheint (S. 399) fehlt unsere Schrift. Von der Medicin spricht Abraham zu Exod. 23, 26, s. unten § 12 n. 3.

49) Vgl. Hebr. Bibliogr. 1869, S. 22, A. 5. — Eine dem ibn Esra beigelegte hebräische Schrift מדות oder בית מדות scheint aus verschiedenen Confusionen entstanden, namentlich mit der so betitelten ersten Ausgabe der Sittenschrift des Römers Jechiel b. Jekutiel (1287) — s. Catalog Bodl. S. 1279 u. Add., Hebr. Bibliogr. XIX, 5 — und einer anonymen aus dem XV. Jahrh., s. Reifmann in der Zeitschrift *ha-Karmel* 1862, II, 278, Hebr. Bibliogr. XV, 1.

„genere Judaeus“ nicht Casiri's Zusatz sind. Zu jener Zeit waren ibn Esra's astrologische Schriften längst bekannt (§ 21); es wäre also nicht unmöglich, dass sein Buch der Nativitäten (s. unten § 21) ins Arabische übersetzt worden sei. Gerade in Toledo, der Geburtsstadt Abraham's, erhielt sich der Gebrauch des Arabischen noch im 16. Jahrhundert. Man weiss nur nicht, was dann *al-Kha'sibi* bedeuten soll. So heisst nämlich ein Verfasser von Nativitäten bei Hagi Khalfa, welchen ich identificirte mit „*Albubater*,“ dessen Buch der Canonicus Salio aus Padua entweder 1218 oder 1228 oder 1244 (er erscheint mit Guido Bonatti 1259 in Brescia) mit Hilfe eines Juden David übersetzte. Enthält die arabische HS. das Original dieses Werkes, und ist der Zusatz von ibn Azari, Astronomen in Toledo, falsche Conjectur eines Abschreibers?

Ich habe hier in Kürze das Resultat meiner zuerst hierauf gelenkten Forschungen mitgetheilt[50]), welche von Wüstenfeld nur theilweise benutzt und eher verdunkelt, als in helleres Licht gesetzt sind[51]).

5. Ueber Sonnen- und Mondesfinsternisse in Cod. Vatic. 44^4 soll, nach Assemani, aus dem Arabischen von Kalonymos übersetzt sein. Ich vermuthe, dass hier die Uebersetzung des Maschalla durch ibn Esra confundirt sei; s. unten § 21.

6. Auf einem Schreibfehler scheint eine Stelle im *liber de mundo* zu beruhen *(Opera Avenaris* Bl. 78 Col. 2): *Inquit translator*[52]) *hec* (so) *est itaque sermo avenare secundum quod jacet in arabico, sed visum est nobis*

50) Zeitschr. d. D. Morg. Gesellsch. Bd. 24 (1870) S. 336, 337, Bd. 25, S. 419. *Letteratura Ital. dei Giudei* im Buonarroti, her. v. Narducci 1873, Art. I, S. 192 Anm. 9. Vgl. Abr. Jud. S. 26.

51) F. Wüstenfeld, die Uebersetzungen arabischer Werke in das Lateinische seit dem XI. Jahrhundert. Aus dem 22. Bd. der Abhandl. der k. Gesellsch. d. Wissensch. 4. Göttingen 1877, S. 83, § XVI, schon in der Ueberschrift: „Salomon (falsche Conjectur einer Münch. HS.) Canonicus Pad.“ verfehlt. Wie so die arab. HS. „näher auf den Verf. führt“ sieht man im Verfolg nicht ein, da sich kein Resultat ergibt. Den Beinamen „Abu Bekr“ hat niemals ein Jude geführt, unser Abraham hiess — wie fast alle Juden dieses Namens — abu Ishak (s. oben S. 66); auch sind nicht zwei Juden Abraham als Verfasser von Nativitäten zu unterscheiden, sondern zwei Recensionen und zwei lateinische Bearbeitungen (s. unten § 21). Den Gehilfen David mit dem J. 1244 sowie eine zweite Uebersetzung des Salio *(Hermes, de stellis fixis)* hat Wüstenfeld übersehen. Er hat (S. 4) unter den benutzten Quellen meine verschiedenen Abhandlungen so allgemein angegeben, dass an mehreren Stellen, wie die obige, nur ein genaueres Citat den Forscher in den Stand gesetzt hätte, die Sache weiter zu verfolgen. — Ich mache noch auf den (Zeitschr. 24, S. 336) herbeigezogenen Kasim b. Kasit (auch bei Wüstenf. S. 42 ohne weitere Nachweisung) aufmerksam wegen des bei ihm vorkommenden Sind-Hind.

52) Ob hier der Uebersetzer ins Französische Hagins spricht? (s. unten § 21).

aut truncatam fuisse literam in exemplari aut salvis bñ [bene?] dictis eius doctrinam nimis confusam tradidisse et minus artificiosam.

7. Cod. Vat. 384[13] enthält unter den astronomischen Tabellen eine arabische; es scheint aber das Ganze nicht von Abraham, sondern von Levi b. Abraham (s. § 21).

8. Eine angebliche Logik (הגיון) in Codd. Michael 82 und bei Uri 365[53]) ist von Kaufmann als eine andere Recension der gedruckten ethischen Schrift von Abraham bar-Chijja (Abr. Jud. S. 5 Anm. 5) erkannt, und möchte Kaufmann zwei Uebersetzungen aus dem Arabischen vermuthen. Ich glaube noch weniger, dass dieser in Barcellona und der Provence lebende Gelehrte etwas arabisch verfasst habe.

§ 8.

Von ibn Esra meint Geiger[54]): „Er hatte die arabische Bildung und die jüdische Gelehrsamkeit der damaligen Zeit, nach allen Richtungen hin, vollkommen in sich aufgenommen, und dennoch scheint seine Geburtsstätte [!!] insofern einen gewissen nachtheiligen Einfluss auf ihn geübt zu haben, als er, wie mich bedünken will, wenn auch der arabischen Sprache kundig und in der arabischen Literatur vollkommen heimisch [?], sich des Arabischen nicht so vollkommen bemächtigt hat, dass er auch schriftstellerisch darin auftreten konnte. Er lebte unter den Romanen [!], so war seine vaterländische Sprache nicht arabisch, und die Annahme liegt nicht fern, dass er diese erlernt, aber nicht schriftstellerisch zu handhaben vermochte. Es wäre sonst im höchsten Grade auffallend, dass von Aben Esra in der Zeit, innerhalb welcher er in Spanien lebte, d. h. in seinem Jünglings- und kräftigen Mannesalter, keine Schrift — die kleineren, die aus jener Zeit herrühren sollen [?], sind zweifelhaft — und dass überhaupt keine Schrift von ihm in arabischer Sprache erschienen ist.“ — Es ist uns jedoch von jener Periode überhaupt nichts bekannt, und ist es sehr wohl denkbar, dass Abraham erst in christlichen Ländern Veranlassung fand, seine arabische Bildung schriftstellerisch zu verwerthen. Die von Geiger versuchte Erklärung wird widerlegt durch Abraham's Zeit- und Landesgenossen, welche arabisch schrieben. In Bezug auf arabische Sprache und Literatur seien hier die, im Plane von Geiger's Vorlesungen nicht beabsichtigten Belege mit wenigen Worten erbracht.

---

53) Vgl. Litbl. des Orient XI, 342. — D. Kaufmann in Zeitschr. d. Deutschen Morgenl. Gesellsch. Bd. 30, S. 363, A. 5. — Immanuel b. Salomo, Divan f. 152[b] nennt הגיון hinter כלי הנחשת und חזיון wohl nur des Reimes halber. *

54) Das Judenth. u. s. Gesch. II, 131.

Ibn Esra behandelte die hebräische Grammatik nach Muster der arabischen[55]), brachte wohl zuerst ein berühmtes arabisches Lexicon (Buch *Ain)* zur Kenntniss der Juden[56]), erklärt nicht selten Wörter aus dem Arabischen, vielleicht theilweise nach Quellen, die wir nicht kennen. Wie weit er in der sonstigen Literatur der Araber sich umgesehen, hat meines Wissens noch Niemand untersucht, und Geiger's Behauptung ist eine rednerische Hyperbel. Die in mathematischen und astrologischen Schriften erwähnten Autoren habe ich theilweise in Bd. 24, 25 der Zeitschr. d. D. Morg. Gesellschaft behandelt und folgt später ein vollständiges Verzeichniss. Andere sind kaum irgendwo namentlich erwähnt. Das „Buch der ägyptischen Landwirthschaft" ist ohne Zweifel aus einem Lesefehler im Arabischen für „nabatäische" entstanden, und kein anderes, als das in neuester Zeit vielbesprochene Werk des Betrügers ibn Wa'hschijja[57]). Einiges hat er selbst übersetzt (Maschalla schon 1148), und ist kein Werk eines Muslim bekannt, welches vor ihm hebräisch übersetzt wäre.

Arabischen Ursprungs ist die Einleitung in ein eigenthümliches öfter gedrucktes Schriftchen, dessen Echtheit allerdings nicht unzweifelhaft ist. Es führt den Titel: חי בן מקיץ „Lebender, Sohn des Erweckers", wie der bekannte philosophische arabische Roman des ibn Tofeil *('Hai ben Jokzan),* welchen Renan als „psychologischen Robinson" bezeichnet, mit welchem auch die Bibliographen das hebräische Schriftchen irrthümlich in Zusammenhang brachten. Ibn Tofeil erwähnt ein eben so betiteltes Buch von dem berühmten Arzte Avicenna, welches verloren scheint; aber eine ebenso betitelte kleine Abhandlung von 6 Blättern in Leyden hat ohne Zweifel dem Verfasser des hebräischen vorgelegen[58]), da er die (im Leydener Catalog abgedruckte) Einleitung in eleganter Reimprosa wiedergegeben hat. Darin trifft der Erzähler einen Greis, welcher spricht: „Hai . . ist mein Namen und die heilige Stadt (Jerusalem) mein Wohnort"[59]). Mit diesem Greis unterhält sich der Erzähler über alle Wissenschaften bis zur Physiognomik. Dann folgt im Text eine fabelhafte Erzählung von entfernten

55) *Mosnajim* f. 212, 234 ed. Ven.

56) *Zachot* Anfang, s. Zeitschr. D. M. Gesellsch. VI, 414; vgl. Hebr. Bibliogr. XI, 136. — Dss Werk des Sibeweih erwähnt schon Jona ibn Dschanna'h im XI. Jahrhundert.

57) S. Virchow's Archiv Bd. 52 S. 350, 499; Bd. 77 S. 507; Magazin f. d. Wiss. d. Jud. III, 205 A. 30, Hebr. Bibliogr. XVII, 119 zu Friedländer, *Ess.* 243, vgl. p. 74.

58) Hebr. Bibliogr. 1870 S. 21, wo bemerkt ist, dass in der Bodl. HS. nur der Titel im Index vorkomme. Ueber eine Turiner HS. s. Nachtrag.

59) Hat vielleicht auch diese Stelle dazu beigetragen, ibn Esra in Palästina sterben zu lassen?

Gegenden (Klimaten) bis zum göttlichen Wohnort. Der Hebräer geht von der Einleitung sofort auf eine psychologische Allegorie über[60]), anschliessend eine Wanderung durch ebenfalls allegorisch geschilderte „Reiche", d. h. Himmelssphären (Mond, Sonne, Mars etc., Fixsterne), worauf das Gebiet der Engel und Gottes folgt. Nun wünscht der Erzähler den Weg zur Erkenntniss und Anschauung Gottes zu erfahren und wird auf Selbstkenntniss hingewiesen [61]). Mose Frankfurt, der das Schriftchen zuerst in Amsterdam 1733 aus einer HS. herausgab, suchte — im Geschmacke der Deutschen — den Namen Abraham im Zahlwerth der Buchstaben ח—מקיץ (248) des Titels. Ibn Esra, wenn er Verfasser ist, würde solche Abgeschmacktheit mit seinem Humor gegeisselt haben.

Ob seine vereinzelte Polemik und Abwehr gegen den Islam[62]) auf Kenntniss von Schriften beruhe, lässt sich nicht ohne Weiteres bestimmen, da es auch mündliche Disputationen und Mittheilungen gab. Der „griechische Arzt", den er (zu Genesis 3, 6) für die Lebensbegrenzung des Menschen anführt, ist ohne Zweifel Galen[63]).

§ 9.

Wenn wir in Anschluss an die Lebensverhältnisse Abraham's den Kreis seiner echten Schriften durch die Sprache enger zu begrenzen vermochten, so werden wir mit weniger Sicherheit ein inneres Kriterium

60) Die fünf äusseren und inneren Sinne (S. 47 bei Goldberg, *Chofes Matmonim*, Berlin 1843) hat Avicenna, in seiner Psychologie, deutsch v. Landauer, Zeitschr. D. M. Gesellsch. Bd. 29 S. 390, wo die Benutzung bei Jehuda ha-Levi nachgewiesen ist. Die Vergleichung der Seelenkräfte mit gewissen Beamten ist auf die Glieder des Körpers übertragen von Gazzali und verarbeitet in einem Hymnus des ibn Esra, s. meine Nachweisung im Magazin f. d. Wiss. d. Jud. III, 190.

61) Diese Pointe ist im Berliner Abdruck S. 50 oder in der benutzten HS. ausgefallen! Das griechische „Kenne Dich selbst" als Mittel zur Erkenntniss Gottes wird dem Khalifen Ali in negativer Form beigelegt (Hebr. Bibliogr. XV, 43), der Name ist also in der latein. Uebersetzung des Avicenna nicht eine Einschiebung, wie Landauer l. c. 374 annimmt; Gazzali citirt den Spruch in verschiedenen Schriften und behandelt ihn in seiner „esoterischen Schrift"; auf weitere Nachweisungen muss hier verzichtet werden. Bei den Juden wird Hiob 29, 26 darauf bezogen, s. H. B. XV, 44, Magazin f. d. Wiss. d. Jud. III, 191 unt. and. in einem Hymnus unseres ibn Esra; vgl. dessen Comm. Exod. 31, 18 bei Friedländer, *Ess.* p. 34, der die Mittelglieder nicht kennt, und das Vorgedicht zu *Jesod Mora.* D. Kaufmann, Gesch. d. Attributenlehre u. s. w. Gotha 1877, S. 296 u. 445 kennt noch nicht den Ursprung des Schriftchens 'Hai ben Mekiz.

62) Mein: Polemische u. apologet. Lit. 1877, S. 352.

63) Friedländer, *Ess.* 74 Anm. zu ergänzen. Eine betreffende Anfrage des Josef ben Jehuda an Maimonides (s. Hebr. Bibliogr. XIX, 131) nennt Galen ausdrücklich. Die „Weisen Griechenlands" citirt ibn E. Exod. 12, 1.

anwenden dürfen auf dem Gebiete des Aberglaubens, welcher im Mittelalter — und leider auch darüber hinaus! — selbst die grössten Geister, mit sehr wenigen Ausnahmen (wie z. B. Maimonides) derart beherrschte, dass man gerade den philosophisch gebildeten Männern, insbesondere Mathematikern und Astronomen, den abscheulichsten Unsinn andichten oder unterschieben durfte. Ich erinnere nur an Gerbert und Albertus Magnus. Hier hat die Pseudepigraphie ihre glänzendsten Eroberungen gemacht, die noch heute ihr schwer abzugewinnen sind[64]). In Bezug auf die jüdische Literatur hat sich eine leicht verwirrende Bezeichnung eingeschlichen, nämlich: „kabbalistisch". Mit diesem Worte sollte man nicht alles Abergläubische oder Mystische bezeichnen, wenn auch manches darunter in die Kabbala mündete, oder vorgab, zu derselben zu gehören. Gerade bei ibn Esra wird die Unterscheidung recht dringlich, die hier möglichst kurz erledigt werden soll[65]).

Was in der jüdischen Literatur bis zum Eindringen der arabischen Wissenschaft (VIII. Jahrh.) als „Mystik" bezeichnet wird, besteht aus ungeordneten phantastischen Vorstellungen von Welt, Erde, Himmel, deren Entstehung, Form und Bewohner, und dem Glauben an Wunderwirkung gewisser Namen von Gott und Engeln. Da die semitischen Buchstaben zugleich Zahlzeichen sind, so ist schon frühzeitig der Zahlwerth der Wörter als exegetische Spielerei benutzt worden, die man durch das Wort „Geometria" — vielleicht richtiger „Grammataia", — bezeichnete. Jene Elemente der älteren „Geheimlehre" treten nirgends als „Tradition" auf, deren Ansehen dem Gesetz allein vorbehalten blieb. Zu Anfang des 13. Jahrh. bildete sich in der Provence, — gegenüber der aristotelischen Philosophie mit ihren zehn „Sphären" *(Galgallim)* und Intellecten, in Anschluss an das System des Ptolemäus[66]), wofür Maimonides eine esoterische Ueberlieferung

64) S. meine Abhandl.: Zur pseudepigr. Literatur, insbesondere der geheimen Wissenschaften des Mittelalters. Aus hebr. u. arab. Quellen (Nr. 3 der „Wissenschaftl. Blätter aus der Veitel Heine Ephraim'schen Lehranstalt", Berlin 1862). — Zum Speculum astronom. des Albertus Magnus, über die darin angefürten Schriftsteller und Schriften. Separatabdr. aus der Zeitschr. für Mathematik und Physik Bd. XVI [auf dem Umschlage falsch XIV] S. 357—396.

65) Ausführlicheres findet man in § 13 meines Artikels „Jüdische Literatur" in Ersch und Gruber's Realencykl. (Bd. 31) und in dessen englischer Uebersetzung (*Jewish Literature*, London 1857).

66) Vgl. Mose Tachau (unten Anm. 76) S. 84: Maimonides und ibn Esra über die zehn Sphären; S. 96: „er macht eine neue Thora und Tradition (Kabbata) um unsere Thora zu läugnen." S. 68: Abraham ha-Nasi (d. i. bar Chijja) . . . Zur Zeit des Saadia [gest. 941] gab es Weise unter den Indern (!) und Philosophen, welche Alles durch ihre wissenschaftliche Forschung erkennen wollten. Es gab einen König Ptolemäus [ich lese בטלמיום], einen Weisen und Astrologen [hier

in Anspruch nahm — eine Emanationstheorie, welche für jene Sphären eine Art von Aeonen mit verschiedener Anordnung (nach Art der sog. Porphyrbaums) setzte und diese, mit allen älteren mystischen Elementen, auch manchem, den Philosophen entlehnten Material, ausgeführte Lehre für die echte Tradition *(Kabbala)* ausgab, die selbst über dem Gesetze stehe, als „praktische" Kabbala alle Arten von Wunder wirke. Ein Product dieser Kabbala, verbunden mit Geldspeculation, ist das berühmte — vielmehr berüchtigte — Buch Sohar, das in seiner Wirkung alle anderen Fälschungen weit hinter sich zurücklässt, da noch in unserer Zeit achtbare christliche Theologen die Trinitätslehre der alten Juden aus diesem Buche schöpfen, ohne die Angriffe auf das Christenthum zu beachten[67]). — Man sollte das Wort Kabbala nur auf diese jüngere Theosophie anwenden.

Ein eigenthümliches Büchelchen, an welches sich schon im 9. Jahrh. Interpolationen und Erklärungen knüpften, das sog. Buch der Schöpfung *(Sefer Jezira)*, harrt noch immer der kritischen Bearbeitung[68]). Es stellt in etwas phantastischer Weise die 10 Zahlen (ספירות *Sefirot)* und 22 Buchstaben als Vermittler der Schöpfung auf. Die echten, theilweise arabischen Erklärer des Büchelchens im 10. Jahrh. bringen mathematisches, physikalisches und philosophisches Material heran[69]). Ihnen Allen sind die 10

---

so viel als Astronomen], der viele Bücher der Wissenschaften verfasste. [Ueber die bekannte Vermengung des Astronomen und Königs, auch in echten Schriften Abraham's, z. B. in der Arithmetik bei Terquem, Not. p. 15, s. Zeitschr. d. D. M. Gesellsch. Bd. 25 S. 397 und Halberstamm zu Ibbur S. 8.] Sie [die Inder] erfinden, wie die Welt steht, und er [Ptolem.?] meint, wegen der Schnelligkeit der Sphären steht die Erde in der Mitte in der Luft, wie z. B. wenn Jemand ein Senfkorn in eine leere [l. רקנית?] Eierschale oder ein Glasgefäss thut, und dieses so stark dreht, dass das Korn in der Mitte bleibt." Als Beleg dient eine ähnliche Stelle bei Saadia (Religionsphilos. II, S. 57 ed. Leipzig 1859); aber das Gleichniss steht nur in der von Mose benutzten hebr. Paraphrase eines Anonymus, der nicht vor dem XII. Jahrh. gelebt hat (s. Hebr. Bibliogr. XIII, 82).

67) S. Polem. u. apologet. Lit. S. 362.

68) Die Ausg. Neu-York 1877 mit englischer Uebersetzung von Isidor Kalisch bietet einen willkürlich gemachten Text und ungenaue Uebersetzung, s. Hebr. Bibliogr. XIX, 122. Ueber die an das Buch Jezira sich knüpfenden culturhistorischen Fragen s. meine Anzeige von Günther's Studien zur Gesch. d. mathem. u. phys. Geographie, in Hebr. Bibliogr. XVII, 93, 94.

69) Ich erinnere an die von Munk mitgetheilte Stelle über die „Staubschrift" *(Gobar)*, bei Reinaud, Mém. sur l'Inde p. 399, zu gleicher Zeit hervorgehoben in meinem Art. Jüdische Lit. § 21 A. 93 *(Jew. Lit.* p. 363, 378), wo ich bemerkte, dass der betr. Autor kein Zero erwähne, von der Rechentafel (פנקס, eigentlich *πιναξ*) spreche und die sog. Knöchelrechnung kenne (vgl. Abr. Jud. S. 29 A. 50). In der HS. Fischl 25 D. f. 127 hinter dem Buch *Mispar* des ibn Esra findet sich ein Stück überschrieben: „Fingerrechnung, welche arabisch *Gobar* heisst." — Ueber

„Sefirot“, wie es der einfache Sinn erfordert, die 10 Zahlen. Erst die Kabbala des 13. Jahrhunderts verwandelt die Zahlen in Aeonen, und seitdem wird das „Buch der Schöpfung“ in diesem Sinne gedeutet und für ein kabbalistisches ausgegeben.

Wie verhält sich ibn Esra zu diesem Buche? Der Schwärmer und Pseudo-Prophet Abraham Abulafia aus Toledo (geb. 1240), der in der Buchstaben-Kabbala den Mittelpunkt aller Weisheit gefunden, will einen Commentar ibn Esra's zum Buche Jezira kennen, der „grösstentheils Philosophie, theilweise kurze Kabbala“ enthalte [69b]). Aber Niemand aus jener Zeit kennt diesen Commentar, bis um 1360—1370 die Supercommentatoren ibn Esra's aus einem solchen, oder aus der Erklärung „eines Theils“ des Schöpfungsbuches unbedeutende Stellen anführen [70]). Dann verliert sich wieder jede Spur dieses angeblichen Buches, welches in mancher Beziehung interessant gewesen wäre. Bei ibn Esra's Vorliebe für Zahlensymbolik ist es kein Wunder, wenn er in echten Schriften jenes Buch heranzieht, ja sogar in der grammatischen Schrift *Zachot* und sonst die hebräischen Buchstaben danach ordnet, auch die Redensarten desselben als typisch anwendet [71]). Vielleicht hat man seine Excurse (unten § 11) für einen Commentar ausgegeben? Aber die „Sefirot“ sind auch ihm die Zahlen [72]); in seinen echten Schriften ist nichts, was mit dem Namen Kabbala im oben begrenzten

---

jenen Autor selbst und die Pariser HS. hat Munk (*Notice sur Aboulwalid* p. 51 des Sonderabdr. aus dem *Journal asiat.*, deutsch im Litbl. des Orient 1850 S. 807) wenig befriedigend gehandelt und die wesentliche Identität zweier Uebersetzungen oder Bearbeitungen nicht erkannt; s. meinen Catal. Bodl. S. 1117 u. Add., 1335, 2762; Schorr, *he-Chaluz* VI, 63; mein Alfarabi 248, vgl. Hebr. Bibliogr. XII, 57; wonach D. Kaufmann, Geschichte der Attributenlehre u. s. w., Gotha 1877, S. 173, zu ergänzen ist.

69b) Jellinek, Bet hamidrasch III, S. XLIII, vgl. unten Anm. 75.

70) Der, wenig zuverlässige Moscono in der Bulgarei (Magazin f. d. Wiss. d. Jud. III, 98 A. 12), Zarza, Motot (Hebr. Bibliogr. XV, 16), Schemtob ibn Major (bei Schiller-Szinessi, *Catal. of the Hebr. MS. etc.* P. 1 Cambridge 1876, p. 153); vgl. *Jewish Lit.* 302 n. 29, p. 357 zu 111; Catal. Codd. hebr. Lugd. Bat. p. 96; Hebr. Bibliogr. XIX, 122.

71) Zu Genes. 1, 2; Exod. 3, 15; Psalm 15, 9; Kohelet 21, 6 (Friedländer, *Ess.* 27 A. beachtet die Quelle nicht), *Meosnajim* f. 232 ed. 1545, *ha-Schem*, Kap. 1 u. 3, *Jesed Mora* Kap. 12, Buch vom Einen unter 4 u. 7 (S. 40, 57); Zahlwörter unter 10 S. 166; Arithmetik, Anfang. Gelegentlich bemerke ich, dass die Redensart מכאן ואילך צא וחשוב dem B. Jezira Kap. IV in der sog. Mischna der Maasse I, 6, 8 entlehnt scheint.

72) חכמי הספירות und חכמת sind die Zahlkundigen und die Zahlwissenschaft; s. W. Bacher, Abr. ibn Esra's Einleitung zu seinem Pentateuchcomm. (aus dem Decemberheft 1875 der Sitzungsberichte der phil.-histor. Classe der k. Akademie) Wien 1876, S. 17, 19 und Anfang der Arithmetik. Abulafia (bei Jellinek, Philosophie und Kabbala, Leipz. 1854, S. 37) verwirrt Alles.

Sinne bezeichnet werden darf[73]). Er verpönt die exegetische Anwendung der Zahlwerthe der Wörter[74]); dem gegenüber beruft sich der erwähnte Abulafia[75]) auf den Commentar zum Buche Jezira und das Buch vom Gottesnamen, worauf wir zurückkommen.

Schon ein halbes Jahrhundert nach seinem Tode wurde ibn Esra in Deutschland als Thaumaturg verschrien und theilweise wegen eines ihm untergeschobenen Buches verketzert. Mose ben Chisdai aus Tachau in Böhmen, wahrscheinlich in Regensburg, dann in Oesterreich[76]), ein unkritischer Zelot gegen spiritualistische Begriffe von Gott und gegen die „externe“ (profane) Wissenschaft[77]), behauptet, ibn Esra habe die ihn beständig begleitenden „Schedim“ (bösen Geister) geläugnet[78]) und zu grossen Erkenntnissen gelangen können, welche den Engeln versagt sind. Dennoch hätten die Geister ihm ihre Existenz bewiesen, indem sie in England seinen Tod herbeiführten[79]). Ferner berichtet er[80]), ibn Esra nehme an,

73) Das ist schon im Catalog Bodl. p. 689 angedeutet, aber missachtet im Catalog der Pariser hebr. HSS. (1866), wie Geiger, j. Zeitschr. IV, 187 rügt. Unter n. 1092 [4] verzeichnet dieser Catalog S. 201 „einige Sentenzen über die kabbalistische Bedeutung des Tabernakels und der heil. Gefässe“ (!) mit Berufung auf Litbl. X, 430, wo aber Dukes eine Probe gibt von philosophischen Sentenzen, die aus verschiedenen Büchern excerpirt scheinen, aber dem Abr. beigelegt werden. Auch Friedländer, *Ess.* 125, gebraucht noch das Wort „kabbalistisch“. — Das „Geheimniss der Buchstaben“ bei Wolf, Bibl. Hebr. I, S. 80, De Rossi, Wörterb. S. 8 n. 14 ist HS. Vatican 405 [7] anonym; die HS. Oppenh. bei Wolf III S. 49 ist Oppenh. 979 Qu. (*Temuna*), aber die vorangehenden Collectanea (*Likkutim*) werden im handschr. Catalog fälschlich ibn Esra beigelegt. Ueber die angebl. „kabbalistischen“ Geheimnisse im Pentateuch s. oben Anm. 11. — Del Medigo (bei Geiger, Melo Chofnajim S. 8) nennt ibn Esra neben Maimonides in Bezug auf die Gottesnamen als erleuchteten Mann.

74) Zu Genes. 14, 14 (vgl. Friedländer, *Ess.* 125) Einleitung, 4. Methode zu Ende, wo auch gegen zu weit gehende Zahlsymbolik; das Beispiel der 28 Mondstationen und der in ihnen aufgehenden Figuren s. auch zu Exod. 26, 2, Kohelet 3, 1; Zeitschr. d. D. Morg. Gesellsch. Bd. 24, S. 359, wonach Bacher l. c. 68 zu ergänzen ist.

75) Brief an Abraham, bei Jellinek, Philosophie u. Kabb. S. 4; über die HS. vgl. Hebr. Bibliogr. XV, 32. Abulafia schildert dort sieben Arten der Auslegung unter dem Einfluss ibn Esra's, indem er das Bild desselben vom Centrum (Wahrheit) und der Peripherie (s. unten § 10) umkehrt und die Wahrheit in die allumfassende Sphäre verlegt.

76) Ueber ihn s. die Citate in Hebr. Bibliogr. XVIII, 66 und unten A. 85.

77) Seine interessante Streitschrift ist leider unvollständig erhalten, abgedruckt in Blumenfeld's *Ozar Nechmad* Bd. III, Wien 1860, S. 58—99. — S. 64 חכמה החיצונית, 72 Z. 6 החיצונים; 85 Z. 13 v. u. דעת החיצונה. S. auch oben S. 78 Anm. 66.

78) Streitschr. S. 97 Z. 6 v. u. lies וכפר בהן.

79) S. das Genauere oben S 65. Anm. 13. Menachem Ziuni, aus Speier (XV. Jahrh.), verlegt den Sitz der Unholde nach dem Norden, z. B. Norwegen; s. Hebr. Bibliogr. XIV, 33 Anm. 2.

80) Daselbst S. 85.

dass man durch heilige Namen Visionen und Offenbarungen bewirken könne u. s. w., während Abraham (zu Exod. 3, 13 kürz. Rec.) mit einem seiner schlagenden Wortwitze bemerkt: „Diejenigen, welche vermeinen mit dem Namen grosse Werke zu verrichten, kennen den Namen (d. h. Gott) nicht." Allein das „Buch des Lebens" (ספר החיים), welchem Mose Tachau's sehr ungenaue Citate angehören, und das in einigen HSS. den Namen ibn Esra's trägt[81]), ist ein Zerrbild Abrahams, allerdings ein Zeugniss seines frühzeitigen Einflusses auf die Juden in Deutschland, das er selbst gewiss nicht berührt hat. In meiner ursprünglichen Beschreibung der Münchener HS. — welche nebst so vielen anderen wegen Mangels an Raum wegbleiben musste, — hiess es: Der anonyme Verfasser kennt die Commentare zum Buch Jezira von Sabbatai Donnolo[82]), vielleicht auch von Saadia Gaon (gest. 941), oder des letzteren Religionsphilosophie in der Paraphrase. Er verbindet Zahlen- und astrologische Mystik, wie sie zum Theil mit derselben Terminologie bei ibn Esra vorkommt (jedoch ohne letzteren zu nennen) mit der bunten phantastischen Mystik, die wir bei Elasar aus Worms finden und steht im Ganzen letzterem sehr nahe. Er gebraucht französische Wörter und Sprüche (z. B. am Ende). — Kürzlich hat Jellinek[83]) geradezu erklärt, dass die in Wien befindliche HS. Pinsker's von diesem Elasar verfasst sei, unter dessen Namen allerdings ein so betiteltes unedirtes Buch bekannt ist. Ich unterschied im Münchener Catalog diese beiden, mit Zunz[84]). Anderseits finde ich jetzt in meinen Excerpten aus dem anonymen Buche die von Zunz[85]) aus Elasar angeführte Stelle,

81) Unter Anderen in HS. München 207 und einer HS. des Antiquars Schönblum, die ich 1869 excerpirte; s. auch Benjacob's Thesaurus libr. (1880) S. 178 n. 559, 560.

82) Dieser Comm. des um 941 in Italien schreibenden Astrologen und Arztes (Virchow's Archiv Bd. 39—42) wird von Prof. Castelli in Florenz zur Ausgabe vorbereitet.

83) Hebr. Bibliogr. XVIII, 4.

84) Literaturgesch. d. synagog. Poesie, Berlin 1865, S. 324, vgl. S. 317: Elasar kannte Saadia, Donnolo, Abenesra und verflocht deren Lehrsätze nebst Stellen aus dem ס' החיים eines Ungenannten ... in seine eigenen Werke, wo Hechalot [Schilderungen der Himmelsregionen] und Midrasch, Philosophie und Zahlenweisheit, Aberglauben und Sittenlehre friedlich nebeneinander lagern. Vgl. Hebr. Bibliogr. XVII, 10 unten, vgl. XIV, 32. Neubauer, bei Renan, *Hist. lit. de la France*, tome XXVII p. 466, ist der Ansicht, dass Elasar in Folge der Ermordung von Frau und Kindern (1214) tiefsinnig geworden sei. Derselbe hebt p. 465 ein französisches Sprüchwort hervor, das noch zu erklären ist; aber das „*livre de Gloire*" ist eigentlich von Elasar's Lehrer, Jehuda (gest. 1216).

85) Zur Gesch. u. Lit. Berlin 1845, S. 377 — HS. Schönblum 6 Col. 4, München 207 f. 4b. — Beachtenswerth ist auch, dass nach Zunz, Litgesch. 316, Mose Tachau im Lebensb. Elasar's citirt ist, sowie dass Mose (nach der Vorbemerkung Kirch-

dass die unschuldigen Kinder der Nichtjuden keine Strafe im Jenseits erleiden, da ihre Anlage zum Bösen nicht zur That geworden, die aber zu den Citaten aus dem anonymen Buche gehören kann. Es muss also eine Prüfung der von Zunz benutzten HS. abgewartet werden[86]). Die Schriften des Elasar Worms haben auf den Schwärmer Abulafia eingewirkt, der selbst ein prophetisches „Buch des Lebens" um 1282 verfasst hat[87]). So ist denn des Toledaners ibn Esra Zahlenweisheit, mit fremdartigen Elementen verbunden, über Frankreich und Deutschland nach einem Jahrhundert wieder nach Toledo zurückgekehrt, wo auch christliche Kreise unter Mitwirkung von Juden sich dem Studium der Astronomie und Astrologie hingaben, und gelegentlich manches pseudepigraphische Werk erzeugten[88]). Es kann hier nicht die Absicht sein, ibn Esra's Spuren in der kabbalistischen Literatur zu verfolgen; das gegebene instructive Beispiel sollte zugleich zeigen, wie schwer der Weg zur Ausscheidung untergeschobener Schriften ist.

Zweifelhaften Ursprunges scheint mir ein geomantisches „Loosbuch" (גורלות החול), welches in verhältnissmässig alten Handschriften dem ibn Esra beigelegt wird[89]), da letzterer, wenigstens an Einer Stelle, auf das „Punktwerfen" hinzuweisen scheint[90]).

---

heim's S. 55) unter dem Namen Maimonides den Comm. zu Hiob des Nachmanides erwähnt, der allerdings schon 1223 Talmudisches verfasste (Zunz *l. c.* 316). Dass der im J. 1234 schreibende Verf. des *Arugat ha-Bosem* (Perles S. 7, vgl. Hebr. Bibliogr. XVII, 84) Mose als Verstorbenen bezeichne, ist unsicher, da die Eulogie sich auf den Vater beziehen kann.

86) Wahrscheinlich Oppenh. 891 Fol. oder Mich. 187. Neubauer, bei Renan *l. c.* S. 467, bezeichnet das Buch als *„prière et élévation vers Dieu"*.

87) HS. München 285, mein Catalog S. 113, V.

88) V. Rose, Ptolemäus und die Schule von Toledo, im „Hermes" Bd. VIII, 327 ff., vgl. Zeitschr. d. Deutsch. Morgenl. Gesellsch. Bd. 28, S. 454, und weiter unten.

89) Eine HS. des Buchhändlers Coronel, die ich 1871 sah, ist 1411 geschrieben. Die Geomantie ibn Esra's ist öfter mit der des Charisi verbunden und das Verhältniss nicht überall klar; z. B. HS. Oppenheimer 1175 Qu.; Michael 128, 355 (שער העצות im Register S. 317 ist nur eine Fortsetzung), München 228[8], Paris 1059[1] unvollst., Schönblum-Ghirondi 58, Barberina in Rom (Berliner, Magazin I, 45). Hingegen scheint Cod. De Rossi 103[2] nicht die Geomantie, sondern eine andere Art von Loosbuch, wie das dem ibn Esra sicher untergeschobene, unter dem Titel פוקח עברים Florenz 1755, Amsterdam 1781, Fürth 1783 gedruckte (Zedner S. 23, ungenau Benjacob S. 456 n. 27, 28); s. Hebr. Bibliogr. VI, 122. Dasselbe oder ähnlich ist wohl das *Seder Goralot* Ven. 1657 bei Zedner l. c., vgl. Catal. Bodl. 527 n. 3436.

90) Zeitschr. der D. M. Gesellsch. Bd. 18 S. 176, vgl. Bd. 25 S. 410, Bd. 31 S. 762. — Auch ein Theil der Astrologie wird durch גורלות *„sortes"* bezeichnet.

§ 10.

Begeben wir uns nun auf das Gebiet der echten, oder wenigstens von Schülern verfassten Schriften, so werden wir hier wiederum uns in einem weiten Kreise umzusehen haben. Zahl und Maass beherrschen Abraham derart, dass er sie wenigstens als Bilder anbringen muss, wo sie nicht etwa eine symbolische Bedeutung haben, über deren Geltung er sich vielleicht selbst niemals klar geworden. So führt er in seiner Grammatik *Zachot* die 3 Grundvocale auf die 3 Arten der Bewegung zurück — wobei zu beachten ist, dass der Vocal in der arabischen und der ihr nachahmenden hebräischen Grammatik „Bewegung" heisst. — In der Einleitung zum Pentateuchcommentar schildert er die 4 Arten der Erklärer nach dem Bilde des Centrums und der Peripherie[91]). Selbst seine Verse sind nicht frei von dieser Geistesrichtung. „Dichten war nicht seine eigentliche Thätigkeit: Zahl- und Maass lauern in seinen Versen, und aus den Worten springt des Gedankens Blitz, nicht das Bild der Phantasie hervor."[92]) In einer für den Versöhnungstag bestimmten poetischen Darstellung des einstigen Gottesdienstes sucht er ein „pikantes ungebrauchtes Motiv" und findet es in dem Zahlenverhältniss der einzelnen Acte zu den noch stattfindenden religiösen Uebungen[93]). Ein anderer Hymnus von 14 Zeilen (Akrostichon) zählt Dinge auf, deren Zahl 1 (Gott) bis 10, aus dem Gebiete der Physik, Metaphysik, sogar Grammatik, in änigmatischer Weise, so dass man es mit Commentaren versah[93b]). In ähnlicher Weise giebt ihm auch die Er-

---

91) Friedländer, *Ess.* 145. Bacher l. c. S. 13, 16 und 56 hat die, wahrscheinlich ältere Recension vernachlässigt (vgl. Friedländer 120, 143), worin die erste, vom Centrum am meisten entfernte Methode die Allegorie der Christen, die 3. die weitschweifige der Gaonim, welche profane Wissenschaften (חיצונות oder נכריות) abhandeln, die man in besondern Lehrbüchern zu behandeln habe (vgl. unten A. 96). Nur Gottesnamen (vgl. Friedländer 137 Anm. und 146) und Gründe der Gesetze gehören in Bibelcommentare. Ueber Gesetze (ungenau „*these subjects*" bei Friedländer 146) verspricht ibn Esra ein Buch, offenbar *Jesod Mora* (unten § 13, 8), also ist diese Recension ungefähr 1157 verfasst, wie Rapaport ohnes dieses, bisher übersehene, Argument annahm. Friedländer's Unterscheidung der in Italien oder Provence verfassten Bücher (p. 143, 158) kann hier nicht weiter verfolgt werden.

92) Zunz, Literaturgesch. der synagog. Poesie, S. 207.

93) M. Sachs, Die religiöse Poesie der Juden in Spanien, Berlin 1845, S. 314.

93b) Das Gedicht ist mitgetheilt von Dukes, Litbl. VII, 486, mit Commentar des Prophiat Duran (s. unten § 12, 5) in den von El. Aschkenasi herausg. Miscellen: *Taam Sekenim*, Frankfurt a. M. 1854, S. 78 (Handschr. Medic. Plut. II Cod. 42[11], Bisc. 310 in 8⁰); vgl. Hebr. Bibliogr. X, 109. — Einen handschr. Commentar von Michael Kohen (XV. Jahrh. in Griechenland?) besitzt Os. H. Schorr in Brody. — Dukes, Mose b. Esra (1839) S. 89, nennt ältere Gedichte, welche Muster sein sollen?

klärung der heil. Schrift Veranlassung zu allerlei Zahlerörterungen, vorzugsweise zur Erläuterung des Tetragrammaton. Ein beliebtes Thema ist die Vergleichung Gottes mit der Eins, die selbst keine Zahl und doch das Element aller Zahlen ist.[94]) Arabische und jüdische Religionsphilo-

---

94) Stellen bei N. Krochmal, *More Neboche ha-seman,* Lemberg 1851 (ed. II. 1863 besitze ich nicht) S. 258 ff. in einer angefangenen Darstellung der philosophischen Ansichten (ein strenges System ist wohl nicht vorauszusetzen) des ibn Esra; vgl. Kaufmann, Attributenlehre S. 507 zu 288; Friedländer, *Ess.* S. 18, 21. — Verschiedene, leicht zu vermehrende Parallelen habe ich zu einer Stelle bei Abraham bar Chijja angegeben, Hebr. Bibliogr. IV, 88. Hier sollen nur einige (meist dort unerwähnte) Vorgänger ibn Esra's erwähnt werden, welche diese pythagoräische „Sonderstellung der Eins" kennen, ohne zu den „Anhängern der jüdischen Kabbala" (Cantor, Mathemat. Beiträge S. 270, vgl. S. 336 und weiter unten) zu gehören: a) *Algorithmus* (Khowarezmi, Uebersetzung ed. Boncompagni 1857 p. 2, s. unten Anm. 95; vgl. auch Cantor, Ein Codex des Klosters Salem, S. 11). Die „lauteren Brüder" (Encyklopädiker des X. Jahrhunderts) bei Kaufmann, l. c. p. 288 (Weltseele S. 1 ist Pythagoras ausdrücklich genannt, vgl. Hebr. Bibliogr. XIII, 10 und 11); Bathalajusi (aus Badajoz) und dessen Plagiator Gazzali (Waage der Speculationen Kap. 1, Verzeichniss der hebr. HSS. der k. Bibliothek in Berlin 1878 S. 104); Isfaraîni (gest. 1078/9) bei Haarbrücker zu Schahrastani, Religionsparteien u. s. w. Halle 1850, II, 283; vgl. daselbst II, 99 die Darstellung der Lehre des Pythagoras. b) Juden: ein alter Scholastiker, bei Dukes, *Schire Schelomo,* Hannover 1858, I. Anhang S. IV (wo Z. 1 nicht mehr zum Jeziracommentar gehört, s. meine Bemerkung zu HS. München 92); Bechai (s. Kaufmann, die Theologie des Bachja S. 63). Hingegen ist „Nissim, Anhänger der Gnosis (!)" bei Jellinek, Beiträge zur Geschichte der Kabbala, I. Leipzig 1852, S. 20, kein anderer als ibn Esra selbst, wie aus Geiger's deutscher Abhandlung zur Quelle, S. 48 zu ersehen war, nämlich das Buch *Jesod Mora,* in kürzerer Fassung. Dagegen wird bei älteren Scholastikern die Vergleichung der Einheit Gottes mit der Zahl abgewiesen (Kaufmann, Attribut. 24, vgl. das Gebet Elia's Anfang der *Tikkunim* zum Sohar: „Du bist Eins, nicht der Zahl nach" in Verbindung mit den zehn Sefirot, und gleich darauf „du bist die *causa causarum*"!). Mit den Elementen vergleicht das Dekadensystem Isak Israeli b. Salomo (gest. um 940—50; *Opera Isaaci, lib. elementorum* latein. von Constantius Afer, zu Ende, besser in der handschr. erhaltenen hebr. Uebersetzung). Nach Gazzali (bei Schmölders, *Essai sur les écoles philosophiques chez les Arabes*, Paris 1842, p. 116) bestreiten die Mathematiker eine Erkenntniss Gottes überhaupt. — Beachtenswerth ist der Ausdruck תושיה (Einsicht, vgl. Sprüche Sal. 2, 7; 3, 21; 8, 14), welchen ibn Esra für die wahre Philosophie oder Metaphysik (gewissermassen Heilslehre) zu gebrauchen scheint, z. B. mit אנשי (Männer), Antwort an David Narboni S. 2 (*Jew. Lit.* 296), mit חכמי (Weise) *Jesod Mora* Cap. 12, zu Psalm 104, 30 (Bacher Einleitung 68), im astrolog. *lib. rationum* Anf., in der latein. Uebersetzung f. 32 Col. 2 nur „*sapientes*", im Buch vom Einen unter 3 und 7 (S. 30, 56); mit דרך (Methode) zu Gen. 1, 1 (Friedländer *Ess.* 20 A. 2), *plur.* zu Anfang des *Arugat ha-Chochma;* technisch scheint das Wort nicht früher gebraucht, beim Karäer Nissi (Pinsker, *Lickute*, Wien 1860, S. 38, 40, Anh. S. 9, interpolirt nach Schorr, *he-Chaluz* VI, 70), mir ganz ver-

sophen hatten ein besonderes Interesse, die ihnen von den christlichen Syrern zugeführte Wissenschaft gegen Trinität und Verkörperung Gottes zu wenden. Der Vermittler ihrer Zahlphilosophie war namentlich Nicomachus aus Gerasa[95]). Die uns ganz willkürlich scheinenden Theorien der Astrologen sind für ibn Esra Ausflüsse der besonderen Beschaffenheit der Zahlen, und er findet sie in allen Erzählungen und Anordnungen des Pentateuch, natürlich als ein „Geheimniss", das er den in profanen Wissenschaften[96]) ungeübten Glaubensgenossen in christlichen Ländern nicht

---

dächtig. Der hebräische Uebersetzer des Commentars zu Jezira (I, 1) von Saadja (HS. Münch. 221 f. 57, HS. 92 f. 80, wo von den zehn Kategorien die Rede ist) gebraucht allerdings חכמי הח׳ (das arab. Textwort wäre in Oxford zu ermitteln); aber das Zeitalter jenes Uebersetzers ist zweifelhaft und dieser Ausdruck vielleicht als Criterium zu verwerthen. Bei Abraham bar Chijja, Anf. *Hegjon* und Hebr. Bibl. VII, 94, ist es noch mit den biblischen Synonymen verbunden. Eine spätere Verquickung bietet Pseudo-Abraham ben David zu Jezira f. 15b: אורחות תושיה bei den חכמי המחקר. — Eigenthümlich ist auch der Gebrauch des Wortes תולדת (*generatio*, Einzahl richtiger in HS. zu Ende der Abhandlung über die Zahlwörter), auch *plur.*, wie es in der Bibel vorkommt. Es bedeutet zunächst die Natur im Sinne von natürlicher Beschaffenheit (s. die klassischen Stellen zu Exod. 23, 19, 26; 31, 6, Einleitung bei Friedländer, Anh. S. 2, Z. 3, Lev. 1, 1 (das Geheimniss, auch substituirt bei Joseph ben Elieser zu Exod. 23, 20 für Anderes bei Abr. zu Daniel 10, 21); auch die vier Elemente als Grund der Qualitäten (Buch vom Einen S. 55, 63); dann in Verbindung mit חכמת und חכמי die Naturwissenschaft und die Naturkundigen, s. Exod. 18, 13, (bei Bacher Einl. S. 17), 31, 3 (unten A. 96), Esther 8, 10 בעלי חכמת, wie auch wohl Exod. 25, 40 (bei Dukes, Philos. 53) zu ergänzen ist; vgl. zu Exod. 23, 20 kürz. Rec., Arithmetik Ende Kap. 5, *Jesod Mora* S. 8, bei Creizenach S. 20 „Phänomenlehre", wofür Jost (Vorr. zu Lippmann's ed. *Sefat Jeter* S. 13) Schluss-Lehre setzen möchte!* Ibn Esra kennt das Wort als logischen Terminus noch nicht, vgl. ח׳ הראיות Koh. 7, 3. Josef b. Elieser zu Lev. 1, 1 (Anm. 12, vgl. zu Exod. 23, 25) erklärt es durch das jüngere, dem arabischen nachgebildete טבע. Abr. b. Chijja (Hebr. Bibl. VII, 94) nennt die Naturkunde חכמת היצורים, Wissenschaft der Geschöpfe. — חכמי המולדת zu Exod 2, 2 scheint Nativität zu bedeuten. Dem Astrologen dürften beide Begriffe verwandt gewesen sein und daher die Wahl des ersteren Ausdrucks.

95) S. die Nachweisung bei den „lauteren Brüdern", Avicenna, Abraham bar Chijja, in Hebr. Bibliogr. VII, 87 A. 8 und XIII, 10. Der Schüler des Maimonides, Josef ibn Aknin, empfiehlt Nicomachus (bei Güdemann, das jüd. Unterrichtswesen etc. Wien 1873, S. 85; vgl. auch Comtino in Verz. der hebr. Handschr. der k. Bibliothek in Berlin S. 26 n. 49). „*In alio libro arithmetice*" bei Khowarezmi, Algorithm. S. 2 (vgl. oben Anm. 94) dürfte ebenfalls Nicomachus sein. Ueber das Studium desselben in Spanien s. meinen Artikel: Der Kalender von Cordova, in Literaturzeit. der Zeitschr. für Mathem. XIX, 6; vgl. Jew. Lit. p. 378.

96) Vgl. Einleit. zum Pentat. oben Anm. 91 und zu Daniel 10, 21 mit Hinweisung auf סוד המערכת Geheimniss der Constellation und סוד החלומות Geh. der Träume; vgl. סוד החשבון Geh. des Rechnens, oder der Rechnung, zu Num. 19, 12,

ohne Gefahr verrathen mochte, so dass erst gegen Anfang des 14. Jahrh., als die herrschende Philosophie des Maimonides der Orthodoxie und Kabbala zum Opfer gefallen war, in der Provence, Nordspanien, Italien und selbst bis nach Griechenland und der Bulgarei hin, jene Geheimnisse von Supercommentatoren[97]) grossentheils aus den anderweitigen Schriften verrathen wurden und die astrologische Bibeldeutung überhaupt zur Geltung kam[98]). Wie weit jedoch Abraham selbst, trotz aller Zurückhaltung, in seinen Aeusserungen ging, dafür mag das eine Beispiel genügen, dass er das Orakel des Hohenpriesters, die *„Urim we-Tummim“*, für ein Astrolab oder etwas ähnliches erklärte![98b]) In der hier angedeuteten Grundanschauung und halblauten Darstellung ist Abraham, bei manchen Widersprüchen in Einzelheiten, consequent geblieben; er citirt seine (um 1546 bis 1548 verfassten) astrologischen Schriften auch in jügeren Commentaren nirgends direct, auch nicht in den Excursen zum Exodus, dessen grössere Recension vielleicht nicht ganz aus seiner Hand geflossen[99]), und verweist in jenen nirgends auf diese; sie sind für verschiedene Leserkreise bestimmt. Einige kleinere Schriften stehen zwischen beiden, sowohl an Inhalt wie an

---

wonach 3 = 7 (auch in der Astrologie), סוד הגלגל Geh. der Sphäre, d. h. des Globus, der Kugelgestalt der Erde, s. Comm. zu Daniel (ed. Mathews S. 12), סוד האחד Geh. des Einen (B. des Einen S. 57); Geh. des Himmelswagens (מרכבה, Gottesthrones, *Jesod Mora* Kap. 10 S. 41 Z. 7), des Engels *Metatron* (daselbst Ende, identisch mit dem „activen Intellect“, s. zu Exod. 33, 21, Hebr. Bibliogr. XIV, 35; N. Brüll, Jahrbücher III, 1877 S. 175); Geh. der Himmelskunst (מלאכת השמים zu Exod. 32, 1 der kürzeren Recension, = Astrologie, nach Josef b. Elieser); die Weisheit Bezalel's (Exod. 31, 3) bestand in Kenntniss von „Rechnung, Maassen, Verhältnissen, Himmelskunst, Naturwissenschaft und Geheimniss der Seele: בחשבון ומדות וערכים ומלאכת שמים וחכמת התולדת וסוד הנשמה (vgl. die Parallele bei Abr. bar Chijja, Hebr. Bibliogr. VII, 94). Längst war סוד העבור Geh. der Intercalation technisch geworden. — Man sieht, dass hier Geheimniss so viel als gründliche Kenntniss, wissenschaftliche Erfassung bedeute, daher das Wortspiel mit יסוד Grundlage, s. unten Anm. 152. Vgl. auch Friedländer, *Ess.* S. 128. Zur Sache s. unten § 12 Excurs 3 zu Exod. 23, 26. Bei Menachem ben Saruk (X. Jahrh.), Wörterb. S. 5, scheint חכמי הסוד „Weise des Geheimnisses“, sich auf das Buch *Jezira* zu beziehen; vgl. Hebr. Bibliogr. XIX, 89 A. 1.

97) S. meinen Artikel: „Supercommentare zu ibn Esra's Pentateuchcommentar“, in A. Berliner's *Pletath Soferim*, Breslau 1872, S. 42—45, 51—54; Magazin f. d. W. d. Jud. III, 41, 94, 140, 190, IV, 145; Neubauer im Letterbode (Amst. 1876/7) II, 84—90; Friedländer, *Ess.* 215 ff. und dazu Hebr. Bibliogr. XVII, 117.

98) Vgl. Zunz, Gesammelte Schriften III, Berlin 1876 (verf. 1840), S. 93, 94.

98b) Magazin, etc. III, 100.

99) Diese streitige Frage kann hier nicht einmal auseinandergesetzt werden; Friedländer, *Ess.* S. 152, hält dieses Buch für ein eigenes Werk; vgl. oben S. 62.

Methode[100]). Die stofflichen Beziehungen sind aber derart, dass eine systematische Bibliographie sehr erschwert wird. Am zweckmässigsten scheint es, die die Mathematik berührenden Bestandtheile anderweitiger Schriften mit den dazu gehörenden Commentaren zuerst zu erledigen, und zwar nur inhaltlich, denn eine Aufzählung der Ausgaben würde einen unverhältnissmässigen Raum einnehmen. Wer sich näher interessirt, findet alle bekannten Drucke bis ungefähr 1730 in meinem Catal. Bodl. S. 680—89, die jüngeren in Zedner's *Catalogue of the Hebrew books in the library of the British Museum,* London 1867 p. 21—23, und in Benjacob's *Thesaurus libror.* (1880) unter den Schlagwörtern.

§ 11.

A. Stellen in den exegetischen und theologischen Schriften, in welchen ibn Esra auf mathematische und kosmographisch-astrologische Theorien hinzudeuten Gelegenheit hat, sollen hier nicht vollständig gesammelt, sondern nur einige zum Theil excursartige hervorgehoben werden[101]), welche mitunter als gesonderte Stücke in Handschriften vorkommen, den Supercommentatoren Veranlassung gaben zu Heranziehung der Parellelen und zu selbstständigen oder von Mathematikern erbetenen Ausführungen[102]).

1. Obenan steht hier der lange Excurs zu Exod. 3, 15. Das Tetragrammaton יהוה, und ebenso אהיה, ist nach ibn Esra ein *nomen proprium,* welches sich durch viererlei von anderen Substantiven unterscheidet. Nun beginnt die mathematische Stelle, welche ich der Bequemlichkeit halber in zwei Abschnitte zerlege. Das Ganze, oder einzelne Stücke, mit Citaten einer anderen Recension, deren Ursprung noch unbekannt, da die kürzere edirte zur Stelle nichts derart bietet, ist seit Anfang des 14. Jahrh. erläutert von verschiedenen Autoren, deren Verhältniss, trotz mehrfacher Behandlung in neuester Zeit, noch immer nicht klar gestellt ist, so dass

---

100) Der tendenziöse Verurtheiler Luzzatto geht über eine solche Unterscheidung hinweg; der Vertheidiger (Friedländer, *Ess.* p. 105) sieht in ibn Esra's Schriften *„textbooks for the lectures or the viva voce instruction he gave to his pupils";* sie sind wohl eher das niedergeschriebene Resultat mündlicher Bibelunterweisung. — Eine Charakteristik der Schriften Abraham's gibt Del Medigo, deutsch bei Geiger, Melo Chofnajim, Breslau 1840, S. 25, 26. Die angeführte Empfehlung des Maimonides ist kritisch verdächtig, s. Magazin etc. III, 149; Hebr. Bibliogr. XIX, 32.

101) Ein Verzeichniss von Digressionen jeder Art gibt Friedländer, *Ess.* 108 ff., worunter einige über die Kalenderfrage.

102) Eine anonyme Erklärung aller Stellen zum Pentateuch, welche auf astronomische oder astrologische Geheimnisse hinweisen, bis Levit. Kap. 24, in der Bodleiana und im Vatic., s. Geiger's jüd. Zeitschr. VI, 128.

auch die nachfolgende Uebersicht Einiges als zweifelhaft hinstellen muss. Begreiflicher Weise müssen auch selbstständige Erläuterungen desselben Textes in wesentlichen Punkten übereinstimmen.

1) Die Grundlage, wenigstens älsteste Quelle, scheint Isak Israeli b. Josef, welcher in Toledo 1310 ein berühmtes astronomisches Werk *Jesod Olam* mit einleitenden mathematischen Abschnitten, nach 1320 im hohen Alter eine Ergänzung dazu verfasste und noch 1329 lebte. Ob jene Erklärung einem grösseren Werke entnommen sei, ist unbekannt, unberechtigt die Hypothese, dass ihm ein anonymer Supercommentar zu ibn Esra gehöre, von welchem die Rede sein wird. Eine Erklärung ist unter Israeli's Namen aufgenommen von Samuel Zarza (sprich: Çarça), der 1368/9 in Valencia schrieb (f. 31 ed. Mantua), jedoch, wie es scheint, mit Einschaltungen des bereits verstorbenen Joseph Schalom, der wohl ein jüngerer Zeitgenosse Israeli's war[103]).

2) Eine anonyme Erklärung über Abschn. *a.* (die ich mit An. bezeichnen werde), abgedruckt im Anhang von Friedländer's *Essays* S. 73—78, kommt separat vor in HS. München 256[3], Cambridge 46, Berlin 244 Oct.[104]), findet sich auch im Supercommentar, welcher in einer Bodleian. HS. dem jüngeren Salomo ibn Ja'ïsch aus Guadalaxara beigelegt wird[105]), und in einer anonymen Compilation[106]).

3) Ein Excerpt aus der Erklärung eines ungenannten sehr gelehrten „Geometers", bei Esra Gatigno (1372 in Agremonte)[107]) ist der Motot's ähnlich.

103) Er ist ohne Zweifel der Polemiker gegen den getauften Alfons de Burgos, welchen de Rossi (zu Cod. 335, Wörterb., deutsche Uebers. S. 153) und Grätz (Gesch. VII, 512, vgl. Berliner, Plethat Soferim S. 52) für sonst unbekannt halten. — Ob der, f. 31 Col. 3 erwähnte Lehrer (אדני מרר ז״ל, vgl. Geiger's j. Zeitschr. VI, 129) Israeli sei, ist schwer zu ermitteln; f. 32 Col. 1 wird auf das Buch *Jesod Olam* „an seiner Stelle" [diese Worte fehlen bei Motot] hingewiesen; ein genaues Citat hat schon ibn Jaïsch (s. unten). — Abschn. *b.* enthält anonym HS. Luzzatto 114[2], jetzt Berlin 244 Oct. (Verz. S. 56).

104) Magazin etc. III, 99, 141. Hebr. Bibliogr. XVII, 118.

105) Nach Friedländer, *Ess.* Vorr. S. V, ist diese Erklärung bei Jaïsch gekürzt? — Der im Text genannte Commentar scheint jedenfalls überarbeitet; es kommen hier in Betracht die HSS. Bodl. (Uri 106), Vat. 54[3], Medic. Plut. II Cod. 49, München 61[2], Cambridge 47, 48, Carmoly (wo jetzt?); s. Magazin etc. III, 141 gegen Schiller, welcher den ibn Jaïsch als Hauptquelle ansieht; dafür ist er zu jung.

106) Cod. Ascher 17, wonach Geiger's j. Zeitschr. VI, 129 Anm. 1 zu modificiren. Die Stelle An. S. 74 scheint dort gekürzt, nach meinen Excerpten zu schliessen.

107) Geiger's jüd. Zeitschr. VI, 128 (vgl. Hebr. Bibliogr. XIX, 94). Esra's Comm. ist unedirt. Er war aus Saragossa und schrieb 1356 Cod. Paris 1008 (Averroes arabisch, vgl. Hebr. Bibliogr. XIII, 5 unten).

4) Samuel Motot (um 1370 in Guadalaxara), gibt eine eigene Erklärung (פירוש המספר) in seinem Supercommentar (ed. Ven. 1554 f. 17 Col. 4 bis f. 20), aber in der geometrischen Partie scheint er Josef Schalom zu benutzen[108]).

5) Schemtob ibn Major aus Briviesca (1384?) gibt die Erklärung seines verstorbenen Lehrers Baruch[109]).

6) Zu Abschn. *b.* enthält die Bodl. HS. Uri 106 eine Erklärung des ältern Salomo ibn Ja'ïsch (gest. in Sevilla 1345), wahrscheinlich aus dem arabischen Supercommentar desselben excerpirt und übersetzt[110]).

7) Ueber denselben Abschnitt findet sich ein Briefwechsel zwischen einem Rabbaniten und einem Karaiten in der Bodl. (Uri 106) und im Vatican 36[3].[111])

§ 12.

Kehren wir nun zum Texte ibn Esra's zurück.

a) (arithmetisch) beginnt wörtlich: „Wisse, dass das Eins Geheimniss und Element (סוד, יסוד) aller Zahl ist, 2 Anfang der Paarzahlen, 3 der ungeraden; es sind danach die Zahlen 9 in einer Weise, aber 10 in anderer Weise. Schreibst du 9 in einem Kreise und multiplicirst (תכפול) das Ende [9] mit jeder Zahl, so findest du die Einheiten links, die ähnlichen Zehner rechts bis 5, wo sich das Verhältniss umkehrt[112]). Anderer-

---

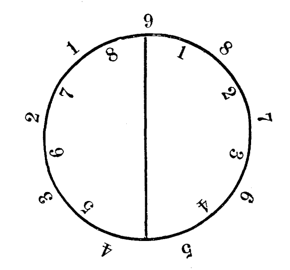
108) Von Fol. 19 Col. 3 („Ziehen wir einen Kreis") bis Col. 4 Z. 15 v. u. ist als פירוש תמונות (Erklärung der Figuren) dem Buche vom Namen angefügt von Elieser Norzi, und sonst anonym, daher nicht erkannt vom Biscioni (Pl. II, Cod. 42[4]) p. 308, im Pariser Catalog No. 1092[8], Cod. Parma (Stern 21), s. Hebr. Bibliogr. VIII, 29, nachträglich von Luzzatto zu 114[9] (jetzt Berlin, s. Verz. S. 57). Ueber eine unedirte abweichende Recension Motot's, jetzt in Cambridge No. 49, s. Hebr. Bibliogr. XV, 16; Schiller-Szinessi, Catal. S. 136, 248. Den gedruckten Auszug (Amst. 1722) berücksichtige ich nicht.

109) Handschr. Cambridge 52, Catalog S. 148 und 155.

110) Magazin etc. III, 141; Hebr. Bibliogr. XIX, 93.

111) Geiger's jüd. Zeitschr. VI, 128; Hebr. Bibliogr. XVII, 119.

112) Der Kreis (vgl. oben S. 84 Anm. 91) wird schon von Israeli und dem An. gegeben und erklärt: $9 \times 9 = 81$, $9 \times 8 = 72$, $9 \times 7 = 63$, $9 \times 6 = 54$, dann $9 \times 5 = 45$ u. s. w.; aber in der Ausg. von Zarza sind die gleichen Zahlen irrig zusammengestellt, es muss so verbessert werden, wie zu Anfang der Arithmetik in Cod. Luzatto 114:



seits sind es zehn Zahlen[113]), nach der Ansicht der Arithmetiker (חכמי המספר), da jede Einheit ein Theil der entsprechenden Decade ist, oder entsteht aus Multiplication, oder Addition, oder beiden zugleich[114]). Die 10 *Sefirot* (Zahlen) entsprechen der Anzahl der Finger, 5 gegen 5, ebenso 9 Sphären, welche erhabene selbstständige Körper; die 10., welche „heilig" ist, wird so genannt, weil ihre Kraft sich über den ganzen Thron der Herrlichkeit (כסא הכבוד) erstreckt" u. s. w. — Ich verfolge hier nicht die kosmologische Anwendung und gebe im Folgenden den Inhalt in Kürze mit Benutzung der Commentare. — Die Buchstaben אהוי, also 1, 5, 6, 10, wovon 5, 6 die mittleren, haben das Eigenthümliche, dass ihre Quadrate sie selbst enthalten ($1^2 = 1$, $5^2 = 25$, $6^2 = 36$, $10^2 = 100$, d. h. 10 Zehner, ebenso $11 \times 11 = 121$, $15 \times 15 = 225$).[115]) Die Einheit hat nur Ein Ende, die andern Zahlen haben zwei[116]). 5 ist $= 1^2 + 2^2$, d. i. die „gleiche Rechnung" (חשבון השוה) der Quadrate, denn $5^2 + 2 \times 5$ $(=10)^2$ ist $= 5^3$ (125)[117]); bei allen Zahlen vor 5 ist das Verhältniss des Cubus zur Summe des Quadrats und des Quadrats der doppelten wie das der betreffenden Zahl zu 5. [Z. B. 4^2 (16) $+ 8^2$ (64) $= 80 - 4^3$ (64) : 80 $= 4 : 5$]. Bei den Zahlen hinter 5 kehrt sich das Verhältniss um. Die Zahl 6 ist „gleiche Rechnung" in ihren Theilen (d. h. Factoren). [$6/2 + 6/3 + 6/6 = 6$.][118]) Solcher Zahlen giebts in jeder Reihe (מערכת) nur Eine. Ferner $1^2 + 3^2$ (nämlich der ersten ungeraden Zahl) $= 10$, d. i. 1 Zehner.

113) Der Text hat hier בלי מה „ohne Etwas", wie es wohl ursprünglich im Buch Jezira hiess, um die abstracte Zahl zu bezeichnen. An. S. 74 Zeile 3.

114) Israeli bezieht das noch auf die Einheiten, An. und Motot auf die Zahlen nach 10.

115) Motot nennt „jede dieser Zahlen" runde (kreisende עגול) Rechnung, aber ibn Esra nur die 5 (Buch vom Namen Kap. 3 und 6 f. 16; *Jesod Mora* Kap. 11 f. 45, 47; Zahlwörter unter 5 S. 158; zu Kohelet 7, 27, unten n. 6); hier nennt er 5 die „gleiche" d. h. unveränderliche.

116) Ibn Esra kennt (wie die Araber) keine negative Grösse, also steht 1 nicht zwischen 2 Zahlen; vgl. Pinsker zu B. des Einen S. 7.

117) An. S. 76 erklärt bei Gelegenheit das hebr. מעוקב für Cubus (arab. كعب, vgl. unten A. 190 קעב) von עקב Ferse, weil diese rund sei; ein allseitig rundes sei eine Kugel mit gleichen Dimensionen! Es scheint vielmehr: das „Entsprechende", die Folge, indem jede Dimension den anderen entspricht. Ibn Esra gebraucht für Quadratwurzel יסוד (Pinsker zu B. d. Einen S. 2).

118) An. S. 77 hat anstatt $6/6$ 6 getheilt durch 2×3, also durch das Product beider Nenner. Er führt weiter aus, dass in der Reihe von 10 bis 100 nur 28 eine „gleiche Zahl" gebe, dann $\frac{28}{2} + \frac{28}{4} + \frac{28}{7} + \frac{28}{7 \times 2} + \frac{28}{7 \times 2 \times 2} = 28$; auch hier drückt er sich aus „halbes Siebentel und dessen Hälfte", vielleicht weil das Hebräische keinen Ausdruck für zweistellige Nenner hat. Hierauf gibt er eine

b) (geometrisch). Ziehe die Diagonale, deren Länge 10 [irgend eines Maasses] in einem Kreise, füge Sehnen an den Drittheilen, so ruht darauf ein Dreieck, dessen drei gleiche Seiten so lang sind als die Diagonale und als das (durch Verbindung beider Sehnen gebildete) Viereck[119]). Vor dieser Zahl wird sich das Dreieck zur Peripherie verhalten, wie zu 10, hinter derselben umgekehrt. — Hierauf führt die Ziffernsumme 22 der 4 Buchstaben אהוי auf die Klassificirung der 22 hebr. Buchstaben. Man könnte dies als: *c)* philologische Begründung des Gottesnamens, das Ganze aber als Erläuterung des ersten nnd grundlegenden Satzes im Buch *Jezira* betrachten, wonach Gott die Welt durch Zahlen und Buchstaben erschuf. Zuletzt ist noch von den 120 Planeten-Conjunctionen die Rede, s. unten zum 5. Excurs.

2. Zu Exodus 23, 21: Gott war in der „Mitte" wie das Centrum. Die Maasskundigen (חכמי המדות Geometer) haben bewiesen, dass der Mond sein Licht von der Sonne erhalte u. s. w. — Der Commentar Motot's ist anonym in Cod. München 285[3] und nicht erkannt in Catalog Paris 825[6].

3. Zu Exod. 23, 26[120]). Ibn Esra bemerkt, dass es grosse Gesetzgelehrte gebe, welche sich mit der Wissenschaft der Naturerscheinungen[121]) nicht beschäftigt haben, denen er also zur Texterklärung Einiges aus den Wissenschaften erwähnen müsse. Zuerst kommen Bemerkungen, die man psychologische und physiologische (Temperamente und daraus folgende Krankheiten) nennen kann; er bezeichnet sie zuletzt als „Medizin"[122]);

---

allgemeine Regel, die einzige solche Zahl in jeder Reihe aus einer Art „Primzahl" zu finden, und damit endet seine Erklärung. Motot gibt noch 496 unter den Hunderten an, erklärt auch den Unterschied von vollkommener, überschüssiger und mangelhafter Zahl (in Bezug auf Summe der Factoren) und verweist auf Euclid Ende B. IV. Die griechische Benennung ist *ὑπερτελεῖς*, *ελλιπεις*, *τελειοι*; die hebräischen Ausdrücke dafür bei Abraham bar Chijja s. Hebr. Bibliogr. VII, 88; vgl. Lippmann zum B. des Namens S. 32. Den Ausdruck חשבון שלם (perfect) hat ibn Esra, Zahlwörter S. 161. Vgl. Josef ibn Aknin bei Güdemann, das jüd. Unterrichtswesen, S. 84; als Quelle habe ich in Hebr. Bibliogr. XIV, 16 die Encyklopädie des al-Farabi nachgewiesen, wo sich die „befreundeten" Zahlen anschliessen; über letztere s. meine Nachweisungen H. B. XIV, 38.

119) Die Figur bei Josef Schalom (der bemerkt, dass die Differenz von π nach Ptolemäus und den indischen Weisen hier nichts verschlage) ist folgende:

120) Vgl. Friedländer, *Ess.* 116.
121) S. oben S. 86 A. 96.
122) S. oben §. 7, 2 S. 72.

nach der Combination von Stärke und Schwäche in den drei Hauptkräften zählt er 27 Arten von Menschen (s. unten S. 100 Anm. 154). Dann kommt er auf die Sternkunde (חכמת המזלות, hier Astrologie), d. h. die Anordnung der Planeten (מערכת המשרתים, d. h. Constellation) zur Zeit der Geburt, welche ebenfalls massgebend ist und mit dem Schriftwort nicht in Widerspruch stehe, wie zu 33, 16 [gemeint ist 33, 21] erörtert werden soll.

4. Zu Exod. 32, 1 vom goldenen Kalb[123]), welches kein Götze war. Die Sternkundigen behaupten, dass die grosse Conjunction der beiden obersten [Planeten] im Sternbilde des Stieres stattfand; das ist falsch, denn sie fand nur im Wassermann statt, und nach der Astrologie ist [der Stier] das Sternbild Israels. „Viele haben dieses Geheimniss erprobt, Geschlecht nach Geschlecht, auch ich sah es so[124]); sie setzten es (das Kalb) also in die Mitte des Himmels.“

5. Zu Exod. 33, 21 über den Gottesnamen. Die Summen der vier Buchstaben יהוה ergeben 72[125]), $1^2 + 5^2 = 26$, auch die Conjunctionen der 5 Planeten [26 nach Motot, 21 nach Zarza = אהיה]. Die Namen der ersten 2 Buchstaben יו"ד ה"א zählen 26. Die Quadrate der Paarzahlen [$2^2 = 4 + 4^2 = 16 + 6^2 = 36 + 8^2 = 64$, Summe 120] ergeben die Summe aller Zahlen bis zum halben Namen [$1 + 2 + 3$ u. s. w. bis $15 = 120$]. Das Product beider Hälften [$15 \times 11 = 165$] ist gleich den Quadraten der ungeraden Zahlen [$1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 = 165$]. Das Quadrat des 1. Buchst., vom Quadrat der 2 folgenden abgezogen, gibt den Cubus des zweiten [$15^2 = 225$ *minus* $10^2 = 100$ gibt $125 = 5^3$]. Das Quadrat von zweien subtrahirt vom Quadrat dreier, ergiebt den Cubus des dritten. [$21^2 - 15^2 = 6^3$.] Das Nachfolgende interessirt uns hier nicht. Jedoch bezieht sich darauf, wie auf einige andere Stellen Abraham's, betreffend die Siebenzahl, die auch in den hebräischen Festtagen erscheint,

---

123) Fehlt bei Friedländer, *Ess.* 117.

124) Die Stelle ist corrumpirt bei Motot f. 26 Col. 2, der sich auf ein altes Buch von Ptolemäus beruft, wohl Tetrabiblon oder Centiloquium. Auf seine eigene Erfahrung in der Astrologie beruft sich Abr. auch sonst, z. B. zu Exod. 2, 2: „Fünfmal habe ich erprobt, dass der Ort des Sternbildes des Mondes und dessen Aufsteigen (oder Grad) zur Zeit der Conception (des Kindes) der Grad des aufsteigenden Sternbilds zur Zeit der Geburt“ etc.

125) $10 + 15 + 21 + 26 = 72$; Zarza und Motot, letzterer citirt *Jesod Mora;* s. unten § 13, 7, *ha-Schem* Kap. 5. Den Comm. in Cod. Uri 106[8] (in Geiger's j. Ztschr. VI, 128 ist חכא Druckf. für חשא) habe ich nicht vergleichen können. Ueber den Gottesnamen von 72 (Buchstaben) s. Zeitschr. d. Deutsch. Mg. Gesellsch. IV, 160, vgl. Hebr. Bibliogr. XIV, 6 u. 35 Anm. 7. Friedländer *Ess.* 117 giebt den Inhalt dieses Excurses sehr kurz und ungenau.

eine Abhandlung des Mathematikers Prophiat Duran (vor 1391?)[126]), welche nach Cod. de Rossi 835 abgedruckt ist hinter der Grammatik ed. Wien 1865 S. 181—84[127]). Der Verfasser citirt Plato's *Timaeus* — welcher unter den Schriften Plato's am meisten bei Arabern und Juden gekannt war — die „Elemente" (Euclid's), verschiedene Schriften der Araber[128]). Nachdem er auch das Buch Jezira erwähnt, bemerkt er, dass Aristoteles, Physik III, und Metaphysik VII, von Vorgängern spreche, welche die Zahlen als Prinzipien der Wesen ansahen (vgl. oben § 9). Er bemerkt ferner (S. 183): „In Bezug auf ibn Esra's Deutung der Midraschim (alten Auslegungen) haben wir nicht leitende Grundsätze, wie wir sie wohl besitzen in Bezug auf die meisten seiner Geheimnisse und Andeutungen"[129]), womit ohne Zweifel die Zahlsymbolik und Astrologie gemeint ist, über welche man aus seinen betreffenden Schriften die Grundsätze ziehen konnte.

Kehren wir zum Schluss des 5. Excurses zurück, worin die Siebenzahl vorkommt.

Es gebe bekanntlich 120 Conjunctionen der 7 Planeten[130]), die grosse (grösste) sei eine, die 2. und 5. Art (Combination von 2 und 5) zähle 21, die 3. und 4. zähle 35, die 6. zähle 7; 21 und 35 seien Producte von 7. — Motot giebt die Combinationen im Einzelnen an (welche natürlich Producte von 7 sein müssen, da 7 Planeten in Betracht kommen). Auch die Perioden von 20 und 240 Jahren (welche schon alte Astrologen kennen) werden erwähnt.

6. Zu Kohelet 7, 27 heisst es: „Wenn man 1 mit 1 verbindet (addirt) entsteht das Haupt [Anfang] der Zahl [2], verbindet man 2 mit dem Haupt, wird es wie ein Ende [3], verbindet man 1 mit dem Ende, wird es [4] quadrirt (נגדר s. S. 110), dazu 1 [5], wird es rund (vgl. oben Anm. 115), dazu 1 [6] ist geradegemacht (מיושר), das Geradegemachte vollkommen, das Vollkommene ein Körper." Auch diese symbolisirende Bezeichnung der

---

126) Vgl. S. Gronemann, *De Profiatii Durani (Ephodaei) vita ac studiis etc. Diss inaug. Vratislav. 1869,* p. 18: *De Prof. Durani studiis ad res calendarias spectantibus*, nach einem Werke, wovon nur Vorrede und Kap. 27 gedruckt sind. Zu S. 23 über Hermes s. Wolf, Bibl. Hebr. II, 1442 u. 738. — Vgl. auch oben S. 84 A. 93 b.

127) In der deutschen Einleitung S. 47 ist irrthümlich Cod. 800 angegeben.

128) S. darüber Hebr. Bibliogr. X, 109.

129) Gronemann, l. c. p. 119, hat nicht genau gelesen und verdreht Duran's Bemerkung.

130) S. unten § 13 zum B. vom Namen Kap. 5. Abr. erwähnt sie auch zu Exod. 3, 15 und Daniel 10, 21, im astrolog. *de mundo*; andere Nachweisungen s. Hebr. Bibliogr. XVI, 131.

Zahlen 1 bis 6 hat einen Erklärer gefunden, Namens Immanuel, den ich für Immanuel ben Jakob halte, den bekannten Verfasser der Kalender-Tabellen („Sechsflügel," oder Adlersflügel, verf. in Tarascon 1365).[131])

§ 13.

Ausser den Bibelcommentaren gehören noch zur obigen Rubrik *A.* zwei Schriften, die ich mit fortlaufender Ziffer bezeichne.

7. ספר השם (*ha-Schem*) Buch vom Namen, d. h. Gottesnamen, in 8 Kapiteln, verfasst in Beziers und gewidmet, nach einigen HSS., dem „Abraham ben Chajjim und Isak ben Jehuda"[132]), ist herausgegeben mit deutschem Vorwort, enthaltend eine Inhaltsübersicht, von Lippmann, Fürth 1834, nebst einer Erklärung des 6. Kapitels von Alexander Behr in München. Einen unedirten Commentar von Salomo ben Elia Scharbit-ha-Sahab (*Chrysococca?*), verfasst 1386 in Ephesus, enthält Cod. de Rossi 314[133]). Ein anderer von dem Kandioten Sabbatai ben Malkiel Kohen (1447 bis 1493?) HS. in Petersburg Firkowitz 536 und (Copie?) früher HS. Pinsker 11, jetzt im „Bet ha-Midrasch" in Wien[134]). Auch der Gegner des letzteren, Mordechai Comtino (um 1460 in Constantinopel und Adrianopel), als Lehrer der Mathematik nicht bloss unter den Juden bekannt[134b]), commentirte das Büchlein. Ein anonymer Commentar findet sich in HS. München 36[7] unmittelbar vor Mischnat ha-Middot. Der Commentar des J. S. del Medigo scheint noch nicht aufgefunden.

Das Schriftchen ist eine weitere Ausführung der Excurse zu Exod. 3, 15 und 33, 21 (oben 1 u. 5); auch hier behandelt Kap. 2 die Kenn-

---

131) Handschr. sind nachgewiesen im Magazin etc. III, 142. Ueber Immanuel's in Sitomir 1872 gedrucktes und von Slonimski corrigirtes, schon 1406 lateinisch übersetztes Werk und den griechischen Commentar von *Ge. Chrysococca* s. die Citate in Hebr. Bibliogr. XV, 26, 39. Vgl. auch mein *Intorno a Joh. de Lineriis etc.* p. 9 des Sonderabdrucks (Roma 1879).

132) Nach einer handschr. Notiz B. Goldberg's hätte die HS. Orat. 180: Abraham „ben Samuel"; der Pariser Catalog gibt unter 1085[3] nichts Näheres an. Graetz (Gesch. VI, 446) combinirt zwei gleichnamige Gelehrte, welche aber dem XIII. Jahrh. anzugehören scheinen; vgl. Geiger bei Schorr, he-Chaluz II, 31; Zunz Litgesch. 481, *Hist. lit. de la France* XXVII, 620. Ueber Isak s. oben Anm. 5.

133) Ueber den Verfasser s. Hebr. Bibliogr. VIII, 28, XIX, 63.

134) Ueber den Verfasser s. Hebr. Bibliogr. XIX, 63. Den Titel ארון הברית geben ältere Quellen an. Stellen daraus über Mischnat ha-Middot bespricht Geiger wiss. Zeitschr. V, 417, VI, 26; vgl. auch *Kerem Chemed* VIII, 6; Schorr, he-Chaluz V, 45. — Was die Erklärung von Rechnungen des Gottesnamens in HS. Almanzi 238[9] (jetzt im Brit. Mus.) enthalte, und zu welchem Text Abraham's sie gehöre, ist noch unbekannt.

134b) Hebr. Bibliogr. XVII, 135; einen Artikel über ihn bringt die H. B. 1880.

zeichen des *nom. propr.*; im 3. geht Abraham wieder von der Einheit und Decade aus, mit Berufung auf das Buch Jezira (vergleiche die Inhaltsangabe bei Lippmann S. 20 ff.). In Kap. 4 heisst es unt. And.: Der Körper hat 3 Dimensionen, also 6 Ecken, wie es im Buch Jezira heisst; so hat das Tetragrammaton 3 Buchstaben; der 4. ist ו $= 6$, und da 3 Buchstaben 6 Combinationen geben[135]), 4 aber 24, so sind nur die 3 Buchstaben verschiedene, der 4. $= 2.$, so dass nur 12 Combinationen entstehen. 4 ist auch Quadratzahl wie 1 — hier bezieht er sich auf das Buch vom Einen (unten § 14) — 3 ist aber die Grundlage der Rechnung, da sie die erste Zahl ist, deren Quadrat grösser als die Summe $[3 \times 3 > 3 + 3]$, während $1 \times 1 < 1 + 1$, $2 \times 2 = 2 + 2$.

Kap. 5. Die Summe der Primzahlen $= 18$, verhält sich zu der zusammengesetzten, $= 27$, wie 2 zu 3, welche Anfang der Zahl ist (je nach dem Bedürfniss ist 2 oder 3 Anfang der Zahl!), ebenso der erste Buchstabe (10) zum 1. und 2. (15); [Nennen wir die 4 Buchstaben $a\ b\ c\ d$, so gibt $a + a + b + a + b + c + a + b + c + d$ 72][136]). Ferner 15 multiplicirt mit seiner Hälfte und $1/2$ — nach Art aller Progressionen (?)[137]) — also 15×8 gibt 120, dessen Theile [d. h. Factoren summirt] das Doppelte ergeben, wie keine andere Zahl. Nun folgen Sätze, die wir schon aus Excurs 5 kennen, jedoch für den dortigen letzten Satz (wie unten Nr. 8) heisst es hier: 15^2 (225) $+ 21^2$ (441), abgezogen von 26^2 (676) gibt 10 (den 1. Buchst.) zum Rest. 10×5[138]) $= 50 \times$ mit 6×30, giebt 1500, ähnlich 15 (d. h. 15 Hunderte). Ferner 15×26 ($= 390$) hat den Zahlwerth des Wortes Himmel (שמים $= 390$). $10 \times 10 + 10 \times 5 + 10 \times 6 + 10 \times 5$ (260) und dazu $5 \times 5 + 5 \times 6 + 5 \times 5$ (80) gibt den Zahlwerth des Wortes „Namen“ (שם 340). Hier ist Abraham in künstliche Spielerei verfallen, während früher die Stellung der Zahlen 1, 5, 6, 10 im Decadensystem in consequenter Weise ausgeführt ist.

Kap. 6 beginnt mit Anführung von drei Ansichten über den Werth von π. 1. nach Ptolemäus: $3\,{}^{8}/_{60}$, 2. nach den Geometern (חכמי המדות)

---

135) Hebr. בתים „Häuser“, so im B. Jezira.

136) In Bezug auf den Gottesnamen von 72 Buchstaben (woran Abraham selbst vielleicht nicht glaubte) citirt er zu Exod. 14, 19 ein Buch רזיאל Rasiel (vgl. Zeitschr. für Mathem. XVI, 386, 396), in der kurzen Rec. zu 3, 13 heisst das Buch הרזים „Buch der Geheimnisse“. Zarza zu 14, 19 fand bereits so verschiedene Angaben dieses Gottesnamens, dass er lieber gar keine aufnahm.

137) מחברים scheint hier diese Bedeutung zu haben (vgl. unten § 16, 2 K. 5 במחובר מהחכאה). Lippmann scheint es geradezu für מחברות Conjunctionen zu nehmen, vgl. oben S. 93 A. 125.

138) נערוך für multipliciren, מערכת für Product.

$^{22}/_{7}$,[139]), nach den Weisen Indiens 3, 8′, 44″, 12‴ (nach Sexagesimaltheilung). Das wahre Maass sei weniger als $3^{1}/_{7}$ und mehr als $3^{10}/_{71}$.[140]) — Arjabhatta (bei Lassen, Ind. Alterth. II, 1138) hat $\frac{20000}{62832}$, oder (bei Lassen IV, 851) $\frac{62822}{252000}$. Abraham's Zahl gibt nach Luzzatto $\frac{216000}{895452}$, oder durch 12 reducirt $\frac{18000}{56621}$, in Decimalen 3,1622777; die jetzt angenommene Zahl bei Lassen wäre 3,14163. In der Arithmetik (§ 17) werden wir $\frac{62838}{20000}$ finden[141]); Immanuel ben Jakob (1365, s. Cod. Paris 1026^{5}) hat $\frac{67861}{21600}$; Comtino (um 1450) hat $3^{8}/_{61}$. — Hierauf folgt das geometrische Beispiel vom Kreise, dessen Diagonale 10 (vgl. oben § 12 S. 92), indem hier die Anwendung nach den oben erwähnten Ansichten gemacht wird[142]). Dann kommt die arithmetische Deduction mit dem Kreise, welche im 1. Excurs der geometrischen vorangeht. Endlich kommt hier hinzu „der Weg des Gewichts" (משקל). Da 9 das Ende der Zahl ist, so ist sein Gewicht ihm gleich und sein Product (? מערכתו) mit jeder Zahl ihm gleich[143]). Daher ist das Gewicht von 8 nach der Probe von 9 eins, weil es um 1 absteht, 1^2 aber $= 1$ ist; das Gewicht für 7 ist 4, weil der Abstand 2, also 2^2, für 4 und 5 also gleich[144]).

---

139) Abweichende Angaben und den Namen des Archimedes in der Arithmetik unten § 17 Anm. 218. — $^{22}/_{7}$ hat schon die Mischna der Middot.

140) Nach Luzzatto's Emendation, *Kerem Chemed* II, 77, vgl. IV, 112, wo auch weitere Stellen rectificirt sind.

141) Vgl. Zeitschr. D. M. Gesellsch. Bd. 24 S. 345.

142) Abr. gebraucht hier den Ausdruck חץ (Pfeil, arab. سهم), ferner שברים für Flächeninhalt (später gewöhnlich חשבורת, chaldäisch תבריאתא*), das arab. تكسير, ebenfalls von كسر brechen; auch שִׁבּוּר s. unten Anm. 180, 217.

143) Hier kommen zwei eigenthümliche Ausdrücke vor, welche Lippmann nicht erklärt, und die ich nicht zu belegen weiss: 1) משקל „Gewicht" wird in der Grammatik für Wortform gebraucht. Hier drückt es das Quadrat der Differenz zwischen einer Zahl und dem Quadrat von 9 aus. — 2) מערכת, welches sonst bei Abraham die Zahlreihen (Einer, Zehner) bedeutet, heisst hier, wie Ende Kap. 4 (neben מחברת Summe) das Product (nicht „Multiplication" wie Lippmann f. 9b angibt). — Der Ausdruck für Probe, מאזנים, eigentlich Waage, erscheint auch wiederholt in der Arithmetik, besonders im 7. Kap., wo die beste Probe als מאזני צדק (Levit. 19, 36) bezeichnet wird, und im Kalenderwerk f. 4. Bei unserem Abraham ist es die Probe durch 9, wie bei Leonardo Pisani „*per pensam probare*" (s. mein *Intorno ad alcuni matematici etc. Lettera IV*, Roma 1865, p. 52). Vgl. das 12. Kapitel der Rechenkunst von Kuschjar b. Lebban (s. unten Anm. 191). Das Bild der Waage ist besprochen in der deutschen Abtheilung des *Jeschurun* her. von J. Kobak Jahrg. IX, 1879.

144) In Lippmann's angeblicher Erklärung finde ich keinen Sinn. Abr. meint,

Machen wir ein Quadrat von je 3 Ziffern, dessen Reihen gleich seien, so kann es nur aus 9 Ziffern bestehen; die Reihensumme muss 15 sein und 5 in der Mitte stehen.

Das Quadrat ist das bekannte magische,

6	7	2
1	5	9
8	3	4

oder beliebig umgestellt

4	9	2
3	5	7
8	1	6

wie es z. B. Creizenach zu Jesod Mora (s. folg. Nr.) S. 123 gibt. Liharźik[145]) holt das Quadrat aus letzterem Buche, bemerkt aber dazu: „das hebräische Werk selbst ist im J. 1834 als eine ausführliche Abhandlung über das Tetragrammaton unter den Titel „*Sefer ha-Schem*“ erschienen (!). Der mathematische Theil bildet die Basis seiner Religionsphilosophie. Herr Dr. Jellinek, durch welchen ich auf dieses [welches?] Werk aufmerksam gemacht wurde, ist im Besitz eines handschriftlichen Commentars, welcher in gemeinschaftlicher Bearbeitung nächstens erscheinen soll und verspricht noch weitere, sehr interessante Aufklärung über diesen Gegenstand. Die Abhandlung ist in 12 Abschnitte getheilt u. s. w.“ Das letztere bezieht sich auf Jesod Mora; Günther[146]) citirt „ha-Schem,“ jedenfalls nicht falsch, da es auch hier zu finden ist. Liharźik hat wahrscheinlich Jellinek's Angaben missverstanden; das versprochene Werk ist bis heute nicht erschienen. Das Quadrat erwähnt schon der berühmte arabische Philosoph Gazzali (1111)[147]) und es hat sich bei den Juden lange erhalten. Am Ende des Algorithmus von Johannes Hispalensis ist es von Boncompagni (S. 136) aus der HS. mit abgedruckt, doch ohne Zusammenhang mit der Schrift selbst. Wilhelm Raimund Moncada (um 1480), ein getaufter Jude, fand es als Amulet seines Vaters Nissim Abu'l-Faradsch[148]); es findet sich in den Hamburger hebräischen HSS. 148 und 248 meines Katalogs.

$8^2 = 64$ hat die Ziffernsumme 10, also 1 mehr als 9. $7 \times 7 = 49:9$, Rest 4, $6 \times 6 = 36$ Rest 0, $5 \times 5 = 25$ Rest 7 und $4 \times 4 = 16$ ebenfalls Rest 7. Vgl. Josef b. Elieser zu Schemot Bl. 44, Col. 4.

145) Franz Liharźik, das Quadrat die Grundlage aller Proportionalität in der Natur etc. 4⁰. Wien 1865, S. 5.

146) S. Günther, Ziele und Resultate der neueren mathematisch-historischen Forschung, Erlangen 1876, S. 122; durch ihn bin ich auf Liharźik gekommen.

147) Gazzali bei Schmölders, *Essay sur les écoles philos. chez les Arabes,* Paris 1842, p. 81. — Andere in Zeitschr. D. M. Ges. Bd. 31 S. 339.

148) Bei Bartolocci, Bibliotheca Rabb. IV, 255 und bei R. Starrabba, *Guglielmo Raimondo Moncada ebreo convertito siciliano*, Palermo 1878, im *Archivio storico*

8. Im Sommer 1158[149]) verfasste Abraham zu London in vier Wochen für einen Schüler[150]) ein Büchelchen in 12 Capiteln über die Gebote[151]). Der Titel lautet gewöhnlich יסוד מורא *Jesod Mora*, vollständiger mit Hinzufügung von וסוד תורה, also „Grundlage der [Gottes-] Furcht und Geheimniss der Thora" (des Gesetzes). Dieser Titel bietet die bei Abraham beliebte Anspielung von יסוד und סוד[152]), einen Reim (wie schon in einer

siciliano, p. 87, im Sonderabdruck p. 76. Wäre Herr Starrabba in der Lage gewesen, die Citate in meinem Buche, Polem. und apologet. Lit. etc. 1877 S. 315 (von ihm p. 44, resp. 33, angeführt nach einer Mittheilung Amari's) weiter zu verfolgen, so würde er gefunden haben, dass bereits E. Narducci auf meine Veranlassung Mittheilungen gemacht hat über die von Moncada aus dem Arabischen des ibn Haitham [= *Alhazen*, die Identität beweist neuerdings G. Wiedemann in Poggendorff's Annalen der Physik etc. 1876, S. 656; vgl. V. Rosen, *Les Manuscrits arabes de l'Institut des langues orientales*, Petersburg 1877 S. 124 — der ebenfalls meine Nachweisungen zu Baldi nicht kennt] übersetzte Schrift: *de imaginibus coelestibus* (sie handelt von den Figuren, welche angeblich aufsteigen in den 28 Mondstationen); ferner würde er (p. 27, resp. 16) wegen der Herkunft Wilhelm's mehr als unbegründete Vermuthungen gegeben haben, da ich den Vater Nissim mit grosser Wahrscheinlichkeit in dem Besitzer von Cod. Hebr. München 246 entdeckt habe. — In der Widmung Wilhelm's (bei St. p. 86, resp. 75) liest man: „*Quis inquam est qui Ali ibn roghla* [d. i. der bekannte Astrolog vulgo *Aben Ragel*, = ibn al-Ridschal] *arabico comparari possit . . . . et si ab Hebreis petimus, an Isac* [d. i. der Arzt Isak b. Salomo Israeli, gest. 940—50] *an Abanhazra* [d. i. unser Abr. ibn Esra] . . . *Quid enim fructuosius et utilius operibus Abunasar* [lies *Abumasar*], *qui de imaginibus tam bonum opusculum reliquit.* Hier ist der bekannte Astrolog Abu Ma'aschar gemeint, dessen Namen mit dem des Abu Nasar [Alfarabi], wegen des Striches, der *m* und *n* in den latein. HSS. vertritt, leicht verwechselt wird. Eine besondere Schrift über diese Figuren ist mir nicht bekannt; doch behandelt Abu Ma'aschar dieselben in seiner grossen Einleitung (vgl. Zeitschr. für Mathematik XVI, 360, Zeitschr. d. D. M. Gesellsch. XXIV, 379, XXV, 396, 397, XXV, 420); zur Sache vgl. meine Notiz: *Intorno a Jo. de Lineriis etc.* in Boncompagni's *Bullettino* T. XII 1879, p. 352, Sonderabdr. S. 8. Auch ibn Esra spricht von diesen Figuren in seinen astrologischen Schriften.

149) Die Ungenauigkeiten bei Grätz VI, 447, XI, sind theilweise berichtigt im Magazin etc. I, 111.

150) Nach HS. bei Uri 318, und Luzzatto 114 (Berlin 244 Oct.) Josef ben Jakob, s. oben Anm. 5.

151) So im Buche selbst S. 13, daher der Titel in Cod. bei Uri 308 und in dem grossen Excerpt des Elasar Worms, im Buch von der Seele (anonym edirt Lemberg 1877), welcher Abraham החוזה („den Seher" d. h. Astronomen oder Astrologen) nennt, s. Hebr. Bibliogr. XVII, 53, XVIII, 3.

152) S. oben § 12 Excurs 1, Anm. 96, wo Zarza סוד mit „Versammlung" erklärt, wegen סוד העבור, wie auch die Schrift Abraham's über den Kalender, neben יסוד (wohl ohne Rücksicht auf die beiden Recensionen) heisst; ebenso יסוד המספר die Arithmetik (unten § 15), auch eine grammatische Schrift heisst היסוד (Hebr. Bibliogr. VIII, 29, XIII, 68, Geiger, j. Zeitschr. IV, 183); in unserem Buche Kap. 10

Schrift Abraham bar Chijja's) aber auch schon Metrum, vielleicht zum ersten Mal in hebräischen Titeln[153]). Das Büchelchen erschien zuletzt mit ziemlich treuer deutcher Uebersetzung von dem Mathematiker Dr. M. Creizenach (Vater Theodor's, — gest. 5. Aug. 1842) in Frankfurt a. M. 1840 (51 S. Text, 140 S. Uebersetzung in 16^0), ich werde mich daher hier kürzer fassen dürfen.

Einen Commentar über das ganze Buch schrieb gleichfalls der bereits unter 7 (S. 95) erwähnte Mordechai Comtino in Adrianopel. Die geometrische Stelle in Cap. 11 erläuterte Josef ben Mose Kilti, oder Kelti (?), in Griechenland, wahrscheinlich im XIV. Jahrhundert[154]).

Das Schriftchen beginnt fast wörtlich wie der Excurs zu Exod. 3, 15 in beiden Recensionen. Uns interessirt nur der Schluss des 11. Cap. („vom Geheimniss des Namens"), welches hier wiederum mit den Buchstaben beginnt. An den Buchstaben Jod knüpft sich (S. 46, deutsch S. 120) die arithmetische Behandlung, die meist uns schon Bekanntes enthält. Da 1 keine Zahl ist, so gibt es eigentlich nur 8, wovon 4 Primzahlen (ראשונים): 2, 3, 5, 7. $1 + 2^2 = 5$. $1 + 3^2 = 10$. $1 + 5^2 = 26$ etc. $1 + 7^2 = 50$ (Jubeljahr). 5 ist die Summe aller vorangehenden Primzahlen; 15 gibt das (magische) Quadrat (siehe oben unter 7). Die Quadrate der geraden Zahlen geben 120 u. s. w. Der Schlusssatz dieser arithmetischen Parthie ist der in Excurs **5.**

Es folgt nun die geometrische Erörterung (S. 47, deutsch S. 125) vom Durchmesser 10 einer Peripherie, worin ein gleichseitiges Dreieck und an den Drittheilen ein Oblongum gezeichnet wird. Das Ganze lässt sich (nach Luzzatto) in acht Sätze zerlegen, von denen der erste namentlich eine verschiedene Auffassung erhalten hat, andere verschieden begründet sind

---

S. 41 Z. 1 הסוד כי הוא יסוד, in der Version zu Anfang סודו ויוסדו. Vgl. S. Sachs, *ha-Techijja*, Berlin 1850 S. 59; Dukes, *Ginse Oxford* S. 64 zu 39; Bacher, Einleit. 62 und schon bei Abraham bar Chijja in der Einleitung zur Arithmetik, s. Hebr. Bibliogr. VIII, 88, auch in der Berliner HS. והסוד, und für חכם סודי daselbst, סודי.

153) *Jewish Literature* § 18, A. 42. Reifmann's vermeintliche Emendationen (Litbl. des Orient 1843, S. 606) sind nicht alle begründet. S. 8 hat er den Context nicht beachtet; שמים ist richtig, für ועפר lies ורוח. — Das Metrum des Titels ist das älteste und einfachste, dem arab. Redschez entsprechend. Ein anderes Metrum ergäbe die Stelle im Vorwort S. 6, wo der Artikel hinzutritt und die Wörter umgestellt sind, daher der Titel auch so angegeben wird: יסוד התורה וסוד המורא.

154) S. den Nachweis in Hebr. Bibliogr. XIX, 62. Die Pariser Hs. 707^4 enthält hinter dieser Erklärung noch andere zu verschiedenen Stellen der Commentare ibn Esra's, welche im Catalog nicht genau genug angegeben sind; die 3. gehört ohne Zweifel zu einem der Excurse zu Exodus (etwa 3, 15?), die 4. von 27 Arten der Menschen (der Catalog zweifelt, ob etwa 24!) sicher zu Ex. 23, 26, s. oben § 12 n. 3 S. 93.

von dem berühmten Professor am rabbinischen Seminar in Padua S. D. Luzzatto (gest. 29. Sept. 1865)[155]) und von dem Mathematiker Jakob Eichenbaum[156]). Letzterem folgt Creizenach in der Uebersetzung[157]) und in den eingeschalteten Deductionen, wie er ausdrücklich (S. 6) angibt. Auch Terquem[158]) entscheidet sich dafür. — Abraham berechnet für den Durchmesser 15 das Quadrat der Seite des gleichseitigen Dreiecks genau 15000, für den Durchmesser von 10 aber $987\frac{5}{9}$ und $\frac{5}{81}$,[159]) die Wurzel $31^0\ 25'\ 36''\ 50'''$. Die Zahl des Gottesnamens beträgt 72 (wie oben).

Erwähnung verdient noch der Terminus עמוד (Säule) für die abstracte Höhe (S. 47, deutsch S. 125), ohne Rücksicht auf die physische Lage, wie im Arabischen und in der „Mischna der Middot", später גובה[159b]). Für die physische Höhe, z. B. Culmination, gebraucht man רום.

§ 14.

Wir kommen nun mehr zu

B. den selbstständigen Schriften oder Monographien mathematischen Inhalts, zu welchen von vorneherein bemerkt werden muss, dass es auch in ihnen nicht an Ueberstreifen in die theologische Anwendung auf den Gottesnamen fehlt, was wohl nicht ausschliesslich auf eine individuelle Vorliebe des Verfassers zurückzuführen ist, sondern auch auf den Charakter der Zeit überhaupt und der Personen, für welche er schrieb.

Es haben sich nur zwei hebräische Schriften dieser Art erhalten. Wenn der Dichter Immanuel ben Salomo aus Rom (um 1320) in einer

---

155) Hebräisch in der Zeitschrift *Kerem Chemed*, II (1836) S. 75 ff.; vgl. seine Remonstration daselbst VII, 75 und früher in *Zion*, her. von Jost I, 116, auch deutsch (aus dem Ital. übersetzt) in den Israel. Annalen, her. von Jost 1840 S. 75, wo er die Bedeutung des conventionellen Decadensystems für die vermeintliche Eigenthümlichkeit der Zahlen hervorhebt. Danach erscheinen die weitläufigen Nachweisungen bei H. Filipowski (Jahrbuch *Assiph*, Leipzig 1859 S. 99—106) überflüssig.

156) *Kerem Chemed* IV, 113, vgl. den vorangehenden Brief von J. S. Reggio.

157) S. 131: „Die Proportion kann umgekehrt gestellt werden, wenn" u. s. w. ist falsch, wie aus den Parallelen hervorgeht; es muss heissen: „das Gegentheil findet statt, wenn" u. s. w. Creiz. schaltet ein: „damit das kleinere Glied vorangehe (!)", ohne Zweifel, weil Eichenbaum, l. c., bemerkt, dass ibn Esra das Wort ערך nur von einem Verhältniss des Kleineren zum Grösseren anwende, womit er aber nur seine eigene Vorstellung begründen will; vgl. Motot f. 19^c bei Luzzatto, *Zion* I, 117.

158) In der unten (§ 15) zu erwähnenden Abhandl. p. 294 (20 des Sonderabdr.).

159) Die bekannte Formel für zusammengesetzte Nenner aus sprachlichen Rücksichten.

159b) Z. B. bei ibn Esra selbst, Zahlwörter S. 163: „Der Körper, dessen Wesen die Höhe"

Aufzählung klassischer Schriften auch der „Bücher ibn Esra's über die Methoden des Rechnens" erwähnt[160]), so ist aus dieser Angabe des gerne überschwenglichen Satyrikers nicht auf die Bekanntschaft mit einer grösseren Zahl zu schliessen.

1. ספר האחד (*Sefer ha-Echad*) Buch des Einen, oder vom Einen, oder der Eins, unter diesem Titel citirt im Buch vom Namen (§ 13, 7—f. 9), unter beirrendem Doppeltitel zuerst gedruckt in der hebr. Zeitschrift *Jeschurun*, herausg. von Jos. Kobak, Jahrgang I. Heft 1, Bamberg 1856, mit einer Erläuterung. Der Text ist dort sehr incorrect und lückenhaft, wie ich aus der Münchener HS. 36 ersah, aus welcher ich die Varianten sammelte, die ich einem neuen Herausgeber zur Verfügung stellen wollte, da Handschriften nicht sehr selten sind[161]); auch ein Commentar des (§ 13, n. 7 und 8) erwähnten Comtino existirt; der des Josef S. del Medigo ist schwerlich vollendet[162]). Inzwischen erschien eine neue correctere Aufgabe mit sachlichen Erläuterungen 1867[163]).

Das Schriftchen, dessen Text nur einige Seiten umfasst, handelt von den Eigenthümlichkeiten der Zahlen von 1 bis 9 in 9 entsprechenden kleinen Absätzen, indem auch auf Geometrie und Astrologie (unter 3, 4, 7) Rücksicht genommen ist, wie auf die Zahl gewisser Gegenstände oder Begriffe. Wir begegnen auch in diesem systematisch geordneten Schriftchen grossentheils denselben sogar wörtlich identischen Sätzen, die wir bereits

160) Makamen, ed. Berlin f. 152[b] בדרכי החשבון.

161) Hebr. Bibliogr. 1859 S. 94 (Vat. ist 429[17]), auch Paris 770[6], 1085[4].

162) Comtino's Commentar ist in Cod. De Rossi 556[3], Paris 681[3], diese Schrift fehlt bei Gurland, *Ginse Jisrael*, Petersburg 1867, in der Aufzählung von Comtino's Schriften. — Der bekannte Arzt und Mathematiker Josef Sal. del Medigo verfasste einen wahrscheinlich verlorenen oder nicht ausgeführten Commentar (angeführt in seinen mathemat. Problemen n. 14 über das Verhältniss der Algebra zur Geometrie, nicht n. 12, wie Geiger, Melo Chofnajim S. XLVI n. 16 angiebt, noch weniger genau Benjacob, Thesaur. libr. S. 460 n. 130). Vielleicht ist er der Verf. des anon. mathemat. Fragments in Cod. Hebr. Hamburg 329[5] (S. 158 meines Katalogs), der von seinem Comm. zu unserem Buch als zu verfassendem spricht.

163) Mit lat. Titel: *Abrahami Ibn Esra Sepher ha-Echad, liber de novem numeris cardinalibus cum Simchae Pinsker interpretatione primorum quatuor numerorum. Reliquorum numerorum interpretationem et prooemium addidit M. A. Goldhardt*. 8. Odessae 1867 (III u. 70 S.). Da Pinsker vor der Beendigung des Commentars starb, so fehlt eine Angabe seiner Hilfsmittel. Er benutzt eine HS. Schorr's und eine Pariser, worin Abraham „der Babylonier" genannt wird (wohl Confusion mit dem von ibn Esra anderswo citirten Abr.); der Pariser Catalog gibt das unter beiden HSS. nicht an. — Gleich in der ersten Zeile fehlt das Wort וספור der Lemberger Ausg.; s. *Zion* I, 115. — S. 2 hat HS. München והוא מספר בכח.

aus den Excursen etc. kennen. Unter 4 (S. 45) wird eine allgemeine Regel gegeben für Berechnung der Differenz der Quadrate der Seiten eines Dreiecks, deren Maass drei aufeinander folgende Zahlen (die jedoch grösser als 4 sein müssen) ausdrücken; man subtrahirt 4 von der Mittelzahl und multiplicirt den Rest mit der Mittelzahl — z. B. 10, 11, 12 seien die Zahlen, $11 - 4 = 7 \times 11 = 77$; nämlich $12^2 + 77 = 11^2 + 10^2$.[164])

§ 15.

Wir kommen nunmehr zu einer grösseren Schrift, in welcher die Zahlkunde selbstständig behandelt, wenn auch nicht ohne alle Beimischung der Symbolik geblieben ist.

2. ספר המספר oder יסוד המספר (*ha-Mispar,* oder *Jesod ha-Mispar*) Buch (oder Grundlage) der Zahl; ich nenne es der Bequemlichkeit halber Arithmetik nach dem vorwiegenden Inhalt. Dieses Buch wurde oft verwechselt mit einem grammatischen Schriftchen, welches gewöhnlich den zweiten Titel führt, bis Luzzatto, nach seiner HS., die Verschiedenheit lehrte. Das grammatische Schriftchen, einige Blätter umfassend, behandelt die Zahlwörter in 5 Klassen oder Stufen (מעלות), nämlich Einheiten, Zehner u. s. w., ebenfalls nicht ohne alle Beziehung auf Zahlsymbolik. Es ist von S. Pinsker am Ende seiner Einleitung in das babylonisch-hebräische Punktations-System, Wien 1863, mit Commentar herausgegeben[165]). Trotz der nunmehr gebotenen Hilfsmittel ist man nicht immer in der Lage, die unvollständigen und uncorrecten Angaben der Kataloge zu ergänzen und zu berichtigen[166]).

Von dieser Arithmetik habe ich beinahe 20 HSS. in öffentlichen Bibliotheken ermittelt, nämlich:

Berlin 244 Oct. (mein Verzeichniss S. 57[13])[167]), früher Luzzatto 114, woraus letzterer einige Mittheilungen gemacht hat. Diese HS. enthält einen anonymen Commentar, wahrscheinlich von einem jüngeren Zeitgenossen

164) In positiver Weise ausgedrückt: $n^2 + (n+1)^2 = (n+2)^2 + (n+1) \times (n-3)$. Pinsker führt den Satz auf eine allgemeinere Form zurück, indem er die Mittelzahl n, die anderen $n - 1$ und $n + 1$ nennt.

165) Handschriften sind verzeichnet in Hebr. Bibliogr. 1865 S. 29; vgl. auch Geiger in *Kerem Chemed* IX, 63; Berliner, Magazin I, 95. — Ich bezeichne dieses Schriftchen als Buch der Zahlwörter und habe es mit der Abkürzung „Zahlw." citirt.

166) So z. B. wird in Catalog Aguilar bei Wolf, Bibl. Hebr. III S. 51, unser Titel mit „*Chronologia*" übersetzt, was nur für das Buch עבור passt; s. § 21.

167) Daselbst lies: *Kerem Chemed* II, 76, für VI, 46. Eine andere HS. Luzzatto's finde ich im Catalog seiner Bücher (1868) nicht.

des Mose ibn Tibbon, also in der 2. Hälfte des 13. Jahrhunderts[168]); auch einen „Zusatz" desselben Ende Cap. 2 f. 73 b.

Bodleiana, 5 HSS.: Uri 449, Pocock 280 B.[169]), Michael 201, 202, 203 (deren eine vielleicht HS. Sal. Dubno 18 in Qu.).

Florenz, Medicea Plut. 88 Cod. 28 (bei Biscioni S. 482 Ausg. in 8^0 als anonymes ספר המספרים (sic!); die Anfänge der Kapitel, welche mir Prof. F. Lasinio im Februar 1863 auf meine Anfrage mittheilte, stimmen) und daselbst Cod. 46 (bei Biscioni S. 525 von „fil Meir"; mit theils hebr., theils arab. Ziffern am Rande; nach Mittheilung Lasinio's vom Mai 1864; vgl. auch Berliner, Magazin I, 95). Eine von beiden meint de Rossi (Wörterb. S. 8).

Leeuwarden, früher Franecker (Catalog. S. 87 Cod. XVIII חכמת המספר, auch Neubauer im Letterbode herausg. v. M. Roest, II. Amst. 1876/7 S. 84, gibt nur den nackten Titel המספר).

München 43 mit Zusätzen eines Moses שואבי (Schwabe, oder *Soave*?) und eines Anonymus (vgl. unten Paris)[170]), und Nr. 150 (erworben 1865).

Paris, 5 HSS.: 1029[3] (Orat. 153), — 1049[1] (anç. f. 450, defect), — 1050[1] (a. f. 449), — 1051[1] (Orat. 157), — 1052[1] (a. f. 436) mit Zusätzen eines Deutschen, Elasar, wie die HS. Fischl 25 B.[171]). Aus Nr. 1050 allein gab der im J. 1862 verstorbene Mathematiker O. Terquem eine Analyse[172]), die manches Beachtenswerthe unberührt lässt[173]).

Rom, Vatican 386[3] (vom Widmungsgedichtchen zu Anfang die Hälfte); — 397[1], bei Assemani mit dem (vielleicht aus der Schlussstelle fabricirten) Titel תשבורת[174]), — 398[1] Fragment. Aber auch 171[14] (f. 98—106) ent-

---

168) Ob etwa von Levi b. Abraham, dem Epitomator der astrologischen Schriften? Die Schrift ist klein und blass, in trüben Tagen die Augen anstrengend, weshalb ich eine nochmalige Prüfung jetzt nicht vornehmen mag.

169) S. meinen *Conspectus Codicum Mss. hebr.* in *Bibl. Bodl.* 1857 p. 21.

170) Diese HS. ist in Geiger's wiss. Zeitschr. IV, 283 gemeint.

171) Hebr. Bibliogr. XI, 41 und dazu Hebr. B. XIX, 119, Zeitschr. d. Deutsch. Morg. Gesellsch. Bd. 25 S. 383.

172) *Notice sur un MS. hebreu etc.* 1841 (*Extrait du Journal des Mathématiques pures etc.* T. VI p. 275—96), und ungenau auszüglich im Litbl. des Orient 1845 S. 415, 492; z. B. S. 275 „hebräische" (!) Schule für *arabe*! vgl. Hebr. Biliographie 1862 S. 95).* — Vgl. *Notice sur la vie et les traxaux de O. Terquem par Prouchet*, in den *Nouv. Annales de Mathém.* 1862, Nov.—Dec.

173) Vgl. Zeitschr. d. D. Morg. Gesellsch. Bd. 24 S. 340, 382.

174) Ich verdanke dem Fürsten Boncompagni in Rom eine im J. 1866 für mich angefertigte Durchzeichnung des Anfanges (f. 3) und der letzten Seite (f. 49), auf welcher nach dem Schlusswort das Widmungsgedichtchen (s. unten), dann eine arabische Nachschrift in hebräischer Cursivschrift, wonach David ben Salomo die Schrift zum eigenen Gebrauche, לנפסה [daraus macht Assemani einen Namen אבן עקויש!] copirte und in Murcia [מרסיה, nicht Marseille, wie Assemani liest,

hält nach dem bei Assemani corrumpirten Anfang ein Fragment, wozu ein Titel „Erklärung des unausprechlichen Namens“ (פירוש שם המפורש) fabricirt ist.

Rom, Casanat. Dominicanerkloster Cod. in Qu. I, V, 11, 3, nach Auszügen aus dem handschriftl. Katalog, die ich Herrn Narducci verdanke.

Von Privaten besass Hirz Scheyer eine HS., welche Carmoly (Biogr. der Gelehrten, hebr. 1828 S. 35 n. 25 vgl. S. 38 n. 5) erwähnt, ob dieselbe, die im Katalog der Bücher und HSS. Carmoly's n. 217 mit blossem Titel *ha-Mispar*? Die HS. J. S. Reggio's (erwähnt in *Bikkure ha-Ittim* 1846 S. 48) besitzt jetzt Os. H. Schorr in Brody, eine andere S. J. Halberstamm in Bielitz (s. dessen Vorwort zu *ha-Ibbur* S. 11). Eine HS. des Buchhändlers Fischl-Hirsch in Halberstadt im J. 1870 ist in der Hebr. Bibliographie XI, 41 Nr. 25 B beschrieben.

Die Pariser HS. 1052[2] enthält eine Aufgabe über Wurzelziehen aus dem „zweiten Buch der Zahl“ von ibn Esra, was der Katalog als zweite Recension auffasst; die Bezeichnung dafür ist aber gewöhnlich eine andere. Im Einzelnen finden sich Varianten genug, doch weiss Niemand von zwei Redactionen.

De Rossi (im Catalog zu seiner HS. 314) vermengt die Zahlwörter mit dem Buch vom Einen, später (Wörterb. S. 8) letzteres mit unserer Arithmetik; Grätz (VI, 454) vermengt alle drei und macht falsche Schlüsse über die Abfassungszeit, weil im Register des Michael'schen Katalogs ein Wort fehlt, welches durch das Metrum und andere HSS. gesichert ist[175]). Im Widmungsvers nämlich, der am Anfang oder Ende des Buches steht, muss es heissen: „verfasst von dem Sohne Meïr's für Meïr, jung an Jahren und weise . . . (?)[176]); letzteres bezieht sich natürlich auf Meïr. Die Abfassungszeit der Arithmetik hat auch Halberstamm nicht näher untersucht. Ich habe bereits anderswo bemerkt, dass im Cap. 3 und 7 auf das Buch „Gründe der Tafeln“ hingewiesen sei[177]), welches ibn Esra 1160/1 in Narbonne übersetzte (s. unten § 21), so dass die Arithmetik kurz vorher verfasst scheint. Nun wird zwar letztere (ס' המספר, das B. der Zahlw. kann nicht gemeint sein) in dem Kalenderwerk (f. 4) citirt, dessen Abfassung

und daher Zunz, zur Gesch. 315 Anm. a, wo der Ort auffällig erscheint] beendete Dienstag 7. Kislew 5145 (Herbst 1384). Ueber die Confusion bei De Rossi und Grätz s. weiter unten.

175) HS. Medicea (Berliner, Magazin I, 94), Halberstamm's (l. c.), Berlin (l. c.), München 150, Vat. 397.

176) בתכונה (d. h. in Astronomie??) oder בתבונה in Einsicht (vgl. von Bezalel Exod. 36, 31); so, und in Zeile 1 תכונה, hat Vat. 397.

177) HS. Berlin hat in K. 7 sogar דברתי „habe ich gesprochen“, darüber steht allerdings הדבר „ist die Rede.“

das J. 1146/7 fällt. Aber so früh ist die Arithmetik — auf welche sich der Verf. in keiner anderen Schrift beruft, obwohl er öfter dazu Veranlassung hatte — sicher nicht verfasst; vielmehr ist diese Verweisung ein Nachtrag, wie andere Verweisungen, die Halberstamm (S. 11), gegen Grätz, mit Recht als derartige Nachträge ansieht, wenn auch Einzelnes sich anders erklären lässt (z. B. bei Brüll, Jahrbücher III, 164). Diese Ansicht erhält durch unser Schriftchen eine bedeutende Stütze.

§ 16.

Gehen wir nunmehr auf die Anlage der Arithmetik über[178]). Sie behandelt in 7 Pforten oder Kapiteln folgende Themata mit praktischer Anwendung auf die Astronomie und auf gewöhnliche Aufgaben:

1. הכפל, wörtlich *Duplatio*, Multiplication[179]), 2. חלוק Division, 3. חבור Addition, 4. חִסּוּר Subtraction, 5. שברים Brüche[180]), 6. ערכים Proportionen,

---

178) Dieser § ist vor 12 Jahren nach Luzzatto's und Terquem's Mittheilungen abgefasst und jetzt, nachdem ich drei Handschriften des Originals zu vergleichen Gelegenheit gehabt, nicht ganz umgearbeitet, aber ergänzt.

179) Auch bei Khowarezmi (*Algoritmi de num. indorum*, *Trattati d'Aritmetica pubbl. da B. Boncompagni* I, 1857, p. 10): *Etiam patefeci in libro* [welchem?] *quod necesse est omni numero qui multiplicatur in aliquo* [lies *alio?*] *quolibet numero, ut duplicetur unus ex eis secundum unitates alterius.* Hat der Uebersetzer hier dasselbe Wort verschieden übersetzt? Es sind also nicht „ungenaue Schriftsteller" (wie Nesselmann, Versuch e. krit. Gesch. d. Algebra I, 495 meint), welche כפל für multipliciren gebrauchen, wie schon Abraham bar Chijja (Hebr. Bibliogr. 1864 S. 89 A. 11) und dazu הנכפל בעצמו in *Cheschbon ha-Mahalchot* Abschn. I; המספר הנכפל פעמים die zweimal duplicirte Zahl (desselben Geometrie, HS. München 299 f. 50). Der später übliche Ausdruck für multipliciren (jedenfalls schon 1270 in der hebr. Uebersetzung des Euclid) הכה ב („in Etwas schlagen") ist ohne Zweifel dem arab. ضرب فى *(multiplicare in)* nachgeahmt — letzteres nach Wöpcke *(Mém. sur la propag. des chiffres etc.* p. 68 n. 1) vom Indischen „*frapper*, *detruire*" (?) — auch הכה על, während im Talmud הכה מן (von Etwas hauen) subtrahiren heisst, was später durch חִסֵּר (Pielform) *minuere* ersetzt wird. Von כפל im Sinne von multipliciren ist abzuleiten כמה כפלים „wie viel mal" in der Uebersetzung der Religionsphilosophie des Abr. ben David (gest. 1170) aus ungewisser Zeit, S. 4, Z. 12, und משולש בכפל — מדובע, d. h. Dreifaches, Vierfaches, bei Elia Misrachi (f. 3b), den Nesselmann von jenen angeblich „ungenauen Schriftstellern" unterscheidet, allerdings nur aus dem ins Latein übersetzten Compendium kennt; s. meine Briefe an B. Boncompagni (*Intorno ad alcuni matematici etc.* p. 54 nota 1, 65 nota 3); hiernach ist auch Güdemann, das jüd. Unterrichtswesen etc. S. 84 A. 3, zu berichtigen. Vgl. auch unten zu Ende des Buches.

180) Singular שֶׁבֶר (*Scheber*); Luzzatto (*Zion* I, 116, vgl. *Kerem Chemed* II 70, 76, VII, 75) glaubt, dass ibn Esra dasselbe Wort auch für Flächeninhalt *(area)* gebrauche; es wäre jedoch vielleicht für letzteres stets שבור *(Schibbur)* zu lesen,

7. השרשים המרובעים וכל מאזנים שלהם, Wurzeln, Quadrate und — nach der oben (Anm. 143) gegebenen Erklärung — von der Probe durch die Ziffernsumme derselben im Verhältniss zu 9. Terquem (p. 6) übersetzt diese Ueberschrift: „*Racines carrées et caractères des carrées parfaits*", jedenfalls sehr ungenau; — im Litbl. des Orients VI, 477 gar nur „von Quadratwurzeln und Quadraten". In der Analyse dieses Kapitels (p. 18) wird eine Stelle hervorgehoben, nach welcher das Quadrat von 1 und 9 dieselbe Initialziffer hat, ebenso 2 und 8, 3 und 7, aber 5 ist eine runde (kreisende) Zahl, s. oben S. 91.

Was zunächst die Anordnung der Kapitel betrifft, so hat Luzzatto (*Zion* I, 116) in Parenthese sein Befremden geäussert, dass die Multiplication und Division der einfachern Addition und Division vorangehe; man findet aber dieselbe Anordnung nicht bloss bei dem im Jahre 1202 verfassten (1228 revidirten) *Abacus* des Leonardo da Pisa (genannt Fibonacci)[181], der lange Zeit als der erste europäische Algebrist nach der Methode der Araber gegolten hat, sondern auch Aehnliches in der Rechenkunst des Abraham bar Chijja, in einem Abschnitte seiner Encyklopädie (Abr. Jud. S. 10), welche nach einer offenbaren Interpolation der Ueberschrift in zwei HSS. der bekannte Zarkali aus einem arabischen [d. h. ins Arabische übersetzten] Werke des Archimedes ins Hebräische(!) übersetzt,

---

ein *nomen actionis* der II. Form, welche dem arab. *Teksir* eben so entspräche, wie תשבורת oben Anm. 142, 174. — Richtig ist jedenfalls die Bemerkung Luzzatto's, dass מרובע *(Merubba)* bei Abraham sowohl *quadratum* als *quadruplum* bedeute, in der Mischna der Middot I, 8: ein Viertel.

181) P. 19 ed. Boncompagni, wo jedoch die Ueberschrift des III. Kap. über Addition fehlt; vgl. die Inhaltsübersicht bei Wöpcke, *Sur l'introd. de l'arithmétique Indienne*, Rome 1859 p. 60. Fibonacci (welchen Terquem nach Florenz versetzt in einem Artikel über *Vincent's Mémoire sur l'origine de nos chiffres etc.,* aus den *Archives Isr.* December 1840, deutsch im Litbl. des Orient 1841, S. 87) hat, nach dem Prolog, in seiner Jugend in der Dogana zu „Bugna" in Africa das Rechnen mit „indischen" [d. h. unseren arabischen] Ziffern gelernt, dann Aegypten, Syrien, Griechenland, Sicilien und die Provence bereist. Wenn Terquem (*Notice,* p. 22) behauptet, dass Fibonacci diese Methode zu Oran von jüdischen Kaufleuten gelernt habe, so ist mir die Quelle dafür unbekannt. Boncompagni, der Fibonacci zum Mittelpunkt seiner Studien gemacht, hat in seiner Schrift *Della vita e delle opere di Leonardo Pisano (Roma* 1852) nichts davon. Vielleicht ist jene Behauptung nur eine Conjectur Terquem's, im Zusammenhange mit einer bei ihm vorangehenden, dass jüdische Kaufleute um das XI. Jahrh. die indische Methode nach den Küsten der Berberei und von da nach Spanien und Italien eingeführt haben. Wenn Terquem andrerseits bemerkt, dass Fibonacci im XV. Kapitel „beinahe" denselben Weg einschlage wie Ibn Esra in seiner Arithmetik, so sind solche Parallelen aus gemeinschaftlichen Quellen erklärlich.

oder in Auszug gebracht hätte[182]). Diese Arithmetik zerfällt zuerst in die (allgemeine) Zahlenlehre, oder Arithmetik im klassischen Sinne des Wortes (חכמת המספר) und in die praktische Rechenkunst (חכמת החשבון = علم الحساب, die Logistik der Alten)[183]). Letztere wird auf 6 Operationen zurückgeführt: 1. חשבון מנין במנין Multiplication, 2. חלוק מנין על מנין Division (des Grösseren durch ein Kleineres), 3. לדעת (קצב[184] מנין ממנין das Verhältniss einer (kleineren) Zahl zu einer (grössern) Zahl zu wissen (indem die kleinere durch die grössere dividirt wird, also = Resolviren), 4. לפחות מנין ממנין Subtraction, 5. להשלים מנין במנין (oder תוספת חלק על חלק) Addition, 6. להשיב מנין על מנין (oder חזרת החלקים אחד אל אחד) Reduction (von Brüchen oder Theilen).

Vergleicht man hiermit einige andere alte Arithmetiken, so findet man die jetzt gewöhnliche Anordnung der sog. vier Species, und die Unterschiede beschränken sich nur auf untergeordnete Theile, nemlich die Mediation und Duplication, Verbindung der Brüche mit ganzen Zahlen; auf das Verhältniss der Elemente der Algebra zur Arithmetik wird anderswo Gelegenheit sein einzugehen. Ich beschränke mich hier auf einige für die Geschichte der indischen Rechenkunst wichtige Beispiele.

1) Muhammed b. Musa el-*Khowarezmi*, von welchem der Name „Algorismus" herkommt[185]), behandelt in dem von Boncompagni herausgegebenen Schriftchen *de numero Indorum* folgende, freilich in der Uebersetzung nicht äusserlich geschiedene oder gezählte Themata[186]): Numeration, Addition, Subtraction, Mediation, Duplication („*Duplatio*"), Multiplication, Division — Multiplication u. s. w. der Sexagesimalbrüche[187]) und Multipli-

---

182) Siehe die Nachweisungen in der Hebr. Bibliogr. V, 109 A. 4, VII, 87, Verzeichniss der hebr. Handschr. der k. Bibliothek in Berlin S. 58.

183) Vgl. darüber Nesselmann, Geschichte der Algebra I, 40. — Daher wohl zu Anfang des praktischen Schriftchens des Khowarezmi (s. oben Anm. 95) p. 2: *in alio libro arithmetice.*

184) Eine Randglosse der Münchener HS. erklärt קצב durch ערך, welches in der Geometrie des Abraham bar Chijja (s. Abr. Jud. S. 19, 20) in der ersten Definition für „Grösse" überhaupt genommen, sonst der gewöhnliche Ausdruck für Verhältniss ist. — Bei Ibn Esra ist ערך das Verhältniss des Kleineren zum Grösseren (s. oben Anm. 157). Motot (Bl. 18 a b) nennt die Verhältnisse der Zahlen zu ihren Theilen, nach den Arithmetikern (חכמי המספר), in folgender Weise: 1. ערך החלק והחלקים. 2. ערך הדמות והחלק. 3. ערך הכפל (Duplication und Multiplication, vgl. oben Anm. 179). 4. ערך הכפל והחלק (או והחלקים).

185) S. die Citate bei Narducci, *Saggio di voci ital. etc.* Roma 1858, p. 16 ff.

186) Vgl. das speciellere Summarium bei Wöpcke, *Sur l'introduction de l'arithm. Indienne etc.* p. 49.

187) Diese, für die Astronomie besonders wichtige Eintheilung behandelt

cation der gewöhnlichen Brüche, womit die HS. (oder Uebersetzung?) abbricht.

2) Von *Kuschjàr* b. Lebban etc.[188]) hat sich ein Werk erhalten, welches meines Wissens bisher ganz unbeachtet geblieben ist; es existirt freilich nur in hebräischer Sprache, und zwar übersetzt und commentirt von Schalom b. Josef ענבי[189]) in der bodleianischen HS. *Oppenh.* 272 A. Qu., unter dem Titel עיון העקרים לחשבון ההנדיים „Betrachtung der Grundlehren der Rechnung der Inder". Hier interessiren uns bloss die Ueberschriften der 12 Pforten oder Kapitel; dieselben sind: 1. צורת האותיות Form der Zeichen (Numeration), 2. תוספת מספר על מספר Addition, 3. חסרון Subtraction, 4. הכאה Multiplication, 5. במחובר מההכאה Producte, 6. חלוקה Division, 7. בעולה מהחלוק Reste, 8. בשרש Wurzel, 9. ביוצא מהשרש was aus der Wurzel hervorgeht, 10. בקעב[190]) Cubus, 11. בעולה מהקעב was aus dem Cubus hervorgeht, 12. במאזנים oder מאזני המדרגות (Probe) Rest der Ziffersumme dividirt durch 9.[191])

3) Abu Bekr Muhammed ben Abd Allah, genannt al-'Ha'ssar (der Rechner), aus unbekannter Zeit, den ich erst kürzlich ans Licht gezogen und als den von ibn Khaldun genannten Autor nachgewiesen habe[192]), verfasste ein Lehrbuch der Rechenkunst, welches im Westen in Ansehen stand. Es hat sich in der hebräischen Uebersetzung des Mose ibn Tibbon (1271) erhalten (HS. des Vatican 396, Christ Church Coll. 189 in Oxford). Ich verdanke der Freundlichkeit Boncompagni's und des Prof. Ign. Guidi in Rom das Vorwort (worin die Bedeutung der Zahl für die Erkenntniss

---

auch ibn Esra in der Arithmetik, K. 3 ff., vgl. Terquem Notice p. 10, welcher die Einführung in Europa für sehr jung (?) hält. Khowarezmi (*Algoritmus* p. 17 und daher Jo. Hisp. p. 49) führt sie als die der Inder ein, s. unten A. 202. Ueber den babylonischen Ursprung und den frühzeitigen Einfluss auf die dortigen Juden s. meine Anzeige von Günther's Studien etc. Hebr. Bibliogr. XVII, 92 A. 3.

188) Ueber diesen Autor werde ich in einer besondern kleinen Notiz handeln und will hier nur bemerken, dass bei *Hagi Khalfa* V, 475 n. 11695 das J. 357 aber III, 570 das J. 457 der Flucht angegeben ist. Mir ist keine speciellere Nachweisung über die Anlage einer sicher zwischen Khowarezmi und Kuschjar fallenden arabischen Arithmetik nach indischer Methode bekannt.

189) Vielleicht Uebersetzung von *Dactylos.* Er lebte um 1450—60, s. Hebr. Bibliogr. XVI, 103.

190) Für كعب, sonst gewöhnlich מעוקב, s. oben Anm. 117.

191) S. oben Anm. 143.

192) Hebr. Bibliogr. XIV, 41, XVII, 123; *Rectification de quelques erreurs relatives au mathématicien arabe ibn al-Banna,* in Boncompagni's *Bullettino* Juni 1877 und Sonderabdruck. — Leider ist auch das Zeitalter des Jehuda Abbas, der den 'Ha'ssar empfiehlt, nicht bekannt, s. unten § 18, A. 224.

„verborgener“ Dinge erwähnt ist) und eine Anzahl von Ueberschriften. Das Werk zerfällt in II Hauptstücke: Ganze Zahlen und Brüche; I enthält 10 Kapitel (Pforten): 1. Stufen (מדרגות, Reihen) und Namen der Zahlen, 2. über die Staubfiguren (צורות האבק)[193]) und „dessen“ [deren?] Anwendung nach den Stufen der Zahl, 3. Addition (קבוץ), 4. Subtraction (השליך), 5. Multiplication (הכאה), 6. Verhältniss (?יחס)[194]), 7. Division (חלוק), 8. אלפלג (arabisch) Mediation, 9. Duplatio (כפילה), 10. Wurzelziehen (בהגדרה בלקיחת השורש).[195]) Dieses Hauptstück beginnt mit den Namen der 12 Zahlen, 1 ist die Wurzel u. s. w., aber 2 die erste Zahl; die Staubzeichen sind 9 (der Abschreiber oder Uebersetzer hat unsere arabischen Ziffern substituirt). Das II. Hauptstück von den Brüchen zählt 72 Kapitel (deren Ueberschriften mir Hr. Guidi mittheilte)[196]) und beginnt f. 13b fast wie al-Banna (französ. von Marre p. 20), aber zuletzt (f. 41—69) folgen noch einige ungezählte. Inwieweit etwa ibn al-Banna dieses Buch benutzt habe, bedürfte einer in die Einzelheiten dringenden Untersuchung.

4) Ich reihe hieran einen der ältesten Autoren des Abendlandes, welcher die indisch-arabische Arithmetik den Christen zuführte. Johannes Sohn des David *(Abendehut* etc.), gewöhnlich Johann Hispalensis oder Hispanus genannt[197]), wahrscheinlich auch Johannes Toletanus (um 1135—

---

193) Also Gobarschrift, vgl. oben S. 79 Anm. 69 und unter II. Kap. 1 desselben Werkes.

194) Am Rand בלקיחת חשם „Entnehmung des Namens“. Ob die Multiplication durch *„Denomination“* bei ibn al-Banna, franz. von Marre p. 14?

195) Das erste Wort bedeutet „Begränzung“; damit hängt der Ausdruck נגדר für die 4 als Quadratzahl zusammen; גדר Grenze (arab. جذر) ist die Quadratwurzel, schon bei ibn Esra, s. Rosin im Magazin u. s. w. V. S. 47, 48, wo einige missverstandene Stellen danach berichtigt werden. Eine anonyme, zu Anfang defecte Arithmetik in der Bibliothek der „Talmud Thora“ in Rom, worüber mich Hr. Di Capua im Juli 1876 befragte, handelt im 2. Abschnitt von den Zahlstufen (מדרגות) im 7. von der approximativen Wurzel in ganzen Zahlen und beginnt: תדע כי כל כפל הכאת חשבון על עצמו הוא הנקרא מספר נגדר או נשרש, „Wisse, dass das Product der Multiplication einer Zahl mit sich selbst genannt wird begrenzte oder radicirte Zahl.“ Vgl. oben S. 94.

196) Diese Zahl ist vielleicht keine zufällige, vgl. Rohlf's Deutsch. Archiv für Gesch. der Medicin I (1878) S. 443.

197) Die von mir in der Zeitschr. für Mathem. XVI, 373 (wo für „Joh. algebu.“ zu lesen ist „Gebrum hispalensem“) angeführten Quellen sind theilweise unbenutzt von Leclerc, *Hist. de la médecine arabe* Paris 1877 II, 370 ff.; dazu Zeitschr. d. D. Morg. Gesellsch. Bd. 25, S. 391, 393, 413, Bd. 29 S. 163, 164, Noten zu Baldi, S. 17 und 75, 30 und 94, theilweise nicht benutzt von Wüstenfeld, Uebersetz. aus dem Arab. S. 25 ff. Vgl. auch Otto Bardenhewer, Ueber den Ursprung des . . . Buches *de causis* (mir 1879 ohne Titelblatt zugeschickt) S. 4 ff. und s. folg. Anm.

1153)[198]) liegt zur Vergleichung mit ibn Esra sehr nahe, sie waren Zeit- und Landesgenossen, ursprünglich auch Religionsgenossen — schwerlich (allerdings möglich) auch Namensvettern[199]).

Der *Liber Algorismi de practica arismetricae* des Johannes Hispalensis, wahrscheinlich eine der ersten Nachahmungen der Arithmetik des Khowarezmi im Abendlande[200]), hat in der uns vorliegenden Ausgabe Boncompagni's ebenfalls keine eigentliche Eintheilung und Kapitelzahl, und vermisst man ein Summarium der Ueberschriften, welches ich hier, so weit es zu unserem Zwecke nöthig ist, zusammenstelle[201]):

Regulae de scientia aggregandi (p. 30)
" " " *diminuendi (p. 32)*
" " " *duplandi (p. 35)*
" " " *mediandi (p. 36)*
" " " *multiplicandi (p. 38)*
" " " *dividendi (p. 41)*

---

198) V. Rose im Hermes VIII, 335, 337, 340, 343. — Ich werde eine kritische Revision des neuen, oder scheinbar neuen Materials anderswo vornehmen. Hier mag nur Ein Punkt kurz erledigt werden. Der Verf. des Commentars zu Ptolemäus' Centiloquium, Abu Dscha'fer Ahmed ist der Sohn des Jusuf ben Ibrahim ibn ed Dâje, und Verf. von Erzählungen von Aerzten und desgleichen von Astronomen; das Jahr 309 H. (bei Rose S. 340) könnte das Datum der Abfassung sein. Danach ist Wüstenfeld l. c. S. 28 und S. 60 n. 7 zu berichtigen. Die Belege und die Berichtigungen zu Zeitschr. für Math. X, 18 ff. anderswo.

199) Leclerc, l. c. II, 374 n. 6 fand in einer einzigen Handschrift des Centiloquiums (Par. 7307) „*Abraamus ben Deut*" und vermuthet darin den jüdischen Namen Johann's; Wüstenfeld, Uebers. S. 38, nimmt das auf und meint die Uebersetzung sei wohl von Johannes noch als Juden verfertigt. Für das Jahr 530 (1136) weiss Leclerc keinen andern Uebersetzer; an Plato aus Tivoli (und den Juden Abraham) dachte er nicht mehr; aber die HS. bei Rose hat Johannes Toletanus; hingegen ist „*Bereni*" bei Wüst. nicht Ptol., sondern *Battani!* — Abraham b. David aus Toledo starb als jüdischer Märtyrer 1170. Wie viele mögen so geheissen haben! Ich lege auf die einzige HS. keinen Werth. Bemerkenswerth sind die Citate eines „Johann aus Toledo" und David aus Toledo, neben Hermannus, in einer anonymen hebr. Abhandlung über das Astrolab, HS. Oppenh. 1666 Qu. der Bodleiana. Sie stammen wohl, wie vielleicht die ganze Schrift, aus lateinischen oder sonst christlichen Quellen.

200) S. 68: *Hoc idem est illud etiam quod . . . alcorismus dicere videtur.* Wöpcke, *Mém. sur la propag. des chiffres etc.* p. 155, 186, hält die Schrift Johann's für eine Paraphrase des Khowarezmi; vgl. auch Cantor, mathemat. Beitr. 275 und unten Anm. 203 und 243.

201) Schon *Chasles, Aperçu etc.* — deutsch u. d. T. Geschichte der Geometrie u. s. w. aus dem Franz. übertr. von L. A. Sohncke; Halle 1839, S. 595 — hebt die 7 Operationen hervor: Addition, Subtraction, Duplation, Mediation, Multiplication, Division und Wurzelausziehnng.

de fractionibus numerorum (p. 49)[202])
de multiplicatione fractionum (p. 51)
de divisione numerorum cum fract. etc. (p. 53)
de dispositione integrorum in aggreg. etc. (p. 54)
de fractionibus alterius denominationis (p. 56) (Brüche aller Benennungen, *alterius* ist hier im Sinne von *alius* gebraucht)
de multiplicatione fract. (p. 60)
de divisione fract. (p. 69)
de invenienda radice numerorum (p. 72), mit ähnlichen Unterabtheilungen
Excerptiones de libro qui dicitur gleba mutabilia [gebr uamucabala] (p. 112).[203])

Die indische Arithmetik, welche Sacrobosco in Versen unter dem Titel „*de Algorismo*" hinterliess, deren 9 Kapitel die Numeration, Addition, Subtraction, Mediation, Duplation, Multiplication, Division, Progression und Extraction der Wurzeln behandeln, ist nicht bloss für Christen bis ins 16. Jahrhundert massgebend gewesen, wo man anfing die Duplation und Mediation unter Multiplication und Division zu subsummiren — wie das schon ibn Esra gethan — und daher die 9 Kapitel in 7 zusammenzuziehen[204]). Duplation und Mediation hat z. B. noch Isak ben Mose aus Oriola in Aragon, vielleicht in Constantinopel, zu Anfang 16. Jahrh.[205]). Hingegen theilt Mord. Comtino (um 1450), der vorzugsweise die Schriften ibn Esra's studirte[206]), den arithmetischen Abschnitt seines handschriftlichen Werkes in 1. Addition und Subtraction, 2. Multiplication, 3. Division und

---

202) Anfang: *Licet cuius libet numeri partium denominatio possit fieri infinitis modis secundum infinitos numeros, placuit tamen Indis, denominationem suarum fractionum facere a sexaginta.* Vgl. oben Anm. 187.

203) Diese Excerpte vindicirt Chasles (*Comptes rendus* XIII, 1841, p. 502) dem Joh. Hispalensis, ohne die theilweise Entlehnung aus Khowarezmi in Abrede zu stellen; ja er beweist daraus, dass die Algebra des letzteren schon übersetzt vorlag.

204) Chasles-Sohncke S. 602.

205) HS. Paris 1095; vgl. meinen Catalog der Leydener HSS. p. 283, die Zeitschrift *il Vesillo,* Casal Monferrato 1879 S. 17, wozu eine Berichtigung folgen wird, da nach Zunz (in Geiger's Zeitschrift VI, 195) עלי weder Ali noch Eli, sondern eine abbrevirte Eulogie ist.

206) Vgl. oben §§ 13 und 14, Verz. der hebr. HSS. der k. Bibiothek in Berlin S. 27. Sein Werk findet sich auch in der Bibliothek des Herrn Lehren in Amsterdam, worüber ich Mittheilungen des Herrn van Biema in der Hebr. Bibliogr. geben werde.

Progression, 4. Verhältnisse mit einem besonderen Theil über Brüche. Sein Schüler, der bekanntere Elia Misrachi (um 1500 in Constantinopel) bemerkt in der Einleitung zu seiner gründlichen und ausführlichen Arithmetik[207]), dass „einige der Alten" (קצת מהראשונים) die Duplation und Mediation (כפול וחלוק באמצע) abgesondert behandelten, jedoch mit Unrecht, da beides „Multiplication"(!) mit 1 und $\frac{1}{2}$ sei.

An ibn Esra enger schliessen sich zwei unedirte anonyme Schriften, deren eine allerdings fast nur als ein Auszug angesehen werden dürfte. Die erste findet sich in der Bodleiana, alte deutsche HS. Oppenh. 1666 Qu. f. 46b—52b (abgebrochen). Nach den Notizen, welche ich vor mehr als 25 Jahren in Oxford gemacht, hat der Verfasser eigentlich das Buch grösstentheils zum mündlichen Gebrauch bestimmt. Seine 7 „Pforten" sind die ibn Esra's mit derselben Bezeichnung und in der 3. f. 48 heisst es sogar: „Es spricht Abraham ibn Esra der Verfasser(!). Ich fand einen Weg u. s. w.", wie HS. München 43 f. 112b. Fol. 47b gibt der Verfasser zweimal an, was sein ungenannter Lehrer von Rabbi Samuel ben R. Jehuda vernommen, der es von einem „thörichten Geistlichen" (גלח טפש) vernommen[208]).

Ein titelloses Compendium in der bereits erwähnten HS. Oppenh. 272 A. Qu. f. 59—103, von zweiter Hand ergänzt, vielleicht unvollständig, beginnt:

בשם המאיר לעולם
והוא מכל נעלם
ואין עמו העלם(!) אחל לבאר קצת דרכי החשבון בחכמת המספר והקצת
[ומקצת .l] התשבורת וכוונתי להקל בביאור תכלית האפשר אצלי למען יקל
על המעיין אשר לא הורגל.

Der Verfasser behandelt den Stoff nach den „alten" 7 Pforten (ganz so wie ibn Esra): 1. חבור, 2. חסור, 3. כפל, 4. חלוק, 5. שבר, 6. ערך, 7. שרשים; die Beispiele sind durch שאלה „Frage" bezeichnet und sehr zahlreich. Sonderbarer Weise befindet sich in demselben Codex Bl. 117—119 von derselben Hand ein Fragment einer Ergänzung oder abweichenden Recension der letzten 3 Abschnitte desselben Werkes, anfangend mit denselben 3 Reimen (jedoch 2 hinter 3) dann fortfahrend: אבאר דרכי חשבונות

---

207) Fol. 4b der vollständigen Ausg. 1534, geschildert in meinem vierten Briefe an Boncompagni (Rom 1866), vgl. auch dessen *Bulletino*, 1879 S. 350 (*Intorno a Jo. de Lineriis etc.* p. 8).

208) Hier ist sicher nicht an den provençalischen Uebersetzer aus dem Arabischen, Samuel ben Jehuda ben Meschullam (geb. 1294, vgl Catal. der hebr. HSS. in München S. 192) zu denken. Einen deutschen Copisten Samuel ben Jehuda im Jahre 1298 erwähnt Zunz, Zur Gesch. und Lit. S. 208.

השברים והערכים והשרשים עם ביאור תוצאות מקצת הכללים בדרכי חשבונותיהם וגם אזכיר קצת כללים מן התשבורת יען אשר תוצאותיהם מן השרשים und so weiter fast dieselbe Vorrede wie oben. — Zwischen beiden befindet sich ein Commentar des Meir Spira (aus Speier) über die astronomischen Tabellen (Sechsflügel) des Immanuel ben Jakob (1365, vgl. oben S. 95), weshalb die Cataloge auch unser Compendium jenem Meir beilegen[209]).

§ 17.

Betrachten wir nunmehr den Charakter der Arithmetik des ibn Esra.

Sie ist auf die „indische“ Arithmetik basirt, obwohl er die „indischen“ (arabischen) Ziffern durch hebräische ersetzt; nur das (im Hebr. nicht vorhandene) Zeichen der Null, „das Rad“ (גלגל, *circulus* bei Joh. Hispalensis) behält er bei[210]); er schlägt sogar vor, es als Zeichen für die Unbekannte (x) zu setzen[211]).

---

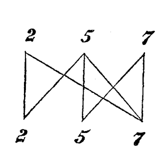
209) Dem Meir Spira wird auch ein anonymes, in verschiedenen Recensionen handschr. erhaltenes (vielleicht übersetztes?) Compendium der Himmelskunde *(forma globi)* beigelegt; Abr. Jud. S. 11 Anm. 19; s. hebr. Bibligr. IX, 163; Catalog der hebr. HSS. in München S. 13 n. 36[14], Verz. hebr. HSS. der k. Bibl. Berlin S. 92.

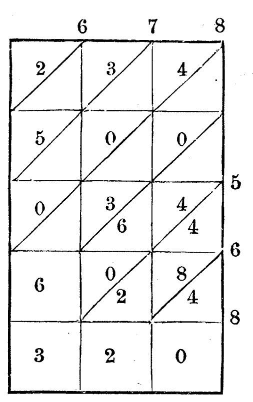
210) על כן עשו חכמי הודו כל מספרם על תשעה ועשו צורות לט׳ מספרים והם 1 2 3 4 5 6 7 8 9 [ובני ישראל די להם מאותיות התורה] א ב ג ד ה ו ז ח ט ... ואם אין לו מספר באחדים ויש לו מספר במעלה השנית שהם העשרות, ישים כדמות גלגל 0 ראשונה, להורות כי אין במעלה הראשונה מספר; so in HS. Luzz. (Berlin); anstatt der eingeklammerten Worte in HS. München 43 f. 104 ואני כתתי במקומם א׳ב׳ .... ט׳ צורת אנשי הודו (!). In der von Terquem benutzten HS. stehen die 9 Ziffern am Rande, auf welchen durch ein Zeichen im Texte verwiesen wird. Terquem (p. 4) zweifelt nicht, dass die Figuren der Ziffern ursprünglich die arabischen gewesen und von den Abschreibern durch unsere gewöhnlichen ersetzt worden; er weist auf die Vergleichung von HSS. hin, welche aber nur dann zu einem Resultate führen würde, wenn man einen Autograph auffände; denn jeder Abschreiber hat wohl die ihm geläufigen Formen substituirt. Eine sehr alte HS. wäre jedenfalls für die in neuerer Zeit vielfach behandelte Frage über den Ursprung unserer gewöhnlichen Ziffern und die Geschichte der arabischen von Interesse. In der HS. Luzzatto's sind Operationen am Rande mit arabischen Ziffern, vielleicht vom Verf. herrührend.* In der Anweisung zum Numeriren, Hs. München 150 f. 83, sehen die Ziffern 4—9 so aus: [illegible].

211) Kap. 7, bei Terquem, p. 16. — Die Null wird auch in dem Schriftchen des Khowarezmi (p. 3 ed. Boncompagni) bezeichnet als *circulus parvulus in similitudine o litterae.* Der Strich über der Null, den Terquem bemerkt hat, findet sich in vielen alten hebräischen HSS., und ist vielleicht hinzugefügt, um Null von o zu unterscheiden?* Ueber die Namen der Null s. Chasles, *Comptes rendus* XVI (1843) p. 143 und Nesselmann, Gesch. der Algebra I, 102, 495. Ibn Esra gibt den Namen *Sifra* (ספרא) als den der Landessprache (לעז), bei Terquem p. 5 ungenau *„lange étrangère“*.* Allein die ganze Schlussstelle der Ein-

Er kennt die Rechnungsprobe durch Ziffernsumme dividirt durch 9,[212]) die schon bei Khowarezmi (p. 12) und auch bei Joh. Hispalensis (p. 32, 41) vorkommt, aber nicht die Division durch Differenzen von 9, welche in den Algorithmen vorkommt, die zu seiner Zeit entstanden[213]).

Vergleicht man die Methode seiner Multiplication (bei Terq. p. 7, vgl. weiter unten) mit den vier von Woepcke zusammengestellten[214]), so ist sie etwas kürzer als die des Khowarezmi und des Abacus (bei Chasles) und steht der jetzt gewöhnlichen am nächsten, nur dass die Theilfacite gleich hinaufgetragen werden; während Fibonacci und Planudes noch weniger aufschreiben. Dies sind freilich ganz untergeordnete Vortheile des Praktikers, (und ibn Esra berührt auch die pädagogische Seite), die aber in der alten Logistik und Calculation für wichtiger gehalten wurden und daher als Anhaltspunkte für die geschichtliche Fortentwicklung zu beachten sind. Männer von Fach dürften in den Einzelheiten des Textes unter Benutzung mehrerer HSS. noch Manches finden, was Terquem nach dem damaligen Standpunkt der Geschichte der Mathematik nicht für beachtenswerth hielt; ich beschränke mich auf ein einziges, in mehrfacher Beziehung instructives Beispiel. Das Ende des 1. Kapitels bietet eine bedeutende Abweichung in den HSS. Die oben erwähnte Multiplication (Terquem p. 7) fehlt vollständig in Cod. München 43 f. 107 b, sie bildet in HS. Münch. 150 f. 87 b, 88, das Ende des Kapitels, indem nach den Worten „45 Tausende und 25“ nur folgt: „Die Probe mache, wie du weisst.“ In Cod. Berlin f. 65 folgt noch eine kurze Anweisung für die Probe; eine ausführlichere geht in beiden Münchener HSS. voran; am Rande stehen beigegebene zwei Figuren (ich setze arab. Ziffern für die hebr. Buchstaben und Null ohne Oberlinie).





Hier ist die Form des „*Casello*“[215]).

Ueber die letzte Parthie des Buches konnte Terquem (p. 20) wegen der Beschaffenheit der einzigen benutzten HS. nicht genau berichten. Es

leitung ist in der HS. Luzzatto von der Hand eingeklammert, welche die Variante notirte, die Terquem ebenfalls am Rande fand. Für ibn Esra hat auch das „Rad“ seine symbolische Bedeutung.

212) Vgl. oben Anm. 143.

213) S. Chasles, *Comptes rendus l. c.* p. 173, 235.

214) Wöpcke, *Sur l'introduction des chiffres etc.* p. 20 ff., 47.

215) Boncompagni, in *Atti dell' Accad. dei nuovi lincei* VI, 320.

mag hier das Wichtigste in Kürze ergänzt werden. Der Verfasser geht vom Wurzelzeichen zum Kreise über, weil derselbe von der Wurzel abhänge (תלוי בשורש). In demselben gebe es viele Dinge: 1. Kreis (Peripherie), 2. Diagonale, 3. Quadrat[216]), 4. Sehne, 5. Pfeil, 6. Flächeninhalt[217]); aus zweien derselben lasse sich stets das dritte Unbekannte finden; einige könne man aus einem einzigen Anderen finden (eine Variante der Berliner HS. wiederholt hier: aus zwei Anderen!). Das 1. Beispiel ist ein Diameter von 10. Zur Berechnung der Peripherie aus dem Diameter bemerkt er: Die Geometer (הכמי חמדות) nehmen das Verhältniss $^{22}/_{7}$ an, Archimedes[218]) bewies, dass es weniger als $3\,^1/_7$, mehr als 3 und 10 Theile von $70\,^1/_2$ („d. h. 8′ 24″ 35‴“); Ptolemäus nahm eine Mittelzahl, also 8′ 30″; die Inder $\frac{62838}{20000}$;[219]) zwischen letzteren beiden sei nur eine Differenz von 6‴. Nun folgt die Anwendung auf die Eintragung eines Dreiecks, die wir aus den anderen Schriften kennen, aber ohne irgend eine Hinweisung auf den Gottesnamen. In Bezug auf Bogen und Sehnen nach Ansicht der Astronomen wird, wie ich schon oben erwähnt, auf die „Gründe der Tabellen“ verwiesen und bemerkt, dass die Geometer (חכמי המדות) das Verhältniss der Peripherie genauer nehmen. Endlich erklärt er, warum die Arithmetiker (חכמי החשבון) „um Eins weniger zur Radix (יסוד) genommen haben“, — d. h. warum sie bei der Multiplication eine Reihe abziehen. Die wirklichen Zahlen 1—9 entsprechen den 9 Kreisen (עגולות, Himmelssphären — wenn er von 10 Zahlen spricht, so erinnert er an die Fingerzahl, wie das Buch Jezira), alle anderen sind ähnliche (נמשלים) und sollten erst die „Stufen“ bezeichnen, also die Zehner die 1. Stufe etc., 1000000 die 6. [die letzte, die sich mit Worten geben lässt?] bis ins Unendliche. Da man die Einheiten aber als 1. Stufe annahm, so musste man zuletzt eine abziehen, z. B. 200×300 ist $2 \times 3 = 6$, die Stufe gibt 6, davon ab eine, gibt die 5., deren Anfang 10000, also ist das Product 60000; nach eigentlicher Berechnung wäre Anfang der 4. Stufe 10000. Das Resultat ist dasselbe, „sie thaten es bloss, um es den Schülern zu erleichtern.“ Mit diesen Worten enden die vollständigen HSS.

---

216) הכפל d. h. die Multiplication mit sich selbst, Terquem liest falsch *Kafal*, und weiss es nicht zu deuten; s. oben Anm. 179.

217) חשברים, s. oben Anm. 142 und 180.

218) Der Namen ist in den HSS. verstümmelt; ibn Esra acceptirte wahrscheinlich die arabische Form ארשימידאם, welche dann von den Abschreibern modificirt wurde; s. oben Anm. 139.

219) Dies ist die richtige Zahl, nicht 62438, welche Variante nur aus Weglassung eines ח entstanden ist; vgl. oben S. 97 § 13.

In Bezug auf Terminologie ist noch hervorzuheben, dass nach Kap. 5 der Nenner מורה (Lehrer, Zeiger u. dgl.) heisst, und zwar deshalb, weil er „den geraden Weg zeige"; man könne ihn auch anders nennen.* Mehrstellige Nenner werden, wie bei den Arabern, zerlegt; die Veranlassung war zunächst eine sprachliche, es fehlt das Ordinale für zusammengesetzte Zahlen.

Diese Arithmetik ist offenbar als eine praktische Anleitung verfasst; aber der Verfasser kann sich von der Symbolik nicht ganz frei halten. Die (von Terquem übersetzte) Einleitung knüpft an das Buch *Jezira* (vgl. § 9). Zu Anfang des 2. Kap. hebt er die Bedeutung der Einheit hervor — jedoch ohne auf die Beschaffenheit des Gottesnamens einzugehen, also mit Ueberwindung seines Lieblingsthemas, wie auch gegen Ende bei der Kreisberechnung. Wenn er für seine Glaubensgenossen in christlichen Ländern auf die Einheit ein Gewicht legte, so wird das um so begreiflicher, als der abgefallene Johannes Hispalensis kurz vorher in seinem *Algorismus* Veranlassung genommen, die Trinität zu symbolisiren[220]).

§ 18.

Dass die Arithmetik Abraham's viel und lange studirt wurde, geht schon aus der grossen Zahl der erhaltenen Handschriften hervor. Die Theologen bedurften allerdings derselben nicht, da ihnen die Anwendung in den oben erwähnten Schriften und Excursen näher gelegt war. Auch seine Supercommentatoren erwähnen das Buch kaum, z. B. Leon Moscono, der bei Abraham selbst zu Levit. 26, 6 eine Verweisung darauf finden wollte, mit Unrecht[221]). Josef ben Elieser zu Gen. 4, 21 (n. 226) citirt aus Kap. 6 die Hochstellung der musikalischen Verhältnisse[222]). Desto mehr galt das Buch bei den philosophischen Pädagogen und Encyklopädikern. In der Studienordnung des Jehuda ben Samuel ben Abbas[223]),

---

220) *Liber Algorismi,* Rom 1857 pag. 127 seq., vgl. p. 128: *Numerum, cum ad instar nouenarii, tam celestia quam terrestria, tam corpora, quam spiritus, formata et ordinata esse videantur. Novem enim sunt spere etc. Sicut creature a simlitudine sui creatoris qualicumque modo non recederet, dum intra illum numerum se continent, quia primo impari in se multiplicato generant, qui post unitatem Deo solus consecratus est, quia numero Deus impare gaudet.* Vgl. Hebr. Bibliogr. VII, 88 und die Berichtigung daselbst VIII, 152.

221) Magazin etc. III, 99.

222) In Verbindung mit der vielverbreiteten Ansicht von der „Harmonie der Sphären" (Hebr. Bibliogr. XIII, 35), der auch die astrologischen Zahlverhältnisse dienen mussten.

223) Seine Worte sind ungenau übersetzt von M. Güdemann, das jüdische Unterrichtswesen u. s. w., Wien 1873, S. 251.

dessen Zeit nicht genau ermittelt ist[224]), heisst es (wörtlich nach dem Hebräischen): „Dann beginne er [der Schüler] zu lernen in einem Buche die Wissenschaft der Zahl, im Werke des Abraham ibn Esra, denn es umfasst die meisten Gegenstände der Rechenkunst, und, wenn ihm Gott dies Buch hat zugeschickt, das Werk des Ismaeliten ibn ʿHassar."

Josef Caspi aus Argentierre (Anfang des 14. Jahrh.) empfiehlt seinem 12jährigen Sohne, sobald er 14 Jahre alt sei, der Mathematik viel Zeit zu widmen, zu beginnen mit der Arithmetik des ibn Esra, dann folge Euclid, al-Fergani, das *Cheschbon ha-Mahalchot* [von Abraham b. Chijja].[225])

Schliesslich mag noch ein Gesammturtheil des Josef Salomo del Medigo erwähnt sein[226]): „Der Herr der Geheimnisse [d. h. der die Geheimnisse kennt], ein Schatz von Weisheit[227]), Abraham ibn Esra, über Zahl und Maass[228]), Astronomie und Kalenderkunde, Astrologie[229]) schrieb er viele Bücher voll von Weisheit und Gottesfurcht; sie sind übersetzt ins Lateinische und ruhmvoll erwähnt, so dass seine Methode der Construction der Häuser[230]) des Himmels und deren Eintheilung als intellectuelle und vorzügliche bezeichnet wird vor allen anderen Schriften der Alten."

§ 19.

3. Haben wir bisher unsern Autor nur in hebräischen Schriften verfolgt, so führt uns ein „Abraham" auch in die lateinische Literatur. Dem ibn Esra wird im Index des Pariser Catalogs der lateinischen HSS.

224) Hebr. Bibliogr. XIV, 39. Wenn er den ʿHassâr (oben § 16 S. 109 A. 192) nur aus der Uebersetzung kannte, so lebte er nach 1271.

225) „Testament", herausg. in der Sammelschrift *Taam Sekenim* Frankf. a. M. 1854 f. 51b.

226) Bei A. Geiger, Melo Chofnajim, Berlin 1840, hebr. S. 11. Zu Geiger's Uebersetzung S. 12 s. unten Anm. 230.

227) אוצר החכמה — ein so betiteltes Buch, nach Wolf B. H. III. S. 51 in der Oppenh. Biblioth. (bei de Rossi, Wrtb. S. 10) existirt nicht, vielleicht Verwechselung mit dem astrolog. ראשית ח׳ s. unten S. 127.

228) שיעור, d. h. Geometrie (vgl. Hebr. Bibliogr. VII, 87 und 89), worüber jedoch kein besonderes Buch bekannt ist.

229) חכמת התולדת kann hier nur Astrologie bedeuten; del Medigo hat es vielleicht irrthümlich so aufgefasst, s. oben S. 86 A. 96.

230) Geiger's Uebersetzung lässt dieses Wort weg, wahrscheinlich kannte er die technische Bedeutung nicht. Es handelt sich um das Horoscop, dessen Eigenthümlichkeit schon 1143 erkannt war (s. oben Anm. 28), welches unt. And. Schleiden hervorhob, aber ibn Esra selbst als indisch bezeichnet (Abr. Jud. S. 13). Wahrscheinlich ist Scaliger zu Manilius missverstanden bei Heilbronner (*Hist. math.* p. 486, § 453), welcher schreibt: *„ei attribuitur divisio Zodiaci in duodecim signa (!) etc"*. De Rossi (S. 3, und nach ihm viele neuere Autoren) macht ibn Esra zum Erfinder einer Dichotomie der Himmelskugel durch den Aequator, wohl

folgendes Schriftchen beigelegt: *Liber augmenti et diminutionis vocatus numeratio divinationis, ex eo quod sapientes Indi posuerunt, quem Abraham compilavit et secundum librum qui Indorum dictus est composuit.* Libri hat dieses Schriftchen aus 3 HSS. edirt, aber dabei Zweifel über die Autorschaft geäussert, ohne die Gründe für oder gegen anzudeuten[231]). Es hat aber ein allgemeineres Interesse, den Verfasser und sein Zeitalter näher zu kennen, wie sich aus dem Nachfolgenden ergeben wird.

Das lateinische Schriftchen ist in jedem Falle eine mehr oder minder treue Uebersetzung oder Bearbeitung fremden Stoffes. Wenn Abraham etwa nur eine Substitution des lateinischen Uebersetzers für Ibrahim wäre, dann könnte an einen arabischen Verfasser dieses Namens gedacht werden; ist es ein Jude, so bleibt nur die Wahl zwischen Abraham bar Chijja und unserem ibn Esra, welche beide hebräisch, nicht arabisch schrieben (oben § 7). Ersterer war nur als Dolmetscher, z. B. bei der Uebersetzung des Buches *Electiones* von ʿAli b. Aʿhmed al-Imrani („Enbrani") thätig (Barzellona 1134)[232]), wahrscheinlich auch bei einem Werke des Maslema (§ 21, 5).

Ehe ich die innern und äussern Gründe für oder gegen die Autorschaft

---

nach Basnage (*Hist. des Juifs* p. 259), nach welchem ibn Esra in der Astronomie glückliche Entdeckungen gemacht, welche die geschicktesten Mathematiker (!) gewissenlos sich aneigneten, u. dgl. sonst. Das ist Alles wissenschaftliche — Legende, zu gebrauchen für oberflächliche Apologeten.

231) Libri, *Histoire des sciences mathém. etc.* I. p. 304 (cf. p. 124). — Das Citat aus der *Jenaer Lit.-Zeit.* 1843 n. 301 bei M. Sachs (die relig. Poesie der Juden in Spanien S. 310) ist ungenau. — Sedillot, *Matériaux pour servir à l'hist. comparée des sciences mathém. etc.* I. p. 454: *„cet Abraham qui n'est autre probablement que le rabbin Abraham-aben Esra, mort en* 1174". Was Sedillot über die Sache selbst vorbringt, werde ich nicht weiter berücksichtigen, da es sich von selbst erledigt.

232) Zeitschr. für Mathem. XII, 22, XVI, 370; Zeitschr. d. D. Morg. Gesellsch. XXV, 393. Wüstenfeld, Uebersetz. S. 43, hat diesen Autor unter Plato aus Tivoli nicht aufgenommen. — In Bezug auf *Almansor* (Abr. Jud. S. 26, Noten zu Baldi S. 32, vgl. auch Hebr. Bibliogr. XI, 125 über eine Confusion bei Möhsen) nimmt Wüstenfeld *l. c.* S. 41 einen jüdischen, arabisch schreibenden Astrologen Mançur ben Abraham unter Hakam II (961—76) an, indem er bemerkt, ich habe die „Lesart al-Hakam kaum erwähnt"; s. jedoch Abr. Jud. S. 30, 9, wo auch die Lesart „filio Abenezrae". Von einem solchen Mançur habe ich in der jüdischen und arabischen Literaturgeschichte, die ich seit 35 Jahren insbesondere für arabische Literatur der Juden verfolge, keine Spur gefunden. Ich halte *Almansor* für ein noch ungelöstes Problem, welches hier nicht weiter verfolgt werden kann. — Was endlich das Centiloquium des Ptolemaeus mit dem Comm. des abu Dschaʿâfer betrifft (Abr. Jud. S. 37), so nennen Handschr. den Joh. Hispalensis oder Toletanus, s. oben S. 111 Anm. 198.

ibn Esra's auseinandersetze, mögen zuerst die Bemerkungen eines Mannes von Fach Platz finden.

Chasles[233]), welcher das Schriftchen für eine Uebersetzung aus dem Arabischen hält, äussert sich darüber: „Dieses Werk ist in mehrer Hinsicht von Werth. Zuerst ist es wesentlich verschieden von dem des Muhammed ben Musa [el-Khowarezmi]; denn es bezieht sich einzig nur auf die einfache und doppelte *Regula falsi.* Zweitens zeigt es uns, dass diese Regeln von den Indern herkommen. Man hat sie bisher den Arabern zugeschrieben, auf die Autorität des Lucas de Burgo gestützt, der sie die Regeln des *Helcatagm* [l. *Helcataym*] „*e vocabulo Arabo* nennt" u. s. w. — Ich komme hierauf weiter unten zurück. — Später äusserte sich Chasles[234]) über dieses Schriftchen folgendermassen: „Es dreht sich hauptsächlich um die sog. *regula falsi*, aber auf jede Lösung nach dieser Methode folgt eine andre nach gewöhnlicher Regel; alle Fragen sind 1. Grades mit 1 oder 2 Unbekannten, also das Ganze nicht von Bedeutung in der Geschichte der Algebra; aber es verdient erwähnt zu werden, und zeigt auch, dass die Uebersetzer des 12. Jahrh. sich vorzugsweise mit dieser Parthie der Mathematik beschäftigten. Es gehört dem 12. Jahrh. an, ob es von Ibn Esra oder *Savasorda* herrühre u. s. w."

In der That waren beide Abraham, die man sogar fälschlich zu Lehrer und Schüler gemacht[235]), Vermittler arabischer Wissenschaft für Juden in christlichen Ländern, und direct oder indirect auch für Christen. Doch scheint mir ein charakteristischer Unterschied darin zu liegen, dass b. Chijja bei seinen hebr. Arbeiten auf die specielle Erwähnung der arabischen Autoritäten weniger Werth legte und sie auch im Einzelnen weniger citirte. Abgesehen von den ganz allgemeinen Angaben griechischer Autoren über Geometrie[236]), welche vielleicht vollständig einem arabischen Autor entnommen sind, habe ich in seinen Schriften bisher fast nirgends einen arabischen Autor citirt gefunden. In seinem *Forma terrae*, welches al-Fergani benutzt zu haben scheint, wird letzterer, oder el-Battani genannt. Ibn Esra nennt in seinen grammatischen und exegetischen Schriften recht fleissig seine Vorgänger[237]); aus den mathematischen und astrologischen Schriften, wie aus der Vorrede zur Uebersetzung des Matani,

---

233) Chasles, deutsch von Sohncke, S. 567; vgl. Wöpcke, *Mém. sur la propag.* p. 180.

234) *Comptes rendus* XIII, 1841, p. 508.

235) Abr. Jud. S. 11.

236) Hebr. Bibliogr. VIII, 94; Verz. der h. HSS. Berlin S. 58.

237) Magazin u. s. w. III, 143, wo nachzutragen: Josef der Babylonier (Exod. 25, 8 kürz. Rec.), wenn nicht ein Irrthum.

lässt sich eine Reihe arabischer Autoren zusammenstellen und für die arabische Literatur selbst verwerthen. Die in der lateinischsn Uebersetzung verstümmelten Namen muss man allerdings aus den HSS. der hebr. Originale restituiren[238]).

In dem *lib. augm. etc. p. 312* wird eine „*regula infusa*“ eines Job *filii* Salomonis *divisoris* erwähnt[239]). Noch mehr spräche für ibn Esra die Erwähnung der Inder, wenn das Schriftchen nicht eine stricte Uebersetzung des Werkes eines ungenannten Arabers ist. Zwar ist Abraham nie in Indien gewesen (oben § 6), aber die Anführung von Indern gehört zu den Kennzeichen seiner Schriften, insbesondere dem Nasi gegenüber; und grade zur Zeit ibn Esra's werden die auf indischem Einfluss beruhenden Schriften der Araber in Spanien beliebt; in dieser Beziehung ist auch das *lib. augm.* ein interessantes Document. Selbst der Titel verdient besondere

---

238) Die genannte Vorrede habe ich in der Zeitschr. d. D. Morg. Gesellsch. Bd. 24 übersetzt mit Nachrichten über die darin, zum Theil auch über die in astrolog. Schriften erwähnten Autoren. Letztere werde ich anderswo erledigen.

239) Ibn, oder abu, Suleiman ist wohl ein stehender Beinamen für Hiob, أيوب (*Steinschneider,* Fremdsprachl. Elemente S. 13), und dieser vielleicht identisch mit Ejjûb al-Baʿsri bei H. Kh. IV, 398 n. 8974 (ohne Bestimmung des Zeitalters, und nur hier erwähnt, nach Index VII, 1067 n. 1538) als Verfasser von فرائض, oder Erbschaftstheilungen, welche die Araber als eine Disciplin der Mathematik betrachten (H. Kh. I, 24, II, 62 u. 63, vgl. die Schriften IV, 393 n. 8967 ff. und Ibn Khallikan bei Wöpcke, *Recherches sur plus. ouvr. etc. I*, *Rome* 1856 p. 8). Daher die Benennung *divisor*, welche eine Randbemerkung der lat. HS. (bei Libri I, 312) erklärt: „*qui res a defuncto relicta [sic] partitur, et hoc apud Arabes.*“ Offenbar ist es die, auch sonst bei Mathematikern vorkommende Bezeichnung الغرضى, z. B. H. Kh. III, 528 (VII, 751), unrichtig übersetzt: *statutorum divinorum perito* (was auch Cureton, Catal. p. 199 nota a, nicht berichtigt; ebenso in Flügel's *Diss. de arab. scriptor. graecor. interpr.* Missenae 1841, p. 33 n. 73) besser IV, 408 n. 8991 (wofür VII, 822 العرضى) u. IV, 410 Z. 3, ferner V, 21 lin. 9: *juris hereditarii gnaro;* unübersetzt bei *Pusey*, *Catal.* p. 607 zu MXLII[1], (vgl. p. 286 nota i). — Zu dieser Gattung von Schriften gehört das von mir in der Bodleiana wieder aufgefundene כתאב אלמואריה des Saadia Gaon (*Catal.* p. 2160), welches auf den ersten Anblick für ein mathematisches Werk anzusehen wäre. Die Regeln der Erbschaftstheilung boten bei verwickelten Bestimmungen Gelegenheit zu differirenden Ansichten. Auch Ibn Esra hat im 6. Kap. seiner besprochenen Arithmetik solche Fälle und erwähnt dabei die Methode der „fremden“ und der „israelitischen Weisen“ — in letzterer glaubt Terquem (l. c. p. 17) die „*logique tortueuse du Talmudiste*“ zu erkennen. Dass aber dergleichen mehr die Rechtslehre als die Mathematik angehe, bemerkt schon Rosen zu den von Muhammed b. Musa el-Khowarezmi in seiner Algebra behandelten Beispielen dieser Art (p. 91, vgl. p. 133).

Beachtung[240]). Die Araber nennen die *regula falsi* حساب الخطائين oder عمل بالكفات „die Operation mit der Wage", wegen der Figur ⌴×⌴, welche dabei in Anwendung kommt. In den mir bekannten orientalischen Quellen[241]) findet sich nur eine von diesen beiden Bezeichnungen. Welchen Ausdruck die hebräischen Arithmetiker des Mittelalters dafür gewählt haben, ist mir nicht bekannt, da es überhaupt sehr wenige elementare hebr. Rechenbücher gegeben zu haben scheint, und ich auch früher keine Veranlassung hatte, von diesem Ausdruck besonders Notiz zu nehmen. Chasles (l. c. bei Sohncke S. 567) bemerkt, dass man „in andern Werken aus derselben Zeit" jene Methode *Regula falsi,* oder *augmenti et decrementi*, „ebenso wie der Compilator Abraham" nenne, indem er das Schriftchen *Algorithmus de integris . . . cum annexis de tri, falsi aliisque regulis*, Leipzig 1507, anführt. Ich weiss nicht, ob der Ausdruck *augmenti et decrementi* in diesem Buche selbst vorkommt, und welcher Zeit dasselbe angehört — vielleicht hat Chasles anderswo, etwa in der Abhandlung über Abacus und Algorismus *(Comptes rendus* XVI, 156, 281, 1383, XVII, 143*)* dieselbe näher bestimmt. Im Abacus des *Leonardo Pisano*[242]) beginnt das XIII. Kap. *(de regulis elchatayn* p. 318*): Elchataieym quidem arabice, latine duarum falsarum posicionum regula interpretatur etc.,* später (p. 319) heisst es: *Est enim alius modus elchataym; qui (sic) regula augmenti, et diminucionis appelatur etc.*

Vollkommen entscheidende Kriterien über den sprachlichen Ursprung und die Autorschaft des Schriftchens habe ich leider nicht auffinden können.

Was zunächst die oben mitgetheilte Ueberschrift betrifft, so ist sie weder präcise und klar, noch, wie ich glaube, überhaupt von kritischem Werthe. *„Compilavit"* bezeichnet die Arbeit des Autors im Gegensatz zu der des blossen Uebersetzers[243]). Was soll aber heissen: *secundum librum*

---

240) Der Ausdruck kehrt auch im Werkchen selbst (p. 332, 357, 359, 367 etc.) wieder; es ist auch von den beiden *„lances"* die Rede, so z. B. gleich zu Anfang S. 305.

241) *Haği Khalfa* III, 62 (VII, 707), III, 142 n. 4724, V, 80 n. 10089; *Nicoll*, *Catal.* p. 287, 545; Cureton, *Catal.* p. 199; Wöpcke, *Recherches etc.* II. p. 49. — Dass die *regula falsi* von den Indern stamme, belegt schon *Nicoll*, p. 287; vgl. auch Wöpcke, *Mém. sur la propag.* p. 177, wonach *art „géométrique"* (!) bei Marre, *Talkhis* p. 16 zu berichtigen; هندسى wird in HSS. leicht aus هندى.

242) Ed. Boncompagni; vgl. auch Libri, *Hist.* II, 31.

243) Ich erinnere mich *„compilator"* für מחבר (= مؤلف) gefunden zu haben; so nennt ein zweifelhafter Autor eines im Original nicht vorhandenen

qui Indorum dictus est, composuit? Mir scheint die ganze Ueberschrift fabricirt aus dem eigentlichen Anfange (p. 305): *Hic post laudem Dei inquit: Compilavi hunc librum secundum quod sapientes Indorum adinvenerunt de numeratione divinationis . . . Ex eo igitur est etc.* Dieser Anfang selbst kann auch noch vom lateinischen Uebersetzer modificirt sein, wie im *liber Embadorum*, wo der Uebersetzer Plato sich nur an das ihn Interessirende gehalten hat.

Auch sprachliche Kriterien für den arabischen oder hebräischen Ursprung dürften schwer zu finden sein. Die Schlussapostrophe: „*Intellige!*" (z. B. S. 329)[244]) entspricht dem arab. فافهم, فاعرف, wie dem hebr. וְהָבֵן; „*Intellige et invenias*" (p. 336) entspricht allerdings genauer dem rabb. דוק ותשכח. In dem Kapitel *de cambio* (p. 363)[245]) kommen *aurei melichini* [ملكى *reali?*], *revelati* (was ich nicht zu erklären weiss) und *solidi* [= *soldi*] vor. Vielleicht führt dies *revelati* durch Rückübersetzung auf Arabisch oder Hebräisch — obwohl es auch hier möglich wäre, dass schon der Hebräer den arabischen Ausdruck übersetzt hat. Ob die Ausdrücke *oppone* (p. 336) und *restaura* (p. 363)[246]) zu irgend einem Schlusse führen, zweifle ich.

Endlich möge noch erwähnt werden, dass in dem *Capitulum donationum* (p. 329) von der Dotation der Frauen gehandelt wird; in der Algebra des Muhammed ben Musa (p. 164 bei Rosen) ist nur von der Dotation der Sklaven in Verbindung mit der Erbschaftsrechnung die Rede.

§ 20.

Der Vollständigkeit halber erwähne ich noch: **4. תחבולה** (*Tachbula*) Stratagemma, Kunstgriff, dessen sich Abraham bedient haben soll, als er sich zu Schiffe mit 15 Schülern und 15 Taugenichtsen befand und wegen des Sturmes die Hälfte, und zwar stets der 9., über Bord geworfen werden sollte. Er stellte sie so, dass immer der 9. ein Taugenichts war, nämlich

---

arabischen Commentars über das Buch *Jezira* den Verfasser (oder Redactor?) dieses Buches קובצו und מאספו (in der hebr. Uebersetzung jenes Commentars). — So hat auch Chasles, (*Comptes rendus* XIII, 515) gegen Libri nachgewiesen, dass „*edidit*" für verfassen vorkomme, also *liber Algorismi* des Joh. Hispalensis nicht eine blosse Uebersetzung sei; vgl. oben S. 111 Anm. 200.

244) Vgl. *Algorismus* des Khowarezmi ed. Boncompagni p. 13.

245) Der vorangehende Index der Kapitel stimmt in den letzten derselben nicht genau mit den Ueberschriften selbst, was auch für die Autorität der dem Index vorangehenden Ueberschrift von einiger Bedeutung ist.

246) Ueber den Sinn dieser Wörter in der Uebersetzung von الجبر والمقابلة durch *restauratio et oppositio* s. Chasles, *Comptes rendus* XIII (1841) p. 606.

4 Schüler 5 T., 2 S. 1 T., 3 S. 1 T., 1 S. 2 T., 2 S. 3 T., 1 S. 2 T., 2 S. 1 T.; dazu kommt ein Vers, dessen Anfangsbuchstaben die Zahlen angeben, wie ihn Abraham gewiss nicht geschrieben hat. Als Quelle wird ein „Memoriale der Thaten" ibn Esra's angegeben[247]). Das Kunststück, welches man als „algebraisch" zu bezeichnen pflegt, ist zuerst 1546 gedruckt, auch in Schwenter's Sammlung (1651) deutsch zu finden, von Pfeiffer lateinisch übersetzt (1665)[248]). Mit einem prosaischen Memorialsatz, der die Heiden ins Meer stürzen lässt, aber als Aufgabe die Wahl von Florinen und Groschen stellt, findet sich das Kunststück im Namen ibn Esra's in der HS. München 341[5], anonym als Vorfall zwischen Juden und Christen arabisch mit hebräischer Schrift in der Bodl. HS. bei Uri 212. Die 15 Juden werden ins Wasser geworfen in einer latein. HS. der Bodl. aus dem XVII. Jahrh.; Cod. Bern 704 enthält: *Sors cujusdam* (so) *de XX. christianis totidemque iudaeis,* anfangend: *bis duo nam niuei* (so) *praesunt et V nigelli;* ähnlich in Riese, *Anthol. latina II,* 185 *nota.* Vgl. auch „Historische und gute Schwänke des Meister Hans Sachs, herausg. von Conrad Spät", Pesth 1818 S. 40: „15 Türken und Christen". Wer möchte wohl den Ursprung solcher populär gewordener Spielereien mit Sicherheit nachweisen?

5. Da man das Schachspiel zur Mathematik zu ziehen pflegt, so bemerke ich, dass die dem Abraham beigelegten versificirten Regeln darüber höchst wahrscheinlich einer späteren Zeit angehören, s. meine Abhandlung „Schach bei den Juden" in A. van der Linde's Geschichte und Bibliographie des Schachspiels, Berlin 1873 S. 159 u. S. 195, wo ein correcter Abdruck mit genauer Uebersetzung beigegeben ist.

§ 21.

Die gegenwärtige Abhandlung hat eine solche Ausdehnung erreicht, dass es nicht mehr angeht, auch die astronomischen und astrologischen Schriften Abraham's in gleicher Weise zu behandeln; das muss einem besonderen Artikel vorbehalten bleiben. Da jedoch auf dieselben theilweise Bezug genommen ist, so mag hier eine äusserst kurz gehaltene Aufzählung mit sehr beschränkten Nachweisungen folgen, und zwar so gut es geht, in

---

247) זכרון המעשים. Ich möchte daraus nicht schliessen, dass man im Mittelalter eine besondere Schrift solchen Inhalts gekannt habe.

248) Warum Friedländer, *Comm. on Isaiah,* p. XXI, den Plan des Schiffscapitains und den Kunstgriff „ungenügend bekannt" nennt, ist mir unerfindlich; auch ist dieses Stück 1546 wahrscheinlich nur *in fugam vacui* hinter Mose b. Chabib's Schrift gedruckt und hat mit derselben nichts zu thun. Das Weitere s. in meinem Catalog. Bodl. p. 687.

chronologischer Reihenfolge, jedoch so, dass jüngere Ueberarbeitungen stets der ersten Recension angefügt sind.

1. Nativität in Beziers 1136, zweifelhaft (Abr. Jud. S. 42, u. oben S. 68).

2. Antwort auf drei chronologische Fragen an David Narboni, kurz vor 1139, von mir edirt 1847. Vgl. oben S. 68.

3. לוחות, astronomische Tabellen, vielleicht ursprünglich eine Redaction der Tabellen des Abraham bar Chijja (Abr. Jud. S. 16, 43, 44, Verz. der hebr. HSS. . . . Berlin S. 103), oder selbstständig, und zwar zuerst in Lucca (um 1145?), revidirt in Narbonne (ob etwa zur Uebersetzung des Matani?). Jehuda ha-Jisraeli, in seinen neuen Tafeln (um 1339??), in der Bodl. HS. Oppenh. 1666 Qu., geht über die toletanischen um 1^0 vor, wie Maimonides, Abr. ibn Esra, Abraham [*Sa'hib*] *esch-Schorta*, auch die „Tabellen der Geistlichen". Der „*tractatus Abrahae de tabulis planetarum*" in Cod. Arundel 377 (Brit. Mus.) ist von Abraham Sacut? Vgl. auch die Tabulae revolutionum etc. von Samuel (?), worin „dicit Abraham", Cod. Cambridge III, 302 n. 1684 (Hebr. Bibliogr. XI, 78).

4. ספר העבור *ha-Ibbur,* vom Kalender, 2. Recension Verona 1146/7, unvollständig erhalten; mit Vorwort von S. H. Halberstamm in Bielitz ed. Lyck 1874. Berichtigungen und Erläuterungen bei N. Brüll, Jahrb. III, 164 ff. — Wahrscheinlich dahin gehörende Gedächtnissreime habe ich in n. 12 einer Handschriften-Sammlung des Antiquars Schönblum in Lemberg im J. 1869 gefunden und werde sie demnächst drucken lassen.

5. כלי הנחשת über das Astrolab (bei de Rossi, Wörterb. S. 9 n. 23 und 24!) zuerst um 1145/6, in 2. Recension 1148, miserabel herausgegeben von Edelmann (Königsberg 1845), dessen vollständige Unkenntniss nachweist H. Filippowski (*Assiph,* Almanach, II, für 1850, S. 106—9). Es gibt ausserdem eine Nebenrecension.

Rodolfus Brugensis übersetzte ein Werk über das Astrolab von Maslama al-Medschriti (Commentator des Planisphärium von Ptolemäus, s. Zeitschr. d. D. Morg. Gesellsch. XVIII, 169, XXV, 402, Zeitschr. f. Mathem. XVI, 382, Noten zu Baldi S. 6 und 28, den Artikel aus Oseibia bringt Wüstenfeld, Uebersetz. S. 50), und zwar unter dem Dictat seines Lehrers Abraham (HS. Cotton, Vespas. II, *ms.* XIII f. 40b, bei Heilbronner, *Hist. mathes.* p. 295 § 214b, s. auch Rose, im Hermes VIII, 335), was Leclerc (*Hist. de la médicine arabe*, II, 433) und Wüstenfeld *l. c.* unbeachtet lassen, obwohl es nicht unwichtig ist. Ich vermuthe, dass hier Abraham bar Chijja gemeint sei, den wir als Dolmetscher des Plato aus Tivoli kennen (oben Anm. 232). Dasselbe Werk übersetzte auch Joh. Hispalensis nach Cod. Merton 259[3], s. Zeitschr. f. Mathem. XVI, 374. Wüstenfeld, Uebers. S. 33, fügt ohne weiteres Cod. Paris 7292 hinzu, über welchen ich *l. c.* Aufschluss gewünscht habe.

6. Eine Reihe astrologischer Schriften, grossentheils in 2 Recensionen 1146 und 1148. Eine Compilation von wörtlichen Auszügen — die man daher für Schriften des Abraham hielt — machte Levi ben Abraham gegen Ende des XIII. Jahrh. (vgl. Abr. Jud. S. 44); Commentare des Messer Leon (Jehudà ben Jechiel in Italien, um 1450—90) besitzt Petersburg. — Chajjim aus Briviesca studirte sie gegen Ende des XIV. Jahrh. in Salamanka (Letterbode II, 87, 88, vgl. Hebr. Bibliogr. XVII, 62). Ein Jude Hagins (d. h. Chajjim)[249]) übersetzte sie im Hause des Henricus Bates in Mecheln 1273 ins Französische, auch den Namen „ibn Esra" in *maistre de aide*, daraus wurde lateinisch *magister adjutorii* (Opera f. 31 c) und *adjutor*, daraus ohne Zweifel wieder *additor* in einer Wiener HS. (Tabulae IV, 125 n. 5442[9,13]), während in Spanien ibn Esra in den bekannten Namen ibn Zohar verwandelt wurde. Henricus Bates übersetzte daraus das Buch *de mundo* in Liège und beendete es 1281 in Mecheln (nach der Ausgabe); eine Leipziger HS. (bei Feller S. 327) versetzt Bates nach Fez (!) und substituirt 1292 (wegen Petrus? s. unten); ersteres möchte Wolf (B. H. III p. 51) auf die benutzte hebräische HS. beziehen — die vermittelnde französische war ihm unbekannt. — Sollte etwa für *„Leodio"* Paris gelesen sein? etwa wegen der Identität mit dem pariser Kanzler?[250]) Im J. 1293 redigirte Petrus d'Abano (*Aponensis*) aus Padua die meisten übrigen Bücher (Opera ed. 1507 f. 31 c) nach der Recension v. J. 1148, und so verbreitete sich in unzähligen Abschriften die Kenntniss und das Ansehen des Verf., dessen Name bis zu *Avenare* verstümmelt wurde, auch durch Uebersetzungen in alle Sprachen, ja es ist vielleicht sogar eine arabische gemacht worden (s. oben § 7, 4). Eine, wie es scheint, theilweise abweichende spanische Uebersetzung einiger Bücher (Rodriguez de Castro, Bibl. Españ. I. p. 25, 26) ist wiederum lateinisch von dem Spanier Ludovicus de Angulo übersetzt (Wolf, Bibl. Hebr. I, p. 83, jetzt Cod. Paris 734[2]). Vgl. auch unten zu IV. — Die latein. Uebersetzung des Petrus mit Einschiebung der des Bates ist in Venedig 1507 gedruckt als *Abrahe Avenaris . . . in re judiciali opera*; vgl. Catal. Bodl. 687 u. Add.

Ein genaueres Studium der hebr. Handschriften allein vermag zur Be-

249) S. Hebr. Bibliogr. XVIII, 130 und die in H. B. XVII, 104 angeführten Quellen, insbesondere den Artikel *„Hagins le Juif"* von P. Paris in der *Hist. Lit. de la France* XI, 499 ff., der nicht von Irrthümern frei ist. Die von ihm besprochene HS. ist das angebl. Buch *„de la sphere par maitre Deiade"* (sic), welches ich im Art. Abr. Jud. S. 12 erwähnt habe.

250) S. über Bates meine Nachweisungen in Catal. Bodl. p. 1038 und Add., berichtigt in Zeitschr. D. M. Gesellsch. XVIII, 190, XXIV, 371 u. XXV, 417 über die im J. 1274 verfasste *magistralis compositio astrolabii*, welche mit ibn Esra zu vergleichen wäre. Vgl. auch Baldi, *Cronica* p. 81.

seitigung unzähliger Missverständnisse und Irrthümer bei den Bibliographen und Catalogisten zu führen. Hier genüge eine Aufzählung der hebr. und latein. Titel ohne Rücksicht auf die verschiedenen Recensionen, die von den meisten noch vorhanden sind.

Der allgemeine Titel חקות השמים ist wahrscheinlich unecht, noch sicherer אוצרות חכמה (Catalog der HSS. Carmoly S. 57 N. 104 B, wohl Confusion mit אוצר oben S. 118 A. 227).

I. ראשית חכמה *Initium Sapientiae*, oder *Introductio.*

II. משפטי המזלות, auch als ס' המזלות (Buch der Gestirne), unübersetzt, scheint eine Nebenrecension von III. Einen Theil bilden ניהוגים (Leitungen, was als Titel eines Buches vorkommt; vgl. Handschr. des Rabbiners Wallerstein in Rzeszow, aufgenommen in meinem Verzeichniss der Handschr. des Buchhändlers Benzian 1859 N. 5. F).

III. הטעמים *Lib. Rationum.*

IV. מולדות *Nativitatum;* in der abweichenden Recension, welche lateinisch 1485 etc. erschienen ist (s. Boncompagni, *Della vita ecc. di Guido Bonatti* 1851, p. 135, 136) liest man (fol. c. 2 verso): *In tempore autem hoc 1154 ab incarnatione etc.* Mehr in Zeitschr. D. M. Gesellsch. XXIV, 341, übersehen von Wüstenfeld, Uebers. S. 83; vgl. oben S. 74 A. 51 über eine etwaige arab. Uebersetzung.

V. מבחרים *Electiones.*

VI. שאלות *Interrogationes.*

VII. מאורות *Luminaria.*

VIII. העולם ... מחברות המשרתים *de Mundo et conjunctionibus planetarum.*

7. Uebersetzung von Maschallah's Schriften שאלות *Interrogationes* und בקדרות *de eclipsibus,* welche man meist mit den astrologischen VIII Büchern verbunden findet.

8. אגרת השבת Brief des Sabbat an den Verfasser, verf. 1158 in London, gedruckt; vgl. oben S. 69 Anm. 30.

9. Uebersetzung des Buches: „Gründe der Tabellen des *Khowaresmi* von al-Matani“ (? ein noch unbekannter Araber), Narbonne 1160, mit einer interessanten Einleitung, welche ich in Zeitschr. D. M. Gesellsch. Bd. XXIV mit deutscher Uebersetzung meiner Abhandl. „Zur Geschichte der Uebersetzungen aus dem Indischen ins Arabische“ einverleibt habe; Nachträge dazu finden sich in Bd. XXV.

10. Horoscop eines Kindes, Narbonne 1160, gewöhnlich zwischen den astrolog. Schriften zu finden. Excerpte daraus gab ich 1847 nach einer Dresdener HS., Einiges habe ich später berichtigt.

Der Vollständigkeit halber erwähne ich noch der „*Introductio in Al-*

chorismum a magistro A. composita", welche Chasles dem Abraham Savasorda beilegt (Zeitschr. D. M. Gesellsch. XXV, 393 zu 124 A. 11), ohne ausreichende Begründung.

Ein grosses und kleines Buch סולם המזלות „Leiter der Gestirne", wird in verdächtiger Quelle (oben S. 62 Anm. 6) dem Abraham beigelegt. In der Turiner falsch gebundenen HS. (Peyron l. citando S. 108) geht es anonym dem Astrolab (oben Nr. 5) voran.

Nachtrag.

(Juni 1880.)

S. 64 Anm. 11 und S. 81 A. 73. Benjacob, Thesaurus S. 417 N. 276: סוד (ungenau), denkt an Jesod Mora.

S. 69 A. 28. Für die Verbindung Narbonne's mit Spanien um dieselbe Zeit ist anzuführen, dass Jehuda ibn Gajjath aus Granada wahrscheinlich um 1130—40 dort war (Katalog der hebr. HSS. in Hamburg S. 66).

S. 75 A. 53, s. Benjacob S. 133 n. 216.

S. 76 A. 58. Dass die Turiner HS. (bei Bern. Peyron, *Codices hebr... Biblioth... Turin.* — Turin 1880 S. 227 n. 213) einen Commentar des Avicenna zu *'Hai b. Mekiz* enthalte, ist trotz der so lautenden Nachschrift unglaublich. Die HS. bedarf näherer Untersuchung.

S. 77 A. 63. Die Weisen Griechenlands nennt Abraham zu Exod. 12, 1.

S. 81 A. 73. תמונת האותיות nach Sabbatai, bei Benjacob S. 655 N. 629 (vgl. N. 625) ist dieselbe HS. Vatic. 405[7] bei Wolf I S. 80 mit hinzugesetztem סוד, nämlich das (edirte) kabbal. *Temuna.*

S. 86 A. 94 בעלי התולדת zu Psalm 46 (Zunz, Ges. Schr. III, 61 A. 33).

S. 90 A. 112. Ueber הן (Num. 23[9]) wird im Midrasch Exod. Kap. 15 (f. 100 Col. 2 ed. Frankf.) bemerkt, dass 8 Ziffern paarweise 10 geben (1 + 9 etc.), nur 5 sei isolirt. — S. 92 Z. 1 Diagonale lies Diameter.

S. 97 A. 142 חבריאתא hat Chananel (in Kairowan, Anf. XI. Jahrh., bei Berliner, *Migdol Chananel* S. XXV), dafür תשבורת (das. S. 38).

S. 104 A. 172. Nachdem diese Abhandlung im Satz vollendet war, gelangte ich zur Ansicht des 1. Artikels von Leon Rodet: *Sur les notations numériques et algébriques antérieurement au XVI[e] siècle. A propos d'un manuscrit de l'Arithmétique d'Aben-Ezra*, in den *Actes de la Société philologique*, T. VIII, fasc. 1. année 1878 (Paris 1879) S. 1—25 (ein zweiter scheint noch nicht gedruckt). Der Verf. kennt Terquem's Notiz nicht und legt die HS. Paris 1052 zu Grunde, aus der er ein Facsimile und Proben giebt. Er sucht zu beweisen, dass Abraham zuerst die hebr. Buchstaben mit Positionswerth anwende und Autor der Operationstabellen sei (S. 13). Das Zeichen ō leitet Wöpcke (bei Rodet S. 9) von *οὐδεν* ab, also ist die Linie wohl ein Abkürzungszeichen? Die Probe durch 9 scheinen die Araber von den Indern abzuleiten; sie findet sich aber in den bekannten Quellen nicht (S. 15). Eine Analogie eines viertheiligen Quadrats für die Verhältnisse mit unseren Determinanten wird hervorgehoben (S. 22). מורה (oben S. 117) wird (S. 25) ungenau *„norme"* wiedergegeben; es ist nicht eine Abstractform, sondern ein *partic. activi.* — Man sieht, dass das Büchlein wirklich noch nicht ausgebeutet ist.

S. 114 Ende § 16. Eine anonyme Arithmetik in Turin (bei Peyron l. c. S. 193 N. 181) in 2 Theilen, Th. 2 in 6 Pforten, beginnt mit einem Vorwort: „Wisse, die Weisen verglichen Gott in der Welt der separaten Intellecte mit der Eins in der Zahl."

Daselbst A. 211. „סיפרא das ist ein Rad", bei Elia Baschiatschi, *Adderet Eliahu* f. 11[d] unten ed. Gosloff.

S. 122 Z. 1. Bei Gurtand, Beschreib. der mathemat.... hebr. Handschr. der Firkowitz'schen Sammlung, Petersb. 1866 S. 34: „Regel de Tri" (!) hebr. דרך המתנגדים, d. h. „Weg der Entgegengesetzten".

PROLOGUS

N. OCREATI IN HELCEPH AD ADELARDUM

BATENSEM MAGISTRUM SUUM.

FRAGMENT SUR LA MULTIPLICATION ET LA DIVISION

PUBLIÉ POUR LA PREMIÈRE FOIS

PAR

M. CHARLES HENRY.

Le manuscrit auquel est emprunté le morceau que nous éditons est signalé ainsi dans le Catalogue des manuscrits de la Bibliothèque royale: „VI M DCXXVI. Codex membranaceus olim Baluzianus. Ibi continentur 1. L. Annaei Senecae libri duo de Clementia ad Neronem Caesarem; 2. Ejusdem libri septem de beneficiis ad Ebutium Liberalem, amicum suum; 3. N. OCreati liber de multiplicatione et divisione numerorum ad Adelardum Bathoniensem magistrum suum. Is codex decimo tertio saeculo videtur exaratus“[1]).

Il est composé de 87 feuillets numérotés 1—87, précédés et suivis d'un feuillet de garde. Le Prologus occupe les folios 84—87.

Ce manuscrit est encore signalé par Jourdain dans les lignes suivantes de ses Recherches sur les traductions d'Aristote au moyen-âge: „Il existe en effet à la Bibliothèque royale un abrégé d'un ouvrage arabe sur les nombres entrepris à sa prière et que l'auteur, un certain O'Creat, écrivain inconnu à tous les biographes anglais que nous avons consultés lui a dédiés comme à son ami et à son maître“[2]). Jourdain a même publié dans une note les premières lignes de ce document[3]).

Augurant de ces passages l'importance du traité d'O'Creat, M. Maurice Cantor adressa le 22 Août 1879 à M. Léon Rodet, qui voulut bien nous transmettre la demande, une lettre dans laquelle il le priait de vouloir bien examiner ce fragment.

Les prévisions de M. Cantor furent parfaitement justifiées; non seulement cet écrit avait le prix d'être le seul extrait qu'on possède d'un traité arabe sur la multiplication et la division; en considérant une sorte de multiplication complémentaire comme une application d'une règle de Nicomaque (évidente sous la forme algébrique) „$a^2 = (a-b)(a+b) + b^2$“ l'auteur faisait un rapprochement du plus haut intérêt historique.

Malheureusement les renseignements sur O'Creat sont nuls.

En s'en tenant aux données les plus positives, on doit placer l'existence d'Adélard de Bath dans le trente premières années du XII[e] siècle. Il voyagea beaucoup en Allemagne, en Italie, en Espagne, même en Egypte et en Arabie. On cite parmi ses travaux un traité de l'Astrolabe, une doctrine de l'Abaque, une traduction des tables Kharizmiennes et la célèbre version

1) Catalogus codicum manuscriptorum Bibliothecae regiae pars tertia tomus quartus Parisiis MDCCXLIV p. 263.

2) p. 99.

3) p. 99, note 1.

arabe-latine des Eléments d'Euclide dont va s'occuper ici même Mr. Weissenborn dans un mémoire imprimé à la suite de notre travail.

Quant à Helceph, M. Rodet conjecture que ce mot ne désigne pas un nom propre, mais le mot القيف alqeyf, examen, étude, discussion, recherche approfondie, peut être le commencement d'un titre tel que *„El-qeyf fî'l'-ilm el-hissâb* „Recherche sur la science du calcul". D'une part nous n'avons trouvé aucun personnage de ce nom; d'autre part les étranges défigurations que les Occidentaux ont fait subir aux mots arabes rendent cette explication vraisemblable.

Prologus N. Ocreati in Helceph ad Adelardum Batensem magistrum suum.

Virtus amicitiae inter eos qui ejus habitu inficiuntur hanc legem constituit ut alterutro praecipiente alter parere non pigritetur. Iussus igitur ab amico immo a domino et magistro festino aggredi Helcep Sarracenicum tractare de multiplicatione scilicet numerorum et divisione, nec non etiam de multiplicatione proportionum quae nonnisi per numeros investigantur, licet non omnes in numeris reperiantur. Cujus quidem compendium ingenio vestro placiturum non ambigo, si dominus dedit proferre prout dedit intelligere. Cujus quidem invocato nomine vel auxilio piè presumitur quod sine eo temere auderetur, in quo omnes thesauri sapientiae et scientiae ascunditi; qui sit benedictus in secula. Amen.

Textus.

Ordines igitur numerorum sive limites a primis numeris qui digiti vocantur et sunt IX per decuplos in infinitum procedunt. Sunt autem in unoquoque limite numerorum novem termini, nec plures inveniri vel excogitari possunt. Unde ut opinor novenarium coelestium spirituum ordinem auctor omnium mutuatus est. Omnes autem qui sunt in caeteris limitibus, praeter primum, articuli solent appellari: ut sit primus limes ab I usque ad X, secundus vero a X perprimorum per decuplos primorum digitorum usque ad C; tertius vero a C usque ad mille per decuplos secundorum et sic de caeteris, verbi gratia; prima unitas videlicet primi limitis principium est I, primus binarius II; primus ternarius III; primus quaternarius, IIII[1]); primus quinarius V; primus senarius VI; primus septenarius VII; primus octonarius

---

1) Pour l'importance au point de vue de l'histoire des mathématiques de cette variété et des variétés analogues de chiffres nous nous permettons de renvoyer à notre travail Sur l'origine de la Convention dite de Descartes (Revue Archéologique, Avril 1878).

VIII; primus novenarius IX. Ecce assignavi primum ordinem numerorum; secunda autem unitas, quae est secundi limitis principium, est X et in eodem limite sunt caeteri numeri qui sunt primorum decupli scilicet XX, XXX, XL, L, LX, LXX, LXXX, XC tertia unitas C, quarta unitas mille, Quinta unitas X idem[1]), sexta unitas C idem, [2])septima unitas $\overline{\text{m m}}$, [3])octava unitas decies mille millia, [4])nona unitas millies mille millia.[5]) Sed et reliquos numeros quota fuerint, ipsa unitas totos assignabit, ipsos praecedentis quidem limitis decuplos. Placuit igitur ad evidentiam ordinis praedictos cum suis novenis terminis sub notare | ut quotus sit unusquisque numerus locus designet, f° 84 verso ut in secundo loco scriptus secundus binarius I. X X accipiatur et sic de ceteris deorsum dispositi deduplicatione. Sinistrorsum vero naturali multiplicatione a prima specie multiplicitatis quae est decupla usque ad octavam.

IX	VIII	VII	VI	V	IIII	III	II	I	
Nonaginta	Octoginta	Septuaginta	Sexaginta	Quinquaginta	Quadraginta	Triginta	Viginti	Decem	
IX	VIII	VII	VI	V	IIII	III	II	I	decem
IX	VIII	VII	VI	V	IIII	III	II	I	centum
IX	VIII	VII	VI	V	IIII	III	II	I	mille
IX	VIII	VII	VI	V	IIII	III	II	I	X milia
IX	VIII	VII	VI	V	IIII	III	II	I	C milia
IX	VIII	VII	VI	V	IIII	III	II	I	M. milia
IX	VIII	VII	VI	V	IIII	III	II	I	Xes M. milia
IX	VIII	VII	VI	V	IIII	III	II	I	Ces M. milia
IX	VIII	VII	VI	V	IIII	III	II	I	Mes M. milia

[N]unc dicendum est qui proveniat exductu cujuslibet terminorum primi ordinis ducti in semetipsum aut ex quolibet uno in quemlibet alium ejusdem

1) x. z. c. a. d. les dizaines de milles. 2) c. z. 3) $\overline{\text{M. M.}}$ 4) cg. lc. ia. x. m. m.
5) M. M. m. il faut lire centies.

limitis ducto. [I]gitur cujuslibet termini infra X supra sub duplum ejus constituti quere differentiam quam habet ad X et eandem subtrahe ab eo quem ducis in se, intra reliquum et X medius erit arithmetica medietate. Itaque secundum regulam Nichomachi quod ex duobus extremis in alterutram et ex duabus differentiis invicem ductis provenit hoc ex ipso medio ducto in se; verbi gratia novies novem quot sint interrogatus respondeo octies X et semel unum sumo enim differentiam quam habet IX ad XI[1]) et eam demo de IX et relinquuntur VIII, ecce arithmetica medietas VIII, IX, X. Ergo duo extrema sunt VIII et X tanto minus continentur quia medium ex se provocat quantum duae differentiae sunt unum et unum. Simili ratione interroganti quantum est octies VIII respondeo sexies, X cum bis binis at f° 85 v. vero septies VII est quater X cum ter ternis per eamdem | regulam Nichomachi quod septem est medius inter IIII et X, sunt differentiae tres et tres. Eadem quoque ratione sexies VI sunt bis X cum quater quaternis. Jamvero ex solo usu VIes V sunt XXX, quater quatuor sunt XVI; ter terni sunt IX; bis bini sunt IV; semel unum I est. Hunc (sic) descendamus ad secundum ordinem ubi per geometricam medietatem perpenditur quod in primo limite per arimeticam scilicet unius saltus. Non enim solum per centum ab ultimo usque ad suduplum perpenditur quantum quisque ex se producat scilicet I[2]) usque X vel unum decies qui est secundi ordinis principium ex arte quia X proportionnaliter est inter unum et centum.

Ergo semel C tantumdem est quantum decies X similiter investigandum est quantum producat ex se quilibet terminus secundi ordinis, considero enim quomodo terminus de quo quaeritur se habet ad C. et quisnam ad eum similiter se habeat. Qui autem sub eodem et centum continetur contra interrogationem respondeo: Verbi gratia Interrogatus quantum est vigies viginti dico quadringinti qui numerus continetur sub IIII et C inter quos XX proportionnaliter continetur. Scilicet etiam triginta inter IX et C; at vero inter quadraginta XVI et C. Sed quinquaginta inter XXV et C; LX vero cum sunt tres quintae centenarii proportionaliter continetur inter suas partes quintas quae sunt XXXVI et centum. Septuaginta cum sint septem decimae partes centenarii proportionaliter continetur inter suas VII decimas partes quae sunt XLIX et centum. At vero LXXX cum sunt quatuor quintae[3]) quae sunt centenarii proportionaliter continetur inter suas quatuor et quintas quae sunt quintas XVI . I . LXIV et centum; nonaginta vero cum sit IX decimae in numero C proportionaliter continetur inter novies IX . I . LXXXI et C. Pariter ergo quantum ex se producat quilibet terminus secundi limitis ex decimo nono theoremate septimi libri

1) Entre la ligne on lit unum. 2) ʒ. 3) quatuor $\overset{e}{V}$.

Euclidis. Similis ratio est etiam in caeteris ordinibus. Unum igitur ostensum est quantum producat quisque ductus in se; restat ostendere quantum producat quisque in alterum ductus sui ordinis. Dico ergo quod omnis minor terminus cujus limitis in majorem ejusdem ordinis tantumdem producit quantum continetur sub ipso minore et principio sequentis ordinis subtracto; Eo quidem continetur sub eodem minore et differentia majoris et ipsius principium sequentis ordinis. Verbi gratia septies IX est septies X septies I minus. Similiter sexies IX est sexies X sexies uno minus. Vel aliter. Quisquis in alium tantum producit quantum in se | et in ipsorum differentiam. Verbi gratia septies IX tantumdem est septies septem et septies II. Est etiam inveniri qui ad minorem sic se habent ut maior ad principem; sic enim vocamus principium sequentium limitum. Erit igitur ibi quod continetur sub extremis haec sub ipsis contineri. Sic est enim in omnibus IIII terminis proportionalibus. Verbi gratia: quinquies sex sunt ter X quum tres ad V sic se habent ut sex ad X. Simili ratione decies XXX sunt CCC quum ut tres ad X sic XXX ad C scilicet quadragies LX sunt CCCC vigies qui sunt $\overline{\text{II}}$ et CCCC quum sicut XX IIII se habent ad XL sic LX ad C scilicet quia haec et his similia sunt quaedam quasi anximata (sic) et ad artem propositam minus respicientia attingimur ad ipsam cominus adgrediendam.

f° 85 v.

Cum igitur voluerimus aliquot numeros sive duos sive quotlibet ut per se ipsos vel per alios totidem aut etiam per plurimos sive per pauciores multiplicare etiam ipsos. Multiplicandos scribemus in locis diversis singulos in singulis sinistrorsum dispositis ut de quoto ordine quisque fuerit, totum locum teneat. Quod si non fuerint in ipsis multiplicandis numeri qui loca primā optineant (sic) ponatur[1]) pro eis qui defuerint signum cyfre ad locum vacuum designandum ut si multiplicandi fuerint . $\overline{\text{I}}$. CC cum eos oporteat quarttum (sic) et tercium locum tenere eo quod $\overline{\text{I}}$ de quarto, CC vero de tertio ordine sint. Idcireo secundum locum et primum obtinebunt due cyfre hoc modo $\overline{\text{I}}$ $\overline{\text{CC}}$ 00[2]) vel si XXII mille tertium locum habebit cifre hoc modo I 0 II . I . In hac igitur dispositione quotum locum teneat quisque tota est unitas vel totus binarius et sic de ceteris. Proponatur igitur quod primum duo numeri multiplicandi sunt per semetipsos XXX . III . et scribantur in primo quodam loco primus ternarius. In secundo loco secundus ternarius III et III dein minimum multiplicantium sub maximo multaplicandorum (sic) hoc modo. Juxta

		III	III
III	III		

1) Ecrit deux fois: la seconde fois barré.
2) Le signe du zéro est le suivant τ.

hanc regulam in omni multiplicatione minimus sub maximo ponendus est scilicet et caeteri quotquot fuerint multiplicantes sinistrorsum disponuntur, in totis locis singuli quotorum ordinum fuerint. Ita videlicet ut quemadmodum supra dictum est, cyfre si opus fuit vacuum locum designet. Ducendus est ergo f° 86 finistimus superioris ordinis | in finistimum inferioris quisque in quosque scilicet nonnisi nominibus digitorum licet ipsi sint articuli ut terterni. Si ergo digitus inde excreverit supra illum inferioris ordinis unum oritur in superiori ordine ponetur. Quod si articulus ultimus non supra illum, scilicet nec ibi remanebit si articuli nascuntur ex invento et apposito. Juxta hanc regulam digitus de quo nascitur supra eum ponitur vel in qua superiori nascitur ibidem remanet. Si nasceretur articulus, scriberetur ulterius est ita hic[1])

	III		
III	III	III	
IX	IX		
III	VII		III

id est igitur quomodo disposui XXXIII quos cum vellem ducere sinaphi posui minorem sub majori I ita sub XXX dein a sinistris ipsius ternarii inferioris scripsi XXX XIXXX[1]) in XXX sub nominibus digitorum fatiendo terterna I IX ducerem IX scripsi sub secundum ternarium inferioris ordinis, Dein secundum ternarium superioris ordininis (sic) in primum ternarium inferioris sub nominibus digitorum ut secundum quod exigit ars Helcep; scripsi IX rursus supra primum ternarium inferioris ordinis ut patet in secunda formula. In tertia formula scripsi tria sub tribus scilicet minimum sub maximo in quo non est maior ducendus cum ipse solus restet scripsi in qua et (a) sinistris ejus ita ut tertia formula monstrat. Cum ergo ter tria facient novem et

		III	III
III		III	
IX		IX	III
III		III	
IX		IX	III
		III	III
τ.	τ.	VIII	IX
		III	III

IX vel cum IX et IX facient XVIII reliqui digitum I VIII insunt ejus unus ortus fuerat tulique cogitatione XX articulum ad IX ultimus uti regula exigit ad tertium locum et tertiae formulae invenique ibi IX natoque est articulus ex invento et addito. Scripta ergo ī unitate ulterius in quarto loco ibi idem in tertio loco scripsi cyfre. Rursus ter tria multiplicans produxi IX quod scripsi in primo loco quartae formulae.

Habes igitur quod provenit ex XXXIII ductis in se Ī . O VIII . IX quod ita esse divisione probetur. Si enim cum divisero mille LXXX . IX . per XXXIII exierit mi in denviationibus (sic) XXXIII recte multiplicatum cognoscam fuisse; age ergo scribantur M . O . VIII . IX ponaturque sic in

---

1) Hic au dessus de la ligne.

omni divisione faciendum est maximus sub maximo si inde detrahi possit nominibus digitorum alioquin ponatur dexterius scilicet ceteri sub caeteris dextrorsum disponantur hoc modo:

f° 86 v°

Nunc ergo quibus ternarius nonpoterat ab unitate prima detrahi positus est sub cyfre ut a secunda unitate detrahatur subtrahatur ergo ternarius a x quotiens potest ita tamen ut reliqui a reliquis totiens detrahi possint . quod determinatio si non hic alibi erit necessaria, post autem detrahi et remanebit unum, quod unum quibus diminutum est non ibi remanebit tunc enim nulli esse determinatio tantumdem remaneret quantum ibi erat; diminutum vero voco quodcumque unitas relicta prius detractionem sub decuplae cujusque erat in eo loco una detractio facta est. Itaque secunda bis reliqua unitate in loco cyfrae scribes autem cyfre in ipso primo loco jam vacuo scilicet denominationem cujusque minimi divisoris affiges hoc modo τ. I. $\overset{\text{III}}{\text{VIII}}$. $\overset{\text{IX}}{\text{III}}$

III III

deinde reliquos a reliquis eamdem denominationem detrahes ut terpnarius de X et reliquam unitatem quae diminuta est secunda bis ad VIII ut sunt IX et rursus scribes cyfre scilicet prius cyfre quibus et ultimus penultimus vacui sunt hoc modo.

τ. $\overline{\text{I}}$.		III.	IX
	III	VIII	
		III	

Dein promovebis ipsos divisores quotquot sunt et pones maximum sub maximo et reliquos sub reliquis quemadmodum supradictum est hoc modo .

	III	
τ. τ.	VIII.	IX
	III	III

(D)etrahes ergo secundum ternarium a secundo novenario: $\overset{\text{III}}{\tau}$ et a $\overset{\text{III}}{\text{prima}}$ eamdem denominationem et prout novenis scribes τ τ ad signanda loca vacua, ponesque denominationem supra minimum divisorem ut artis hujus postulat ratio hoc modo:

	III	
τ. τ.	VIII.	IX
	III	III

τ.	τ.	τ.	τ.

(V)ere ergo respondit divisio multiplicationi quoniam in denominationibus sunt XXXIII qui ducti fuerant in se ipsos ut inde producentur $\overline{\text{I}}$. O. VIII. IX.

Sint nobis propositi rursus $\overline{\text{I}}$ CC per se multiplicandi, cum ergo duo cyfre primum locum obtineant quaecumque tertium unitas locum tenens centum est scilicet quaternum locum quarta tenet unitas scilicet mille.

I	II	ττ
I	II	ττ

Scribo ergo quasi minimum sub maximo $\overline{\text{I}}$ primum cyfre sub $\overline{\text{M}}$ prius habetur sinistrorsum dispono o . II . I hoc modo. (D)uco ergo primum I ultimum superioris ordinis in primum inferioris ordinis et secundi. Quum autem semel unum et semel duos digitos procreant, pone eos qui procreati sunt quasi ingerimus eos ex

I	II		τ. τ.
I.	II.		τ. τ.
II.	τ.	III.	τ. τ.
I	II		τ. τ.

quibus producti sunt hoc modo scilicet quum inferiori ordine inter duo (f° 87 r.) et unum locus erat vacuus jam ipse ego rite ō cyfre po|sui ad locum designandum pro quarta unitate in eodem ordine posui o . I . II . oo.

Promoveo ergo terminos omnes inferioris ordinis ut meos ducam tertium binarium et pono ō sub ipso tertio binario ceteros sinistrorsum dispono sic. Inde ergo ex binario ducto in unitatem producitur binarius. Pono unum supra unum quibus digitus unus ponitur. Cum autem fuerint ibi plus duo scribo alia dua. Rursus duo duco in duo, digitum scilicet quatuor, qui nascitur, pono supra eum ex quo nascitur sublato cyfre quibus vacuus est locus ut monstrat subjecta descriptio Et haec multiplicatio divisione examinanda inde ergo in omni divisione maximus supponendus est maximo si inde detrahi possit. Ego sic facio. Ceteros dextrorsum dispono videlicet quartam unitatem sub septima unitate tertium binarium sub sexto quaternario dein duo cyfre; qui si deerint nec tertium posuissem binarium, imo primum nec quartam unitatem imo secundam. Sic ergo dispositis dividendis et divisoribus detraho a maximo maximum, quotiens possum videlicet semel mihi remanet nisi quod ponitur ob signandum ponitur cifre scilicet reliquos a reliquis eadem denominatione id est semel detraho videlicet duo de quatuor; relinquuntur II dein denominant I unum supra minimi divisoribus; inde illius cyfre quod obtinet locum primum in ordine divisorum hoc modo

I II ττ. II. ττ.
τ. I. II. τ τ.
I. II. τ τ τ. II. ττ.
I. II. ττ.

I. IIII. IIII. ττττ.
I. II. τ. τ.
I. IIII. IIII. ττττ.
I. II. τ. τ.

Dein omnes divisores uno gradu dextrorsum promoveo . pono hoc modo. Detrahatur ergo idem ab II quotiens potest scilicet bis, scilicet duo de IIII similiter nihil remanet nisi ōō qui pro locis designandis vacuis scribuntur notandis scilicet denominato I II supra minimum divisorem scilicet supra primum ō, ordinis divisionum ponatur videlicet juxta praedictam denominationem quae erat I. dein compleatur II ō in ordine denominationum hoc modo.

τ. II. IIII. I. ττττ.
I. II. ττ.
τ. II. IIII. ττττ.
I. II. ττ.

(D)atur ergo ex denominationibus recte multiplicatum fuisse. Breviter ergo colligendae fuerunt regule hujus artis: In omni multiplicatione minimus sub maximo, ceteri sinistrorsum disponendi sunt, digitus unum nascitur per multiplicationem supra eum ponitur articulus ulterius ut si ducantur isti duo in unum fient IIII . ut patet in formula suppositi. Vel Ubi nascitur [per coacervationem] ibi remanet scilicet nascitur articulus trans-

feratur ulterius, locum vacuum designet ō. In omni divisione maximus sub maximo ponendus est ceterique ponantur dextrorsum. Maximus a maximo detrahatur quoties poterit, ita | tamen ut reliqui a reliquis totiens detrahi possint. Si quid in dividendo diminutum fuerit secedentur dextrorsum in locum anteriorem transferatur. Denominato supra minimum divisorem scribatur in tertio ordine. Collige autem pro minimo divisore mt toties cyfre ō. hoc ergo quidem dictum est ad multiplicandum dividendum per integros patet posse sufficere. Nunc de proportionandis minutiis dicendum est. Si ergo complecta detractione ad modum supra dictum est adhuc relinquitur et fuit aliquid denuo dividendorum fuitque illud reliquum minus toto minus divisore proportionandum hoc illi est. Quum enim duobus numeris in aequalibus ad invicem paratis necesse est ut minor majoris sit aut pars aut partes si ad eum fuerit comparatus videndum est reliquum illud quota pars est, quote partes si totius numeri divisorum dico itaque quod quantum fuerit hoc reliquum illius numeri contigit singulos divisores de illo reliquo praeter jam acceptam summam denominationum. Verbi gratia Sic C . XLVIII dividere voluerimus, scribemus sup[a] dicto modo numerum divisorum si ergo ut ars postulat dividendi maximum sub maximo ponamus hunc ab illo ut quotiēs detrahamus est unum ab uno quod quidem ni poterimus semel facere; non poterimus producere quum maius a minore non potest detrahi jam ponemus majorem divisorem I . X sub IIII minorem I . VI sub VIII ita tamen ut reliqui I . VI toties detrahi a reliquis possent. Detraho igitur unum a decem novies unum quoties potest, relinquitur unum. Quod quibus diminutum est transferetur a IIII ut sit in secundo loco V nihil in tertio ni cyfre.

fº 87 v.

Quo pono (sic) denominationem I . X . supra minimum divisorem I supra VI sub eamdem denominationem, aufer quinquies sex de LXVIII .I. novies. Negliguntur autem IIII qui numerus est IIII cum minor minimo divisorum. proportionandus est illi. Invenitur autem esse quarta pars dico ergo quod unusquisque divisor accipiat de numera dividendorum IX quatrantem. Omnisnumerus tantumdem producit ex se quantum eius utraque pars altera in alteram bis ducta. Verbi gratia si quaeretur quot sunt trigies quinquies XXX CC respondeatur ptrigies triginta et quinquies V et quinquies trigenta bis vel trigies quinquies quinque bis.

DIE

ÜBERSETZUNG DES EUKLID

AUS DEM

ARABISCHEN IN DAS LATEINISCHE

DURCH

ADELHARD VON BATH

NACH ZWEI HANDSCHRIFTEN DER KGL. BIBLIOTHEK IN ERFURT.

VON

PROF. DR. **H. WEISSENBORN**

IN EISENACH.

In seiner Geschichte der Geometrie S. 593 (der deutschen Uebersetzung) sagt Chasles von der nach Cantor (Math. Beitr. z. Culturl. d. Völker S. 268) etwa in das Jahr 1120 fallenden Uebersetzung des Euklid aus dem Arabischen in das Lateinische durch Adelhard von Bath: „Diese ist die erste Uebersetzung, welche man in Europa von diesem Werk gehabt hat . . . . . Adhelard hatte mit seiner Uebersetzung noch Commentare über die Sätze des Euklid verbunden. Dieses Werk ist Manuscript geblieben," und fügt in einer Anmerkung hinzu: „Es findet sich in der Bibliothek der Dominikaner von St. Marcus zu Florenz unter dem Titel: *Euclidis Geometria cum Commento Adelardi;* und in der *Bibl. Bodleiana* unter diesem: *Euclidis elementa cum scholiis et diagrammatis latine reddita per Adelardum Bathoniensem.* Die königliche Bibliothek zu Paris besitzt auch eine Copie (Nr. 7213 der lateinischen Manuscripte). Ein anderes, das dem Regiomontanus gehört hat, befindet sich in der Bibliothek zu Nürnberg." Zugleich aber auch spricht Chasles, ibid. S. 468, von Campano aus Novara: „Campanus, ein Schriftsteller aus derselben Zeit (dem 13. Jahrhundert), welchem man in Europa die erste Uebersetzung des Euklid, und zwar aus einem arabischen Texte, verdankt," und, bei Erwähnung der Theorie der Stern-Polygone, ibid. S. 548: „Die ersten Keime dazu finden wir in dem Commentar, welchen Campanus, ein Geometer des 13. Jahrhunderts, zu seiner Uebersetzung der Elemente des Euklid aus dem Arabischen (der ersten, die in Europa erschien) hinzugefügt hat." Legen wir nun auch kein Gewicht auf die Inconvenienz, dass nach Chasles nicht nur Adelhard von Bath, sondern auch der um 100 Jahre später lebende Campano die erste Uebersetzung des Euklid aus dem Arabischen in das Lateinische geliefert haben soll, so müssen doch einige Aeusserungen Libri's in seiner „Histoire des sciences mathématiques en Italie. Deuxième Édition. Halle a/S. 1865" auffallen, welche derselbe in Tom. II. des genannten Werkes über Adelhard (S. 62 „Adelard de Bath, auteur qui vivait au commencement du douzième siècle") und Campano ausspricht, nämlich l. c. S. 48: „On a classé Campanus de Novare parmi les plus illustres traducteurs du treizième siècle; mais l'examen des manuscrits prouve que la traduction d'Euclide qu'on lui avait attribuée est d'Adelard de Bath, appelé communément Adelard le

Goth, et que Campanus n'a fait que le commentaire" nebst der Bemerkung „MSS. latins de la bibliothèque du roi, n. 7213, 7214 et 7216 A. — Cela avait déjà été remarqué par Tiraboschi. Cependant M. Chasles a continué à attribuer cette traduction à Campanus." Letzteren Vorwurf nimmt Libri sodann wieder zurück l. c. S. 291 Anmerk. 2: „Je dois dire que dans son ouvrage, M. Chasles a corrigé l'inadvertance que j'ai signalée précédemment sur la traduction d'Euclide, qu'il avait d'abord attribuée à Campanus." Und in der That lesen wir bei Chasles ausser den oben angeführten Worten auch l. c. S. 596: „Campanus übersetzte die 13 Bücher der Elemente Euklid's .... aus einem arabischen Text, und fügte einen Commentar hinzu", mit der Bemerkung: „Einige Historiker glauben, dass dieses Werk des Campanus kein andres ist als die Uebersetzung des Adhelard, zu welcher Campanus den Commentar hinzufügte.... Der folgende Titel eines handschriftlichen Exemplars vom Euklid des Campanus, welches sich in der königlichen Bibliothek zu Paris, unter Nr. 7213 befindet, bestätigt diese Meinung: *„Euclidis philosophi socratici incipit liber Elementorum artis geometricae translatus ab Arabico per Adelardum Gothum Bathoniensem sub commento Magistri Campani Novariensis.* (MS. aus dem 14. Jahrhundert.)" Hankel endlich, in seiner „Geschichte der Mathematik", gedenkt S. 336 „der nochmaligen (nach Adelhard) Uebersetzung der Elemente Euklid's" aus dem Arabischen durch Gherardo von Cremona (1114—1187), und derjenigen Campano's, über welchen er sich ibid. S. 339 dahin äussert: „Nur Giovanni Campano aus Novara (um 1260) mag noch erwähnt werden, weil dessen Uebersetzung des Euklid in der Folge die älteren des Athelard und Gherardo verdrängte und den ersten gedruckten Ausgaben zu Grunde lag." Curtze hinwiederum sagt in seinem Aufsatze: „Reliquiae Copernicanae" Bd. XIX dieser Zeitschrift, S. 80, 449—450, die Campano's Namen tragende „Ausgabe des Euklides" sei „aus dem Arabischen übersetzt", „sei es nun von Campanus, sei es von Atelhard von Bath", und fügt hinzu, Anm. 40: „Ich hoffe in Kurzem zeigen zu können, dass Atelhard der Uebersetzer, Campanus nur der Commentator des aus dem Arabischen geflossenen lateinischen Euklides ist." Etwas Weiteres ist mir jedoch nicht bekannt geworden.

Fassen wir nun das Bisherige zusammen, so sehen wir Folgendes: Kästner in seiner Geschichte der Mathematik II. S. 318, Chasles l. c. S. 594, Libri l. c. I. S. 168, II. 283, 298 erwähnen zwar Gerhard von Cremona als Uebersetzer arabischer Werke, allein ausser Hankel a. a. O. keiner, und besonders auffällig bei Gerhard's Landsmann Libri, als Uebersetzer der Elemente Euklid's. Ferner: Kästner kennt die Uebersetzung des Adelhard und des Campano, l. c. I. 255, 289—302, 306—310, und beschreibt

letztere ausführlich, weiss aber nichts von einer Identität beider; Chasles stellt an den zwei zuerst angeführten Stellen beide als verschieden hin, nach ihm hat Adelhard die seinige mit einem Commentar begleitet, wir erfahren jedoch nicht, worin derselbe bestehe und was er enthalte, an der dritten Stelle aber findet er die Meinung bestätigt, dass Campano's Uebersetzung keine andere sei als diejenige Adelhard's, zu welcher Campano nur einen Commentar geliefert habe; letzteres behauptet Libri von seinem zweiten Landsmann Campano bestimmt, und gleicher Meinung ist Curtze; ebenso bestimmt aber spricht Hankel wieder von Adelhard's und Campano's Uebersetzungen als verschiedenen, und einen Commentar erwähnt derselbe gar nicht. Wenn es nun auch unzweifelhaft ist, dass Campano an verschiedenen Stellen Zusätze durch *Campani additio*, und — von Buch VII an durch *Campani annotatio* bezeichnet — zum Euklid gemacht (insbesondere zu I, 32 die Theorie des Stern-Fünfecks, und am Ende des 4. Buches die Trisection des Winkels) und mithin denselben commentirt hat, so stehen sich doch hinsichtlich der Frage, ob seine Uebersetzung dieselbe sei wie diejenige Adelhard's, die Ansichten Libri's und Curtze's, z. Th. auch Chasles' auf der einen, Hankel's auf der andern Seite gegenüber und etwas Genaueres über die Uebersetzung Adelhard's und Gerhard's von Cremona erfahren wir nirgends. Und doch dürfte es meines Erachtens nicht ohne Interesse sein, die Leistungen derjenigen Männer eingehender kennen zu lernen, die, nachdem man sich Jahrhunderte hindurch mit dem dürftigen Auszuge bei Cassiodor und vielleicht in der sog. Geometrie des Boetius begnügt hatte, zuerst den ganzen Euklid[1]), wenn auch auf dem Umwege durch Vermittelung der Araber, dem christlichen Abendlande bekannt machten und eine wissenschaftliche Behandlung der Geometrie anbahnten; die Gerechtigkeit aber auch dürfte es erfordern, die Verdienste eines jeden derselben genau darzulegen und gebührend zu würdigen.

Unter solchen Umständen erregte es meine Aufmerksamkeit, als ich durch eine gütige Mittheilung meines früheren Collegen am hiesigen Realgymnasium, Herrn Dr. E. Ludwig, gegenwärtig in Bremen, vernahm, dass sich auf der königlichen Bibliothek zu Erfurt mehrere handschriftliche lateinische Uebersetzungen des Euklid befänden. In der Hoffnung, hier Aufschluss über die oben berührten Zweifel zu erhalten, begab ich mich daher nach Erfurt, und Herr Ober-Bibliothekar Professor Dr. H. Weissenborn, welchem ebenso wie Herrn Dr. E. Ludwig ich mich zum

1) Freilich scheint es heut zu Tage kaum als ein Mangel empfunden zu werden, dass, nachdem die auf dem ältesten Codex beruhende Peyrard'sche Ausgabe gänzlich vergriffen ist, der Mathematiker sich nur mit Mühe den Text des Euklid in gesicherter Form und in der Ursprache zu verschaffen vermag.

herzlichsten und wärmsten Danke verpflichtet fühle, gestattete mir mit der grössten Freundlichkeit und Zuvorkommenheit Einblick in alle Handschriften, in welchen der Inhalts-Angabe nach sich etwas meinen Zwecken Dienendes erwarten liess, und unterstützte mich in meinen Forschungen auf das Wirksamste. Längere Zeit jedoch suchte ich vergebens, die Manuscripte waren astronomischen Inhalts, einige auch enthielten die Uebersetzung Campano's ganz oder zum Theil. Endlich ergriff ich einen mehrere Handschriften enthaltenden Quartband, bezeichnet: „*Bibliotheca Amploniana. Libri manu scripti in 4to. Nr. 23.*" Auf der Innenseite des Einband-Deckels fand ich unter der von Amplonius aus dem Jahre 1430 herrührenden Ueberschrift: „In hoc volumine continentur" die Titel mehrerer Schriften, und unter ihnen: „*Euclides cum commento Alani Adelardi*", das *Alani* durchstrichen. Der Anfang des Textes selbst lautet: „*Institutio artis geometricae secundum euclidem philosophum*", und der in mehreren Randbemerkungen vorkommende Name *adelardus* machte es unzweifelhaft, dass ich hier die Uebersetzung der Elemente Euklid's, und zwar aller 13 Bücher, nebst dem 14. und 15., durch Adelhard vor mir hatte. Der Schluss des Ganzen lautet: „*Explicit lib. euclidis phi. de arte geometrica continens CCCCLXV proposita et propositiones et XI porismata praeterea anxiomata (!) singulis libris premissa proposita quidem infinitivis propositiones indicativis explicans. Deo gratia.*" Da mir zugleich die gedruckte Ausgabe Campano's, mit Zamberti's Uebersetzung aus dem Griechischen zusammen herausgegeben von Hervagen 1546 (der Erfurter Bibliothek gehörig) vorlag, so würde eine Vergleichung der Adelhard'schen und Campano'schen Uebersetzung sehr leicht gewesen sein, wenn nicht die Entzifferung der nach dem Urtheile des Herrn Ober-Bibliothekars dem 14., frühestens dem Ende des 13. Jahrhunderts angehörigen Schrift sehr viele Mühe und Zeit gekostet hätte. Eine geraume Weile hatte mich diese Beschäftigung in Anspruch genommen, dann wandte ich mich zu einem anderen, ebenfalls mehrere Manuscripte enthaltenden, Quartband, bezeichnet „*Bibliotheca Amploniana. Libri manu scripti in 4to. Nr. 352.*" Ich hatte denselben bisher nicht beachtet, denn das ebenfalls von Amplonius aus dem Jahre 1430 herrührende Inhaltsverzeichniss auf der Innenseite des Einbanddeckels wies u. a. nur: „*Pauca de Euclide*" auf und verhiess daher nur geringe Ausbeute. Um so freudiger aber auch war ich überrascht, hier als Anfang des Textes zu lesen: „*Primus liber ecludis* (!) *institutionis artis geometricae incipit habens XLVII propositiones per adhelardum batoiensem ex arabico in latinum translatus*", und es war offenbar, dass ich hier ein zweites Exemplar der Adelhard'schen Uebersetzung vor mir hatte, allerdings kein vollständiges, denn dasselbe reicht nur bis Buch VIII, Propos. 16, das Uebrige fehlt; der Herr Ober-Bibliothekar erklärte diese Handschrift für

älter als die erstgenannte und dem 13. Jahrhundert angehörig. Beide Codices sind auf Pergament geschrieben; der ältere, Nr. 352, zeigt auf dem ersten Blatte, gewissermassen als Titel-Vignette, einen Mönch, der ein Winkelmess-Instrument nach dem Himmel richtet. In beiden Handschriften sind die Buchstaben in den Lehrsätzen und Aufgaben grösser als in den Beweisen und Constructionen, und zwar ist dieser Unterschied vielfach sehr auffallend in Nr. 23, weniger hervortretend in Nr. 352; gegen das Ende (des Vorhandenen) enthält letztere Handschrift mehrere Randbemerkungen. Die Schrift in Nr. 352 ist nicht allein ungleich schöner als in Nr. 23, mit rothen und blauen oder mehrfarbigen Initialen (in Nr. 23 sind nur die Anfangs- und Schlussworte roth), sondern auch leichter zu lesen. Bei beiden Manuscripten, dem älteren Nr. 352 und dem jüngeren Nr. 23, fallen, auch bei nur oberflächlicher Betrachtung, zwei Dinge besonders auf: einmal nämlich ist der Raum, den die Beweise und Constructionen einnehmen, auch wenn man die kleinere Schrift in Betracht zieht, ein auffallend geringer, sodann enthalten die in beiden Handschriften an den Rand gezeichneten Figuren in Nr. 23 grösstentheils keine Buchstaben, häufiger noch gegen das Ende, in Nr. 352 aber, wo die Linien der Figuren noch mit gelber Farbe überzogen sind, fehlen die Buchstaben an denselben gänzlich. Beide Umstände lassen eine Uebereinstimmung der Beweise und Constructionen mit den von Campano gegebenen im Voraus als wenig wahrscheinlich erscheinen. Ich komme auf diesen Punkt weiter unten zurück.

Um nun die Uebersetzung Campano's mit derjenigen Adelhard's zu vergleichen, setze ich mehrere Stellen neben einander, und zwar zunächst einige Definitionen. Der Anfang lautet bei

Adelhard.	*Campano.*
Punctus est, cui pars non est. Linea est longitudo sine latitudine cujus extremitates quidem duo puncta sunt. Linea recta est ab uno puncto ad alium extensio in extremitates suas utrumque eorum recipiens.	1. Punctus est, cujus pars non est. 2. Linea est longitudo sine latitudine. 3. Cujus quidem extremitates, sunt duo puncta. 4. Linea recta, est ab uno puncto ad alium brevissima extensio, in extremitates suas eos recipiens.

Schon hier also, bei der 4. Definition, macht sich ein anscheinend geringer, in Wahrheit aber erheblicher, Unterschied geltend, indem Adelhard die gerade Linie als die extensio schlechthin, Campano aber, abweichend auch vom griechischen Texte, als die *brevissima* extensio definirt und somit das Axiom: Die gerade Linie ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten, vorwegnimmt. Die Definitionen 30—34 lauten ferner bei

Adelhard.	*Campano.*
Figurarum autem quadrilaterarum	30. Figurarum autem quadrilate-

alia est quadratum aequilaterum atqu. rectiangulum. Alia est tetragonus longus, estque figura rectiangula sed aequilatera non est. Alia est elmuain estque aequilaterum, sed rectiangulum non est. Alia simile elmuain quae opposita latera atque angulos habet aequales idem nec rectis angulis nec lateribus continetur aequalibus. Praeter has autem omnes quadrilaterae figurae helmunharifa nominantur.

rarum alia est quadratum, quod aequilaterum atqu. rectangulum. 31. Alia est tetragonus longus, quae est figura rectangula, sed aequilatera non est. 32. Alia est helmuayn, quae est aequilatera, sed rectangula non est. 33. Alia est similis helmuayn, quae opposita latera habet aequalia atque oppositos angulos aequales, idem tamen nec rectis angulis nec aequis lateribus continetur. 34. Praeter has autem omnes quadrilaterae figurae helmuariphe nominantur.

Nr. 23 hat statt *elmuain* und *helmunharifa* bezüglich *elmuhahin* und *elmuharifa*. In Nr. 352 ist von einer anderen Hand und mit anderer Tinte über *tetragonus longus*, *elmuain*, *simile elmuain, helmunharifa* geschrieben bezüglich *parte altera longior forma, rombus, rombo simile, trapezia.* Bekanntlich blieben die arabischen Benennungen helmuayn, similis helmuayn, helmuariphe so lange im allgemeinen Gebrauche, bis sich nach Bekanntwerden des griechischen Textes und nach der ersten Uebersetzung desselben in das Lateinische durch Zamberti um 1516 die Benennungen Rhombus, Rhomboid, Trapez einbürgerten.

Die fünf Postulate, oder Petitiones, welch letztere Bezeichnung Adelhard und Campano in gleicher Weise gebrauchen (die *αἰτήματα* des Euklid) stimmen bei beiden überein. Die Axiome aber (*κοιναὶ ἔννοιαι* des Euklid) oder *communes animi conceptiones*, *communes scientiae*, von beiden genannt, lauten bei

Adelhard.	*Campano.*
Quae eisdem aequalia sunt et sibi invicem sunt aequalia.	Quae uni & eidem sunt aequalia, & sibi invicem sunt aequalia.
Et si aequalibus aequalia addantur, tota quoque fient aequalia.	Et si aequalibus aequalia addantur, tota quoque fient aequalia.
Et si ab aequalibus aequalia auferantur quae relinquuntur aequalia sunt.	Et si ab aequalibus aequalia auferantur quae relinquuntur erunt aequalia.
	Et si ab inaequalibus aequalia demas, quae relinquuntur erunt inaequalia.
Et si inaequalibus aequalia addas, ipsa quoque tota fient inaequalia.	Et si inaequalibus aequalia addas, ipsa quoque fient inaequalia.

Si fuerint duae res uni aequales utraque earum aequalis erit alteri.	Si fuerint duae res uni duplices, ipsae sibi invicem erunt aequales.
Si fuerint duae res quarum utraque uni eidemque dimidium erit, utraqu. erit aequalis alteri.	Si fuerint duae res quarum utraqu. unius ejusdem fuerit dimidium, utraque erit aequalis alteri.
Si aliqua res alicui rei superponatur, appliceturque ei nec excedat altera alteram ille sibi invicem erunt aequales.	Si aliqua res alicui superponatur, appliceturqu. ei, nec excedat altera alteram, ille sibi invicem erunt aequales.
Omne totum sua parte majus.	Omne totum, est majus sua parte.

Man sieht, Campano's 4. Axiom fehlt in beiden Handschriften Nr. 352 und Nr. 23 der Adelhard'schen Uebersetzung, und ebenso beruht bei beiden die Fassung des Axioms, welches bei Campano das 6. ist, offenbar auf einer Verderbniss des Textes (*aequales* statt *duplices*), denn es würde nichts Anderes besagen, als das 1.; das 7. Axiom bei Adelhard endlich ist in der Handschrift Nr. 23 ausgefallen, was allerdings bei nicht gehöriger Achtsamkeit des Schreibers leicht geschehen konnte, da sich dieses Axiom ebenso wie das vorhergehende auf *alteri* endigt. Das Vorkommen desselben Fehlers an derselben Stelle, bei Axiom 4 und 6, in beiden Handschriften kann auf die Vermuthung führen, dass entweder beide Manuscripte Abschriften einer und derselben an dieser Stelle corrumpirten dritten seien, oder dass Nr. 23 eine Abschrift der an diesen Stellen bereits verderbten Handschrift Nr. 352 sei, jedoch spricht Anderes wieder dagegen, wie z. B. die verschiedene Schreibweise der arabischen Namen für Rhombus, Rhomboid, Trapez, und einige andere Abweichungen. Einer solchen begegnen wir sogleich im Folgenden. Bei Adelhard nämlich findet sich ein Zusatz zu den Axiomen, welcher in der Handschrift Nr. 352 wie wir nicht anders erwarten, hinter denselben, in Nr. 23 aber vor den *communes animi conceptiones* steht. Man könnte nun wohl meinen, es liege hier ein durch Unkenntniss und Unaufmerksamkeit des Schreibers von Nr. 23 bedingter Irrthum vor, jedoch bleibt, wie sich zeigen wird, auch die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass derselbe dieser Bemerkung absichtlich den genannten Platz angewiesen habe. Ein ganz ähnliches Scholium finden wir auch bei Campano hinter den Axiomen, und zwar lautet dasselbe bei

Adelhard.	*Campano.*
Notaque multas communes scientias praetermisit euclides quae infinitae sunt et innumerabiles. Quarum haec est una. Si duae quantitates aequales ad quamlibet tertiam com-	*Campanus.* Sciendum est autem, quod praeter has communes animi conceptiones sive communes sententias, multas alias quae numero sunt incomprehensibiles, praetermisit Eu-

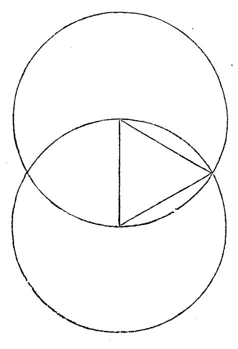
parentur ambae sunt illa aut aeque majores aut aequ. minores aut eidem ambae aequales. Item alia. Quanta est aliqua quantitas ad aliam tantam esse quamlibet tertiam ad aliquam quartam. In quantitatibus quidem continuis hoc observandum est sive antecedentes majores sint suis consequentibus sive aequales. Magnitudo namqu. decrescit in infinitum. In numeris autem si fuerit primus submultiplex secundi quilibet tertius alius quarti erit submultiplex. Multitudo quippe crescit in infinitum.

clides: quarum haec est una. Si duae quantitates aequales, ad quamlibet tertiam ejusdem generis comparentur: simul erunt ambae illa tertia, aut aeque majores, aut aeque minores, aut simul aequales. Item alia. Quanta est aliqua quantitas ad quamlibet aliam ejusdem generis, tantam esse quamlibet tertiam ad aliquam quartam ejusdem generis. In quantitatibus continuis hoc universaliter verum est, sive antecedentes majores fuerint consequentibus, sive minores: magnitudo enim decrescit in infinitum: in numeris autem, non sic. Sed si fuerint primus submultiplex secundi, erit quilibet tertius aeque submultiplex alicujus quarti: quoniam numerus crescit in infinitum, sicut magnitudo in infinitum minuitur.

Gehen wir nunmehr zu den Lehrsätzen und Aufgaben selbst über, so stossen wir zunächst auf ein unvorhergesehenes Hinderniss. In beiden Handschriften Nr. 352 und Nr. 23 nämlich gehen der Propos. 1 des Buches I Euklid's einige Zeilen vorher, die weder bei diesem noch bei Campano ein Analogon haben; sie schliessen sich in Nr. 352 unmittelbar an den zuletzt erwähnten Zusatz, in Nr. 23, welches denselben vor die *communes animi conceptiones* setzt, an letztere an. Zugleich passt der auf I, 1 folgende Beweis nicht zu dieser Aufgabe; der auf I, 2 folgende nicht zu dieser, u. s. w.; und eine genauere Betrachtung lehrt, dass wir nicht etwa hier eine durch Unkunde der Schreiber verderbte Stelle vor uns haben, sondern dass durchgehends die Beweise den Sätzen, nicht, wie wir es gewohnt sind, nachfolgen, sondern denselben vorangehen, so dass für unsere Betrachtungsweise anscheinend zu jedem Satze der Beweis des folgenden gehört. Der Grund dieser auffallenden Sonderbarkeit mag im Folgenden zu suchen sein: Im Griechischen und Lateinischen laufen die Zeilen von links nach rechts, werden die Bücher von vorn nach hinten gelesen; im Arabischen laufen die Zeilen von rechts nach links, werden die Bücher (nach unserer Anschauungsweise) von hinten nach vorn gelesen. Es ist daher keineswegs unglaublich, dass entweder der arabische Schriftsteller, der den Euklid aus dem Griechischen in das Arabische übertrug, oder auch Adelhard, der den

arabischen Euklid in das Lateinische übersetzte, diese Verschiedenheit der betreffenden Sprachen in Bezug auf l i n k s und r e c h t s, h i n t e n und v o r n auch durch Umkehrung des v o r und n a c h, oder o b e n und u n t e n bezeichnen zu müssen glaubte, und somit die Beweise den Sätzen voranstellte. Aus demselben Grunde auch kann möglicherweise der Schreiber von Nr. 23 das zu den *communes animi conceptiones* gehörige Scholium demselben vorangestellt haben. Im Folgenden nun soll durchgehends die im Abendlande übliche Anordnung, nach welcher die Beweise und Constructionen erst auf die Lehrsätze und Aufgaben folgen, welches Verfahren auch Campano einhält, beobachtet werden. Wenden wir uns nunmehr zum Anfange des eigentlichen Inhalts, so lauten die drei ersten Aufgaben Euklid's bei

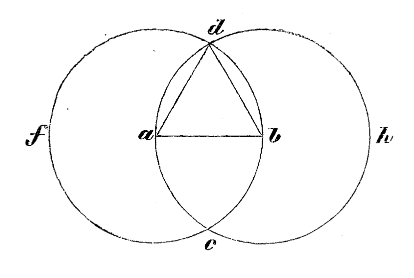




I. Triangulum aequilaterum super datam lineam collocare. A duobus terminis datae lineae ipsam lineam occupando cum circino duos circulos sese invicem secantes describe et ab ipsa communi sectione circulorum ad duos terminos lineae propositae duos lineas rectas dirige. Dein ex circuli descriptione argumentum elice.

(Die Worte „cum circino“ fehlen in Nr. 23.)

Campano.



I. Triangulum aequilaterum: supra datam lineam rectam collocare.

Esto data linea recta ab; volo: super ipsam, triangulum aequilaterum constituere. Super alteram ejus extremitatem, scilicet in puncto a, ponam pedem circini immobilem, & alterum pedem mobilem extendam usqu. ad b, & describam secundum quantitatem ipsius lineae datae, per secundam petitionem circulum $cbdf$. Rursus alteram ejus extremitatem, scilicet, punctum b faciam centrum: & per eandem petitionem & secundum ejusdem quantitatem, lineabo circulum $cadh$; qui circuli intersecabunt se in duobus punctis quae sint c, d. Et alteram duarum sectionum sicut sec-

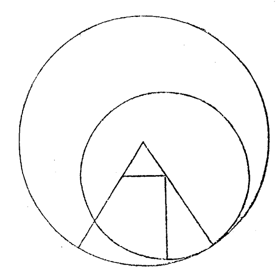
tionem d, continuabo cum ambabus extremitatibus datae lineae: protractis lineis da, db per primam petitionem. Quia ergo a puncto a, quod est centrum circuli cbd, protractae sunt lineae ad & ab usque ad ejus circumferentiam: ipsae erunt aequales, per diffinitionem circuli. Similiter quoqu. quia a puncto b, quod est centrum circuli $cadh$, protractae sunt lineae ba & ad usqu. ad ejus circumferentiam, ipsae erunt etiam aequales. Quia ergo utraqu. duarum linearum ad, bd aequalis est lineae ab, ut probatum est, ipsae erunt aequales inter se, per primam communem animi conceptionem. Ergo super datam rectam lineam: collocavimus triangulum aequilaterum, quod est propositum.

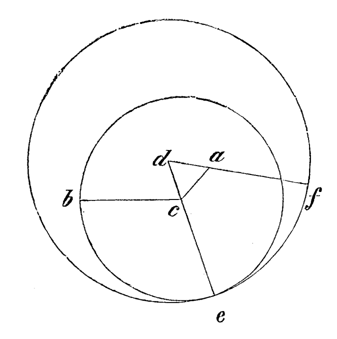
Campani additio. Si autem super eandem lineam libeat collocare reliquas duas triangulorum species, scilicet triangulum duum aequalium laterum, & triangulum trium inaequalium laterum: protrahatur etc. Folgt nun eben so ausführlich die Construction des gleichschenkligen und des ungleichseitigen Dreiecks, obschon letztere Aufgabe in Propos. 22 wiederkehrt.

II. A dato puncto cuilibet lineae rectae positae aequam rectam lineam ducere. A dato puncto ad terminum propositae lineae lineam rectam dirige et super eam triangulum aequilaterum statue et ab eodem termino sed in spacium datae lineae circulum describe et rursus ab eodem termino latus trigoni aequilateri ad circumferentiam directe protrahe, rursusque a vertice

II. *Euclides ex Campano.* A dato puncto: cuilibet lineae rectae propositae aequam rectam lineam ducere.

Campanus. Sit a, punctus datus: & bc linea recta data; volo a puncto a, ducere lineam unam aequalem lineae bc in quamcunqu. partem contingat. Conjungam ergo punctum a, cum altera extremitate lineae bc: cum qua voluero: & conjungam ipsum a, cum

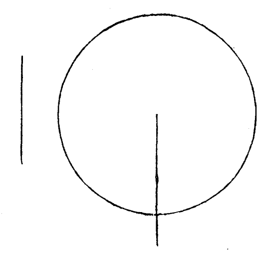


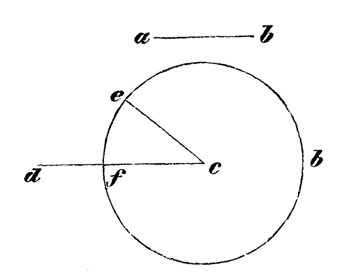


trianguli aequilateri occupando punctum ubi incidit latus ejus productum in circumferentiam alium majorem circulum describe, dein ex circuli descriptione atque ex tertia et prima communi conceptione argumentum elice.

extremitate *c*, per lineam *ac*: super quam constituam triangulum aequilaterum secundum doctrinam praecedentis, qui sit *acd*; & in illa extremitate lineae datae cum qua conjunxi punctum datum *a*, scilicet in extremitate *c* ponam pedem circini immobilem, describamqu. super ipsum (per 3 petitionem) circulum secundum quantitatem ipsius datae lineae; qui sit circulus *eb*; & latus trianguli aequilateri quod opponitur puncto dato, scilicet latus *dc* protraham per centrum circuli descripti usqu. ad ejus circumferentiam: & sit tota linea sic protracta *dce*. Secundum cujus quantitatem lineabo circulum, posito centro in *d*: qui sit circulus *ef*. Postea protraham latus *da* usque ad circumferentiam hujus ultimi circuli: & occurrat circumferentiae ipsius in puncto *f*. Dico igitur quod *af* est aequalis *bc*. Nam *bc* & *ce* sunt aequales: quia exeunt a centro circuli *eb* ad ejus circumferentiam; Similiter quoqu. *df* & *de* sunt aequales: quia exeunt a centro circuli *ef* ad circumferentiam; sed *da* & *dc* sunt aequales: quia sunt latera trianguli aequilateri. Ergo si *da* & *dc* demantur de *de* & *df* quae

sunt aequales: erunt residua, quae sunt af & ce, aequalia. Quia ergo utraqu. duarum linearum af & cb est aequalis ce: ipsae per 1. communem animi conceptionem adinvicem sunt aequales. Quare a puncto a protraximus lineam af aequalem bc; quod est propositum.





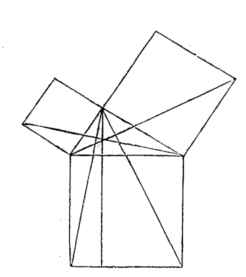
III. Propositis duabus lineis inaequalibus de longiore earum aequalem breviori abscindere. A termino longioris aequam breviori lineam rectam sicuti praemissa proponebat ducito et ab eodem secundum spacium brevioris circulum describito, deinde ex circuli descriptione argumentum elicito.

III. *Euclides ex Campano.* Propositis duabus lineis inaequalibus, de longiori earum, breviori aequalem abscindere.

Campanus. Sint duae lineae ab & cd, & sit ab minor: volo ex cd abscindere unam, quae sit aequalis ab. Duco primo a puncto c, unam lineam aequalem ab, secundum quod docuit praecedens, quae sit ce: posito ergo centro in puncto c, describam circulum secundum quantitatem ce, qui secabit lineam cd; sit ergo ut secet eam in puncto f, eritque linea cf, aequalis lineae ce, quia ambae exeunt a centro ejusdem circuli ad circumferentiam, & quia utraque duarum linearum ab & cf est aequalis ce, ipsae per 1. communem animi conceptionem sunt inter se aequales, quod est propositum.

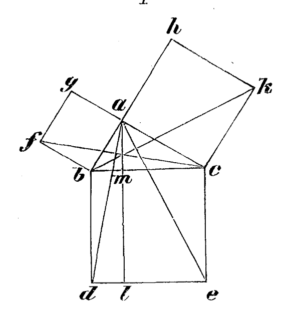
Es lautet endlich der Pythagoreische Lehrsatz, der s. Z. berühmte Magister matheseos, bei

Adelhard.



XLVI. In omni triangulo rectiangulo quadratum quod a latere recto angulo opposito in se ipsum ducto describitur aequum est duobus quadratis quae ex duobus reliquis lateribus conscribuntur. Ab angulo recto ipsius trianguli ad unam basim maximi quadrati tres lineas rectas dirige unam perpendicularem duas vero ipotenusas ad duos terminos. Itemqu. a duobus reliquis ejusdem trianguli angulis ad duos angulos duorum minorum quadratorum duas lineas rectas dirige intra ipsum sese vicissim secantes. Age ergo ex XIIII*a* bis assumpta et ex IIII*a* bis et tertia bis et XLI*a* bis et tertia bis argumentum elice.

Campano.



XLVI. *Euclides ex Campano.* In omni triangulo rectangulo, quadratum quod a latere recto angulo opposito in semetipso ducto describitur, aequum est duobus quadratis, quae ex duobus reliquis lateribus conscribuntur.

Campanus. Sit triangulus abc, cujus angulus a sit rectus. Dico quod quadratum lateris bc, aequum est quadrato lateris ab & quadrato lateris ac simul sumptis. Quadrabo ergo haec tria latera secundum doctrinam praecedentis, sitqu. quadratum bc, superficies $bcde$, & quadratum ba, superficies $bfga$, & quadratum ac, superficies $achk$. Ab angulo a, recto, ducam ad basin de basin maximi quadrati, tres lineas, scilicet ab aequidistantem utriqu. lateri bd & ce, quae secet bc in puncto m, & hypothenusas ad & ae. Itemqu. a duobus reliquis angulis trianguli, qui sunt b & c, ducam ad duos angulos duorum quadratorum minorum, duas lineas se intersecantes intra ipsum triangulum, quae sunt bk & cf. Et quia uterqu. duorum angulorum bac & bag est rectus, per 14 erit gc linea una: eadem ratione erit bh, linea una, quia uterque duorum angu-

lorum *cab* & *cah* est rectus. Quia ergo super basin *bf*, & inter duas lineas aequidistantes quae sunt *cg* & *bf*, constituta sunt parallelogrammum *bfga* & triangulo *bfc*, erit per 41. parallelogrammum *bfga* duplum triangulus *bfc*, sed triangulus *bfc* est aequalis triangulo *bad* per 4, quia *fb* & *bc* latera primi sunt aequalia *ab* & *bd* lateribus postremi, & angulus *b* primi est aequalis angulo *b* postremi, eo quod uterquo constat ex angulo recto & angulo *abc* communi: ergo parallelogrammum *bfga* est duplum ad triangulum *abd*. Sed parallelogrammum *bdlm* est duplum ad eundem triangulum per 41, quia constituti sunt super eandem basin, scilicet *bd*, & inter lineas aequidistantes quae sunt *bd* & *ab*, ergo per communem scientiam quadratum *abfg*, & parallelogrammum *bdlm* sunt aequalia, quia eorum dimidia, videlicet praedicti trianguli sunt aequalia Eodem modo & per easdem propositiones mediantibus triangulis *kbc* & *aec* probabimus quadratum *achk* esse aequale parallelogrammo *celm*. Quare patet propositum.

Ich setze endlich noch die Definitionen vom Anfange des II. Buches des Euklid, nebst den zu diesen von Adelhard und Campano gemachten Bemerkungen her. Diejenigen des ersteren gehen in Nr. 352 den Definitionen voran, in Nr. 23 stehen sie auf einem eingebundenen Zettel. Sie lauten bei

Adelhard.

Omne paralellogramum (!) rectiangulum sub duabus lineis angulum rectum ambientibus dicitur contineri. etc.

Nota paralellogramum idem esse quam superficiem equidistantium laterum.

Campano.

Omne parallelogrammum rectangulum, sub duabus lineis angulum rectum ambientibus dicitur contineri. etc.

Campanus. Parallelogrammum, est superficies aequidistantium laterum. Parallelogrammum rectangulum, est

Nota quoque quod nos gnomonem id elaale dicunt arabes.

superficies aequidistantium laterum habens omnes angulos rectos, & producitur ex uno duorum laterum ejus ambientium unum ex suis angulis, ducto in reliquum, & adeo sub illis dicitur contineri.

Ich führe diese Stelle an aus zwei Gründen: einmal nämlich ist die letzte Bemerkung Adelhard's eine solche, welche im arabischen Texte offenbar nicht gestanden haben kann, die einzige derartige, welche ich bemerkt habe; und allerdings ist sie eine rein äusserliche. Zweitens aber drängt sich uns die Frage auf: woher hatte sich Adelhard die geometrischen Kenntnisse erworben, die ihn befähigten, den Euklid zu übersetzen? Denn *Rhombus*, *Rhomboid*, *Trapez* sind ihm offenbar ganz fremde Begriffe und Vorstellungen, für welche er gar keine Namen hat, so dass er sich genöthigt sieht, die arabischen beizubehalten, der Begriff und die Vorstellung der *Gnomon* aber ist ihm augenscheinlich geläufig. Nach der, meines Wissens, allgemeinen Annahme soll, insbesondere seit Gerbert, die sog. Geometrie des Boetius bis zum Bekanntwerden mit den Arabern die hauptsächlichste Quelle des geometrischen Wissens gewesen sein, etwa nebst Schriften Heron's. In beiden aber kommt der Gnomon nur einmal, Rhombus, Rhomboid, Trapez aber, wenn auch nicht oft, so doch mehrere Male vor. Hätte ferner Adelhard diese Boetius-Geometrie gekannt, hätte er sich da nicht erinnern müssen, dass er ja hier ganz Aehnliches gelesen habe, hätte er nicht statt *tetragonus longus* das daselbst gebrauchte, und, sollte man meinen, bekannte *parte altera longior*, statt *elmuain rhombus*, statt *simile elmuain rhomboides*, statt *helmunariphe trapezium* oder *mensula* gebraucht? Keins von Allen aber findet satt; erst ein Späterer schreibt diese Worte in den Codex ein, während doch die Boetius-Schrift durch die Bekanntschaft mit dem arabischen Euklid in den Hintergrund gedrängt sein soll. Hier stehe ich vor einer Frage, welche die Richtigkeit jener Ansicht wohl zweifelhaft erscheinen lassen könnte, auf die näher einzugehen aber hier nicht der Ort ist.

Dem bisher Mitgetheilten, welches für das Ziel, das ich mir hier gesteckt, völlig hinreicht, entnehmen wir Folgendes: Zunächst die dem Freunde historischer Forschung auf dem Gebiete der Mathematik vielleicht nicht uninteressante Thatsache, dass sich die Uebersetzung des Euklid durch Adelhard von Bath nicht nur an den von Libri und Chasles angeführten Orten Florenz, Oxford, Paris und Nürnberg befindet, sondern auch in Erfurt, und zwar in zwei Handschriften: einer älteren, schöner und deutlicher geschriebenen, leider aber unvollständigen, Nr. 352, und einer jüngeren, minder

schön und deutlich geschriebenen, auch, wie es scheint, etwas weniger correcten, dagegen vollständigen, Nr. 23. Bemerkenswerth in beiden erscheint die Bezeichnung: Euclidis *institutio artis geometricae,* die einerseits die sonst allgemein übliche Benennung *Elemente* nicht kennt, andrerseits an die Titel der Schriften des Boetius (nach der Friedlein'schen Ausgabe): *de institutione* arithmetica, *de institutione* musica, *ars geometrica* erinnert. Der Umstand endlich, dass in Nr. 352 z. B. am Ende von Buch IV, und Nr. 23 Euklid als *philosophus* bezeichnet wird, in Verbindung mit dem Titel der ungefähr derselben Zeit angehörigen von Libri und Chasles citirten Pariser Handschrift Nr. 7213, in welchem derselbe noch specieller philosophus *socraticus* heisst, lässt erkennen, dass bereits im 13. und 14. Jahrhundert (wenn nicht schon bei den Arabern) Euklid *von Megara*, der Schüler des Sokrates, als der Verfasser der Elemente galt.

Betrachten wir nunmehr die Uebersetzung Adelhard's genauer, so werden wir, glaube ich, doch Manches anders finden, als wir nach Chasles' und Libri's Angaben erwarten zu dürfen meinten. Denn vergleichen wir sie mit derjenigen Campano's, um die Frage zu entscheiden, ob letztere mit ersterer identisch sei, so sehen wir, dass beide in den Definitionen, Postulaten, Axiomen, dem Wortlaute der Lehrsätze und Aufgaben, sowie in der Reihenfolge derselben im Ganzen übereinstimmen, obschon, wie sich zeigte, auch hier nicht unwesentliche Verschiedenheiten vorkommen; zugleich wird man anerkennen müssen, dass fast allenthalben, wo solche auftreten, Campano's Fassung die klarere und präcisere ist. In den Beweisen jedoch weichen Adelhard und Campano völlig von einander ab; ersterer nämlich enthält dieselben nicht vollständig, sondern deutet sie nur an, und zwar in der knappesten Form, nicht selten auf originelle Weise (so besteht z. B. der Beweis zu I, 4, dass zwei Dreiecke congruent sind, wenn sie zwei Seiten und den Zwischenwinkel gleich haben, aus den Worten: „Suppositione scilicet ex penultima omnium conceptionum. Quodsi protervus perseveret adversarius ex quinta petitione indirecta raciocinatione eum argue“, vgl. Campano's Beweise zu I, 8; I, 14; III 4; IV, 10; u. a.); letzterer giebt sie eben so ausführlich als der griechische Text und die Uebersetzung desselben durch Zamberti. Nur dann also, wenn man unter dem *Euklid* blos die Definitionen, Postulate, Axiome, und Lehrsätze und Aufgaben ohne die Beweise versteht, wird man etwa sagen können, Campano's Uebersetzung sei identisch mit derjenigen Adelhard's; man müsste denn annehmen, die von mir verglichenen Handschriften Nr. 352 und Nr. 23 enthielten nicht die ursprüngliche Fassung Adelhard's, dieser hätte eben so ausführlich übersetzt als Campano, und ein Späterer die Beweise zusammengezogen. Ich brauche jedoch nicht auseinanderzusetzen, wie wenig wahrscheinlich dies wäre. Ein-

mal nämlich müsste diese Umgestaltung schon in sehr früher Zeit vor sich gegangen sein, denn wir hätten in dem Codex Nr. 352, ungefähr 100 Jahre nach Adelhard's Uebersetzung, bereits ein und zwar schon hie und da durch Abschreiber verderbtes Exemplar dieser veränderten Uebersetzung vor uns. Sodann aber auch: wer war der Gelehrte jener Zeit, der eine so umfassende und eindringende Sachkenntniss besass, dass er in den Beweisen die Haupt-Momente aufzufassen, hervorzuheben und zu ordnen verstand? Und vor Allem: welchen Zweck hätten solche Abkürzungen haben sollen, da bei dem damaligen niedrigen Stande des geometrischen Wissens blosse Andeutungen, die nur den weiter Vorgeschrittenen zu fördern vermögen, keinen Nutzen haben konnten? Zugleich dürfte die Thatsache, dass Campano's Euklid denjenigen Adelhard's verdrängte, dass gerade sein Text beim Drucke zu Grunde gelegt ward und geraume Zeit hindurch massgebend blieb, als Beweis dafür gelten, dass man Adelhard's Fassung als die kürzere, folglich schwerer zu verstehende, diejenige Campano's aber als die ausführlichere, und daher zweckmässigere, kannte.

Ich wende mich nunmehr zu der Frage: Hat Adelhard, oder Campano, oder beide einen *Commentar* zum *Euklid* geliefert? Und zwar verstehe ich, wie wohl zugegeben werden wird, unter einem *Commentar* zu einem Schriftsteller erläuternde Zusätze, durch welche der Text desselben nach der einen oder anderen Richtung erklärt wird. Freilich muss daher zuvor festgestellt sein, welches denn der zu commentirende Text sei, und diese Frage hinsichtlich der Elemente des Euklid ist, worauf ich bereits an einem anderen Orte aufmerksam gemacht habe, zu verschiedenen Zeiten verschieden beantwortet worden. Denn nach Kästner, l. c. p. 249, berichtet Savilius in seinen „Praelectiones tresdecim in principium Elementorum Euclidis Oxonii habitae. Oxf. 1620," Einige schrieben dem Euklid nur die Lehrsätze und Aufgaben, die Beweise aber dem Theon zu, weil sich in manchen Manuscripten der Elemente Euklid's der Beisatz *ἐκ τῶν Θέωνος συνουσιῶν* befunden habe, und Theon eine Ausgabe des Euklid veranstaltet hatte, und u. a. Holtzmann oder Xylander hält es, ibid. p. 353, für nöthig, seiner deutschen Uebersetzung der sechs ersten Bücher vom Jahre 1562 die „Warnung an den Leser" hinzuzufügen: „Die Demonstrationen sind nicht vom Euclide selbst, sondern von anderen hochgelehrten kunstreichen Männern, als Theone, Hypsicle, Campano etc. hinzugesetzt worden," und in der Campano-Zamberti'schen Doppel-Ausgabe (die meinige ist die vom Jahre 1537) sind dieselben offenbar aus gleichem Grunde durch den Zusatz bezüglich *Campanus* und *Theon ex Zamberto* charakterisirt. Wenn nun auch nicht geleugnet werden soll, dass der Zusatz *ἐκ τῶν Θέωνος συνουσιῶν* zur Begründung

dieser damals weit verbreiteten Ansicht[1]) beigetragen habe, so erscheint es doch wenig wahrscheinlich, dass er der einzige Grund gewesen sei, denn er setzte ja Bekanntschaft mit griechischen Handschriften voraus; die Kenntniss des Griechischen aber war im Occidente geraume Zeit hindurch eine sehr seltene. Weit wahrscheinlicher finde ich es, dass, als griechische Manuscripte wieder mehr beachtet wurden, diese Ansicht bereits vorhanden war und durch dieselben nur neue Bestätigung erhielt; dass aber der wahre Grund in den früher bekannt gewordenen Uebersetzungen des Euklid aus dem Arabischen, welche ja die Kenntniss mit demselben vermittelten, und insbesondere in der Uebersetzung Campano's als der am meisten gebrauchten, zn suchen ist. Hier nämlich wird in den Beweisen häufig von *Euclides* in der dritten Person gesprochen, z. B. im Beweise von I, 41; V, 11, 20; VII, 5, 7, 12, 13, 14, 15, 20, u. a., oder vom *auctor*, ebenfalls Euklid, z. B. II, 4; III, 24; IV, 5; V, 9, etc.; oder wir begegnen einem *proponit*, IV, 16; einem *definit*, V, 7—13, 16; einem *vult* V, 14, 15, einem *demonstrat*, V, 12, 17, 18, 22, 23; VI, 17 etc. also einem: *Er* stellt die Aufgabe (nämlich Euklid), *er* definirt, *er* will, *er* zeigt, etc. und der Leser wird somit verleitet, auch das nicht seltene *dico quod* dem Schreiber der Beweise und nicht dem Euklid beizulegen, und somit dieselben als den Commentar eines Anderen zu betrachten. Nehmen wir noch hinzu, dass jene frühere naive Zeit zum Glauben weit geneigter war, als die Gegenwart, dass endlich damals die Geometrie nicht für eine Wissenschaft, sondern für eine Kunst (*ars* geometrica) galt; kann es unter solchen Umständen Wunder nehmen, wenn die Ansicht Wurzel schlug, Euklid habe nur die Definitionen, Postulate, Axiome, Lehrsätze und Aufgaben geliefert, und ein Anderer die Beweise als Commentar hinzugefügt? Dies war wohl auch die Ansicht des guten Amplonius, der ja die Handschriften der Adelhard-

1) Vor mir liegt eine Ausgabe des Euklid von Stephan Gracilis (vergl. Kästner I, p. 261), unter dem Titel: „Euclidis elementorum libri XV. Quibus cum ad omnem mathematicae scientiae partem, tum ad quamlibet Geometriae tractationem facilis comparatur aditus. Coloniae. Apud Gosuinum Cholinum 1612.“ Sie enthält auf 203 Seiten klein 8° den ganzen Euklid, freilich nur die Lehrsätze und Aufgaben, mit den Figuren (ohne letztere würde sie etwa den halben Raum ausfüllen), aber nur wenige *non poenitenda Theonis scholia, sive mavis lemmata*, und nicht *Theonis apodixin*. Das 1., 2. etc. Buch führt die ergötzliche Ueberschrift: Euclidis *elementum* primum, secundum etc. Die Unterschrift der Vorrede „Lutetiae 1557“ zeigt, dass diese Ausgabe ursprünglich in Paris, vermuthlich zum Gebrauche an der dortigen Universität, erschienen war; sie muss für so brauchbar befunden worden sein, dass zu demselben Zwecke eine neue Ausgabe in der damaligen Universitätsstadt Cöln veranstaltet ward. Wie viel und was die Studenten aus diesem wunderbaren, 15 wohlgezählte *Elementa*, aber nicht *Theonis apodixin* enthaltenden Euklid gelernt haben mögen, kann man sich vorstellen.

schen wie der Campano'schen Uebersetzung vor sich hatte; dies mochte ihn bestimmen, den Codex Nr. 352 durch „*Pauca* de Euclide," Nr. 23 durch „Euclides *cum commento* Adelardi" zu bezeichnen, indem in seinen Augen die Beweise das *commentum* waren, und auf derselben Meinung mag auch die Bezeichnung der von Chasles und Libri angeführten Florentiner, Oxforder und Pariser Handschriften beruhen. In der Gegenwart jedoch, welche die Geometrie nicht mehr als eine Kunst, sondern als eine Wissenschaft betrachtet, hat sich, und mit Recht, die Auffassung Bahn gebrochen, dass auch die Beweise, obschon sie wohl nicht gerade alle von Euklid selbst gefunden worden sind — *Ante Euclidem permulti floruerunt Geometrae. Primus omnium Graecorum*, *Euclides eorum opera collegit, collecta digessit, et quae fuerant incondite demonstrata, ea demonstrationibus inconcussis exornavit* sagt Peyrard in der Vorrede zu Band I seiner Ausgabe — doch zum *Euklid* gehören, dass sie nicht willkürliche Erklärungen der Sätze, sondern die nothwendige Begründung derselben sind, ohne welche die Ueberzeugung von ihrer Richtigkeit nicht Sache des Wissens, sondern des Glaubens sein würde, und ich kann daher Chasles nicht beistimmen, wenn er auch von einem *Commentar* des Zamberti spricht, l. c. p. 549 und ibid. Anm. 176 da letzterer doch nur den griechischen Text (mit den Beweisen) übersetzt hat, und ebensowenig, wenn nach ihm Adelhard einen Commentar zum Euklid gegeben haben soll, da sich doch bei diesem selbst die Beweise nur angedeutet und nicht vollständig durchgeführt, geschweige denn durch Zusätze erläutert finden; solchen begegnen wir, wie wir sahen, mit Ausnahme einer einzigen, unten noch zu erwähnenden Stelle, nur hier und da bei den Definitionen. Allein selbst im günstigsten Falle könnte nicht Adelhard als der Commentator betrachtet werden. Denn es wäre schwer zu glauben, dass derselbe im arabischen Texte nur den Wortlaut der Lehrsätze und Aufgaben vorgefunden und die Beweise sämmtlich proprio Marte aufgestellt hätte; er würde ja dann mehr geleistet haben, als Euklid selbst. Ebensowenig wird man annehmen dürfen, er habe im Arabischen die Beweise vor sich gehabt, und dieselben abgekürzt und excerpirt; denn wozu hätte dieses dienen sollen? Wir müssen vielmehr, zumal sein Euklid in der Ueberschrift als eine Uebersetzung bezeichnet wird, glauben, dass er den arabischen Text, wie derselbe ihm vorlag, getreu wiedergab, höchstens solche Bemerkungen hinzufügend wie die, der Gnomon heisse im Arabischen elaale, dass mithin der Name eines Commentators, wenn überhaupt, dem arabischen Schriftsteller gebühre. Anders verhält es sich mit Campano, dessen Ausgabe an verschiedenen Stellen — z. B. die Theorie des Stern-Fünfecks bei I, 32, die Lehre von der Trisection des Winkels am Ende des IV. Buches, in der Ausgabe von 1537 am Ende des ganzen Werkes stehend — erläuternde Zusätze

zum Euklid enthält; davon, ob Campano diese selbst gefunden, wird weiter unten die Rede sein. Auffällig bleibt es allerdings, dass nach Band XIX dieser Zeitschr. Literaturzeit. p. 47—48, auf welche Stelle Herr Professor Cantor mich aufmerksam zu machen die Güte gehabt hat, Herr Professor Günther in der von Regiomontanus geschriebenen, in Nürnberg befindlichen Adelhard'schen *Euklidbearbeitung* die Theorie der Sternvielecke noch ausführlicher als bei Campano gefunden hat, während die beiden Erfurter Handschriften dieselbe nicht allein nicht vollständiger, sondern gar nichts von derselben enthalten, und sich nur auf den Beweis des (nachfolgenden) Satzes I, 32 von der Winkelsumme bes Dreiecks beschränken. Ebensowenig enthalten sie, wie ich hier bemerken will, die Lehre von der Dreitheilung des Winkels. Denn nachdem am Ende des IV. Buches die Beweise vorangegangen, welche in keiner Weise auf die Trisection Bezug nehmen, folgen die zugehörigen Sätze: „Intra datum circulum quindecagonum aequilaterum atqu. aequiangulum designare. Dein circa quemlibet circulum assignatum quindecagonum aequilaterum atqu. aequiangulum, atqu. intra datum quindecagonum circulum describere.“ Und unmittelbar hieran schliessen sich die Worte: „Explicit liber IIII ecludis (!) philosophi dei gratia ejusque auxilio. Incipit liber V. XXV propositiones habens.“ Da mir die hier in Frage kommende Abhandlung des Herrn Günther unbekannt geblieben ist, kann ich meine Ansicht natürlich nur mit Vorbehalt aussprechen. Dieselbe geht dahin, dass entweder eine Verwechselung der Adelhard'schen Uebersetzung mit einer anderen (etwa des Gerhard von Cremona) vorliege, oder aber, dass Regiomontanus, der Adelhard's Euklid gewiss nicht, wie ein unkundiger Schreiber den e*cludes*, Wort für Wort copirte, nicht eine Abschrift, sondern eine Bearbeitung desselben geliefert hat, indem er die Resultate der seit Campano insbesondere durch Bradwardin (Chasles l. c. p. 549—551, 597, 611) weiter geförderten Theorie der Stern-Polygone nach vielleicht inzwischen verloren gegangenen Quellen mit einflocht, wie ja nach Curtze „Reliquiae Copernicanae,“ Zeitschr. XIX, p. 81—82, auch Copernicus zu Campano's Scholium über die Trisection des Winkels Bemerkungen hinzufügte, dass also Regiomontanus zu der Adelhard'schen Uebersetzung Zusätze machte, von denen weder die um 200 Jahre ältere Erfurter Handschrift Nr. 352, noch Nr. 23 etwas weiss.

Ich wende mich nunmehr zu der oben erwähnten, von Chasles l. c. p. 596, Libri II, p. 48, und Curtze l. c. p. 80, 449—450 ausgesprochenen Meinung, welche Campano das Verdienst eines *Uebersetzers* abspricht, und demselben blos das, wie aus dem *nur* hervorgeht, geringere eines *Commentators*, und zwar nicht des Euklid, sondern des Adelhard, zugesteht. Allerdings kennt auch der Titel der 1482 bei Ratdolt zum ersten Male

gedruckten Campano'schen Euklid-Ausgabe nach Curtze l. c. p. 80 Campano nur als Commentator („*cum commentis Campani*"), hingegen lautet derjenige der von Paciolo (Lucas de Burgo sancti sepulcri) castigirten und commentirten Ausgabe 1509 nach Kästner I, p. 299: „Euclidis megarensis philosophi .... opera a *Campano interprete fidissimo tralata*", der Titel der Doppel-Ausgabe 1537: „Euclidis Megarensis .... elementorum lib. XV. Cum expositione Theonis in priores XIII a Bartholomeo Veneto Latinitate donata, Campani in omnes, & Hypsiclis Alexandrini in duos postremos" spricht von Campano blos als Erklärer, und nur von Bartholemeus (Zamberti) als Uebersetzer, ebenso die Ueberschrift des ersten Buches: „Euclidis ... primum ex Campano, deinde ex Theone graeco commentatore, interprete Bartholomeo Zamberto Veneto ... liber primus"; die Ueberschriften der übrigen Bücher lassen nichts Bestimmtes erkennen, nur in derjenigen des XIV. erscheint Campano als Commentator, in der des XV. aber wieder als Uebersetzer (ex *traditione Campani*"). Jedoch begegne ich sonst allenthalben (auch bei Peyrard, Vorrede zu Band I, p. XXIV) der Ueberzeugung, Campano habe seinen Euklid aus dem Arabischen übersetzt, nur Chasles, Libri und Curtze, von der oben besprochenen Ansicht, dass Campano's und Adelhard's Euklid identisch seien, ausgehend, sind anderer Meinung; und wenn letzterer, l. c. p. 446 sagt: „Ich will ferner zeigen, dass das Scholion (von der Trisection des Winkels) in der Ausgabe von 1482 vielleicht schon in der arabischen Bearbeitung vorhanden war, und also nicht den Campanus zum Verfasser hat", so müsste man schliessen, dasselbe sei von Adelhard übersetzt worden. Einestheils aber findet sich, wie ich bereits erwähnte, dieses Scholium bei Adelhard gar nicht, anderntheils aber auch erscheint es mir, wie ich gestehe, unklar, wie man sich eine etwaige Commentirung der Uebersetzung Adelhard's durch Campano vorzustellen habe, wenn derselbe keinen arabischen Text vor sich gehabt hätte. Hätte Campano in der That ohne eine solche Beihülfe den Figuren Buchstaben beigefügt und die von Adelhard doch nur ganz kurz angedeuteten Beweise nicht nur so vervollständigt, eine Arbeit, deren Grösse man nach dem Mitgetheilten ermessen kann, sondern auch mit so vielen und, neben allerdings manchem Irrigen, scharfsinnigen und tiefgreifenden Zusätzen bereichert, wie wir es bei ihm finden, so wäre, meines Erachtens, sein Verdienst, wenn auch nicht als Uebersetzer, sicherlich nicht geringer anzuschlagen als dasjenige Adelhard's; sein Genie wäre ein hervorragendes, und namentlich die bei aller Verschiedenheit unleugbar vorhandene Aehnlichkeit mit der lateinischen Uebersetzung des griechischen Euklid wahrhaft erstaunlich und unbegreiflich. Weit glaublicher erscheint es daher, dass auch Campano seinen Euklid aus dem Arabischen übersetzt hat, jedoch nach einem Texte, der von demjenigen abwich, welcher Adel-

hard vorgelegen hatte. Denn darauf, dass schon bei den Arabern Verschiedenheiten in den Beweisen sich vorfanden, scheinen die Worte in der *Campani additio* zu V, 20, mögen dieselben nun von Campano selbst herrühren, oder übersetzt sein, hinzudeuten: „Quidam autem hanc conclusionem demonstraverunt ... hoc modo ... Isti autem erraverunt in sua demonstratione“ etc. Wir wissen ferner, Hankel l. c. p. 232—233, dass in der That von den Elementen Euklid's mehrere und verschiedene Uebersetzungen in das Arabische existirten, und dasselbe hatte bereits Kästner, l. c. p. 252, vermuthet: „Vom Apollonius Pergäus sind drey arabische Uebersetzungen bekannt. So lässt sich wohl schliessen, auch Euklid habe mehr als einen arabischen Uebersetzer gefunden“, und, ibid. p. 255: „Campan könnte also wohl nur einem Araber gefolgt haben, und, ob das eben der ist, dem Adelhard folgte, liesse sich entscheiden, wenn man die gedruckte Uebersetzung (Campano's) mit der ungedruckten (Adelhard's) vergliche.“ Dieses letztere nun ist von mir geschehen, und es dürfte demnach durch das Mitgetheilte als festgestellt zu erachten sein, dass die in den Uebersetzungen Adelhard's und Campano's unleugbar vorhandenen Verschiedenheiten darin ihren Grund haben, dass beiden verschiedene arabische Texte vorlagen. Ja, es will mir scheinen, als habe die so weit verbreitete und so lange festgehaltene Ansicht, Euklid habe nur die Propositionen verfasst, ihren letzten Grund bei den Arabern. Denn was konnte diesen, da sie in ihren Ausgaben die Beweise von einander abweichend, und nur die Lehrsätze und Aufgaben übereinstimmend fanden, näher liegen als die Meinung, erstere seien ein Commentar und nur letztere die Worte des Euklid, und diese Auffassung konnte sich auf die Völker des christlichen Abendlandes, mit denen sie ja in so vielfache Berührung kamen, übertragen haben, noch bevor eine Uebersetzung in das Lateinische stattgefunden hatte. Dass Campano nun diejenige Adelhard's nicht commentirt, sondern selbst eine solche nach einem anderen arabischen Texte geliefert hat, erscheint mir, wie ich bemerkte, in Uebereinstimmung mit dem Zeugnisse des Paciolo, unzweifelhaft. Jedoch möchte ich dies nicht so verstanden wissen, als habe Campano nur übersetzt, als hätten sich die zahlreichen Zusätze zum Euklid sämmtlich in seinem arabischen Texte vorgefunden; ebensowenig freilich möchte ich behaupten, dieselben seien sämmtlich seinem eigenen Geiste entsprungen. Vergeblich habe ich mich bemüht, aus den verschiedenen Bezeichnungen: *Euclides ex Campano* bei den Definitionen und Propositionen, *Campanus* bei den Beweisen, aber auch bei Zusätzen zu den Definitionen, *Campani additio* und *Campani annotatio* bei Zusätzen zu den Propositionen und Beweisen hierüber bestimmte Anhaltspunkte zu gewinnen. Weder weiss ich, von wem diese Bezeichnungen herrühren, ob vom Castigator Paciolo

oder vom Herausgeber Hervagen, oder von wem sonst, noch wie sie sich unterscheiden sollen, denn z. B. bei VII, 39 finden wir 1) den Lehrsatz, mit *Euclides ex Campano*, 2) ein *Correlarium*, 3) den Beweis, mit *Campanus*, 4) Erläuternde Zusätze, mit *Campani additiones*, und 5) nochmals erklärende Anmerkungen, mit *Campani annotatio* versehen. Unter solchen Umständen bleibt nichts Andres übrig, als Vermuthungen aufzustellen, und es erscheint mir als das Richtigste, anzunehmen, Campano habe ausser dem arabischen Euklid-Text, der die Sätze und die Beweise enthielt, noch andere Schriften, arabische und lateinische, benutzt, und so unter Hinzufügung von manchem Eigenen sein Werk compilirt. Dafür wenigstens spricht Verschiedenes. Von dem die Trisection des Winkels behandelnden Scholium hat Curtze, l. c. p. 446—452, den arabischen Ursprung wahrscheinlich gemacht; auf eine gleichfalls arabische Quelle deutet es hin, wenn Campano in seinem mit *Campanus* bezeichneten Zusatze zur Definition V, 16 einen „*Ametus filius Joseph ben Tavit*“ erwähnt; dagegen finden wir in einer zur Definition V, 3 gehörigen Bemerkung die *Musik des Boetius* citirt, die meines Wissens den Arabern nicht bekannt war, und in seiner *Additio* zu II, 14 gebraucht Campano für das Rechteck, welches er in der Definition I, 31 *tetragonus longus* genannt hatte, den Ausdruck *altera parte longior figura*, vielleicht in Erinnerung an die in der Arithmetik oder der sog. Geometrie des Boetius gebrauchte Bezeichnung, obschon er auffallender Weise dieselben neben der Musik nicht erwähnt. Sei dem aber wie ihm wolle, so viel ist gewiss: Wenn auch Adelhard der Ruhm gebührt, den Euklid zuerst aus dem Arabischen übersetzt, und ihn wenigstens ausführlicher, als man ihn bisher besass, dem christlichen Abendlande bekannt gemacht zu haben, so hiesse es doch diesem seinem Verdienste gegenüber dasjenige Campano's schmälern, der, wie es scheint, zuerst (über Gerhard von Cremona bin ich leider nicht genauer unterrichtet) den vollständigen Euklid wiedergab, denselben erst geniessbar machte und einbürgerte, wenn man mit Libri, Chasles und Curtze sagen wollte, seine Uebersetzung sei dieselbe wie diejenige Adelhard's und er habe nur einen Commentar hinzugefügt. Und selbst wenn, wie es ja wohl möglich ist, Campano beim Anfertigen seiner Uebersetzung diejenige des Adelhard zu Rathe zog, obwohl er sie nicht nennt, und den einmal feststehenden Wortlaut der Aufgaben und Lehrsätze thunlichst beibehielt, wer möchte ihm dies verargen?

Adelhard's Uebersetzung aber, in welcher die Beweise nicht ausgeführt sind, und in welcher ich, wie ich oben bemerkte, nur einen einzigen nennenswerthen erläuternden Zusatz zum Euklid gefunden habe, nämlich das oben mitgetheilte Scholium zu den *communes animi conceptiones,* dem wir in präciserer Fassung auch bei Campano begegnen, macht entschieden

den Eindruck eines Leitfadens, wie ihn gegenwärtig ein Lehrer an einer Akademie oder Universität seinen Zuhörern in die Hand giebt, eines Leitfadens, welcher nur das Wesentlichste enthält, die Einzelnheiten aber übergeht, um den Vortrag nicht zu einer blossen Paraphrase herabsinken zu lassen und zugleich durch gegebene Fingerzeige und Andeutung der hauptsächlichsten Momente zur Selbstthätigkeit anzuregen. Den gleichen Charakter muss natürlich auch der von Adelhard, wahrscheinlich in der Meinung, er habe den vollständigen Euklid vor sich, übersetzte arabische Text getragen haben. Es erscheint daher wohl die Annahme gerechtfertigt, Adelhard habe einen solchen Text vor sich gehabt, wie er an einer der maurischen gelehrten Schulen zu Cordova, Sevilla u. a. den Vorlesungen über Euklid zu Grunde gelegt ward. Jenes Scholium aber (es wäre von Interesse zu wissen, wie dasselbe in der Bearbeitung des Regiomontanus lautet) gleicht einer den Abschnitt über die Axiome erläuternden beim mündlichen Unterrichte gemachten Bemerkung, welche, an den Rand geschrieben, durch Zufall oder mit Absicht in den Text aufgenommen ward. Doch es würde nutzlos sein, weitere Vermuthungen über diesen möglicher Weise auf eine schon bei den Vorträgen an der Akademie von Alexandria benutzte griechische Bearbeitung des Euklid zurückweisenden Zusatz auszusprechen. Vielleicht würde die Uebersetzung der Elemente Euklid's durch Gerhard von Cremona hierüber genaueren Aufschluss verschaffen; Näheres über dieselbe in Erfahrung zu bringen, ist mir jedoch bis jetzt nicht gelungen.

FORTOLFI

RYTHMIMACHIA

VON

R. PEIPER.

[f⁰ 86ʳ, 1]

Prologus in Rithmimachiam.

Quoniam quidem huius artis scientia ab ignorantibus contempnitur et magis leuitati quam utilitati asscribitur, eo quod instar aleae formari uideantur et camporum distinctio et diuersa tabellularum protractio: gratum non nullis arbitror ostendere, quam procul a leuitate distet et quantum 5 utilitatis conferat eius integra cognitio. Est quidem in hac arte quod dupliciter admireris, scilicet et iocunda utilitas et utilis iocunditas, quae non modo tedium non inferant, sed potius adimant, et inutiliter exoccupatum utiliter occupent et rursum inutiliter occupatum utiliter exoccupent, dum plerumque talis occupatio, quia utilis et iocunda, curis grauatam 10 alleuiare possit mentem post decisa negotia, et rancori submissam huius pulchri theorematis maiestas erigere possit. Laudabilior quippe est in omni arte eiusmodi exercitatio, quae animum et instruit et oblectat, iuxta illud Flacci: omne tulit punctum qui miscuit utile dulci. Dicant ergo qui eiusmodi scientiam uanitati deputant et irreligiositati, quid- 15 nam uanitatis habeat uel quid religioni deroget ea inuestigare, quae ratio natura duce propalauit. Siquidem numerum natura dedit, quo et ipse naturae conditor deus in rerum creatione usus est; de quo dicitur quia omnia in mensura et numero et pondere constituisti. Hoc enim, ut ait Boetius, principale in animo conditoris exemplar fuit. Hinc 20 enim IIII[or] elementorum multitudo mutuata est, hinc temporum uices, hinc motus astrorum caelique conuersio. Qui ergo naturalium rerum scientiam nugas appellant, ipsarum conditori iniuriam faciunt non attendentes, quod ipsi magis sunt nugigeruli, qui uel ocio torpent, uel iocis aliisue mundi uanitatibus occupantur, quibus magis offenditur deus. Sed 25 quia nichil est ab omni parte beatum, relinquamus eos sibi, qui ea maxime reprehendunt, quae nesciunt, quia ad hoc eos impellit [2] inuidia qua torquentur; inuidia enim Siculi non inuenere tyranni maius tormentum, uocesque Sirenarum surda pertranseamus aure. Hanc autem nostram rusticam operam nobis nostrique similibus permittant; nam nullas 30 uerborum pompas hic promittimus, sed simpliciter quod in hac arte potue-

14. Horat. A P 343. 19. Lib. Sapientiae XI 21. 20. Boet. Arithm. I 2 p. 12. 26. Horat. C. II 16, 27. 28. 28. Horat. Ep. I 2, 58. 59.

rimus indagare, parati sumus beniuolentiae gratia beniuolis communicare. Sciendum praeterea, quod haec ars ab arithmetico fonte quasi quidam riuulus profluxit ideoque arithmeticae disciplinae expertibus facillimam celeremque ad se uiam praebet, inexpertibus uero tardiorem et non absque 5 labore concedit ingressum.

Capitula libri I.

I Quae sit operis insequentis inscriptio.

II Quae sit materia. III Quae sit intentio. IIII Quae sit utilitas. V Cui parti philosophiae supponatur. VI Qualiter paranda sit tabula. VII 10 De dispositione numerorum. VIII Qualiter uel unde ipsi numeri procreentur. IX Que sint tria praecepta, per quae ipse numerus disponitur. X Qualiter ipsi numeri in tabula locentur. XI De tabellulis et earum formis et coloribus. XII De cribro componendo. XIII Qualiter tractus tabellarum fiant. XIIII De regula capiendorum numerorum. XV Quotis campis nu- 15 meri a numeris capiantur. XVI Qui sint piramides et unde dicantur uel unde nascantur. XVII Qualiter et per quos numeros ipsae piramides capiantur.

Quae sit operis insequentis inscriptio. § I.

Primo igitur dicendum, quod sit huius operis ΕΠΥΓΡΑΦΗ Ν .i. inscriptio quia, ut ait Priscianus, nisi nomen scieris, cognitio rerum perit. 20 Ex duabus grecis dictionibus composito nomine artem istam Rithmimachiae titulo inscribi placuit. Rithmos enim grece, latine numerus; Machia pugna dicitur. Inde rithmimachia .i. numerorum pugna. Hic namque considerare licet numerorum ante et retro, dextrorsum, sinistrorsum et angulariter sibi oppositorum seque inuicem regulariter deicientium, ueluti militum in campo 25 palantium, iocundum quoddam spectaculum, postremo alterutrae partis tam subtilem uictoriae stationem, ut ip- [f. 86ᵘ] sam in laudem uictoriae non componendum, sed quasi iam compositum per musicas consonantias repraesentare uideas cantum. De qua, quia suo loco latiorem postulat rationem, hic dicere supersedemus.

30 Quae sit materia. § II.

Tria autem in hac arte consideranda sunt, scilicet materia, intentio, utilitas. Materia huiusce artis numerus est, qui neque passim in incertum

19. *Die Stelle des Priscianus vermag ich nicht nachzuweisen. Ich finde nur Inst. II 22 (Gramm. lat. ed. Keil II p. 57, 3):* Nomen quasi notamen, quod hoc notamus unius cuiusque substantiae qualitatem.

---

3. in expertibus R. expers *und* inexpers *sind im Sinne von* expertus *und* inexpertus *angewendet; der Verfasser hat Boetius Consol. II 4 (p. 33, 49) vor Augen:* inest enim singulis, quod inexpertus ignoret, expertus exhorreat. 9. Cui] Qui R.

diffunditur, neque naturali tantum ordine contexitur, sed sicut ex materia lignorum siue lapidum parietes, laquearia, trabes, tecta ceteraque huiusmodi necessaria diuersitate disposita unam constituunt domum, ita hic ex materia numerorum species multiplicis, superparticularis, superpartientis rationabili uarietate distinctae unam perficiunt artem. 5

Que sit intencio. § III.

Intentio huius artis componendae ut reor haec fuit, ut quia omnes latitudinem arithmetici campi percurrere non possunt, huius se artis breuitate exerceant et exercendo oblectent et, quod ibi longa lectionis serie assecuti sunt, hic quasi compendiose depingendo recolligant, ita rationabiliter 10 ipsa arte disposita, ut et instruat et tamen tedium non inferat.

Quae sit utilitas. § IIII.

Utilitas huiuscae scientiae non parua, quia honesta et necessaria. Nam confert scientiam multiplicandi et habitudines ipsorum numerorum cognoscendi. Progressiones quoque piramidum et differentias trium medietatum 15 multaque alia spectabilia hic exarare poterit quilibet cautus et curiosus inspector, ut ea quasi oculis breuiter depingat, de quibus Boetius in arithmetica latissime disputat.

Cui parti phylosophie subponatur. § V.

Supponitur autem haec ars physicae .i. naturali scientiae. Substan- 20 tia enim numeri naturalis est et ab ipso mundi exordio naturaliter existens, omnisque eius uarietas naturali ratione distinguitur. Si quidem arithmeticae disciplinae scien- [2] tia, ex cuius fonte haec, quam prae manibus habemus, diriuata est, cunctis artibus, ut ait Boetius, prior est, non modo quod hanc ille huius mundanae molis conditor deus primum suae ha- 25 buit ratiocinationis exemplar et ad hanc cuncta constituit, quecumque fabricante ratione per numeros assignati ordinis inuenere concordiam; sed hoc quoque prior arithmetica declaratur, quod, quaecumque natura priora sunt, his sublatis simul posteriora tolluntur; si uero posteriora pereant, nichil de statu prio- 30 ris substantiae permutatur. Quem admodum si arithmeticam auferas, ceterae quoque artes, ut sunt Geometria, Musica, Astronomia, quae numerorum ratione constant, auferentur; his autem sublatis non simul numerorum auferetur substantia. Si enim numeros tollas, iam non

24. Boet. de arithm. I 1 p. 10 F.

25. primam *Boetius.* 30. quod si *Boetius.*

erit triangulum uel quadratum uel quicquid in geometria uersatur, quae omnia numerorum denominatiua sunt. At si quadratum triangulumque sustuleris omnisque Geometria consumpta sit, tres et quatuor aliorumque numerorum non peribunt uocabula. Similiter in musica diatessaron, diapente, diapason, quae a numeris denominantur, sublatis numerorum tamen substantia permanebit. Idem et de reliquis artibus quae numeris constant sentiendum.

Qualiter paranda sit tabula. § VI.

Ad opus igitur huiuscae scientiae construenda est tabula quadrata, eminentem in circuitu habens umbonem ita exaratum, ut pendens ex altera parte tenuior tabula equabiliter ei imponi possit in modum arculae intrinsecus adeo capabilis, ut tabellulas numeris inscriptas includere possit. Haec in longitudine et latitudine distinctos habeat campos: in longitudine quidem deorsum campos XVI, in latitudine VIII[o]. Quorum unum per alterum multiplicans inuenies per totum campos C XX VIII[o]. Octies enim XVI[cim], uel sedecies VIII[o], C XX[ti´] VIII[o] sunt. Ipsam uero tabulam per medium in lati- [f[o] 87[r]] tudine una linearis intersecet paginula, altrinsecus se octonos aequali dimensione distantes habens campos in longitudine et latitudine. Hanc autem paginulam diremptoriam uocitare placuit, uel quod campos ita dirimat, ut utrique parti aequale spacium attribuat, uel quod circa eam numerus numerum oppositus oppositum capiendo dirimat.

De dispositione numerorum. § VII.

Composita eo modo quo diximus tabula, disponantur super eam alterutra parte in ultimis locis omnes species Multiplicis, Superparticularis, Superpartientis usque ad decuplam proportionem, ita ut in una parte ex pari habeant denominationes, in altera uero parte ex impari. Ex pari quidem generis multiplicis sint species: Dupli, Quadrupli, Sescupli, Octupli; ex impari uero eiusdem generis: Tripli, Quincupli, Septupli, Nonupli. Item ex pari generis superparticularis species sint: Sesqualteri, Sesquiquarti, Sesquisexti, Sesquioctaui, et ex impari e contra eiusdem generis: Sesquitertii, Sesquiquinti, Sesquiseptimi, Sesquinoni. Item ex parte parium generis superpartientis species ponantur .i. Superbipartientes, Superquadripartientes, Supersexipartientes, Superoctipartientes, et e contra ex parte imparium: Supertripartientes, Superquinquepartientes, Superseptipartientes, Supernonipartientes.

---

27. multiplices R.

Qualiter uel unde ipsi numeri procreentur. § VIII.

Quodam loco in arithmetica Boetius, ubi de aequalitate et inaequalitute disputans dicit omnem inaequalitatem ex aequalitate nasci, similitudinem ponit bonitatis et maliciae ad aequalitatem et inaequalitatem, dicens magnum fructum esse, si quis non nesciat, quod bonitas diffinita 5 est et sub scientiam cadens animoque semper imitabilis et perceptibilis prima natura est et suae substantiae decore perpetua. Infinitum uero maliciae dedecus est, nullis propriis principiis nixum, sed natura semper errans a boni diffinitione principii tamquam aliquo [2] signo optimae figurae impressa componitur 10 et ex illo erroris fluctu retinetur. Nam nimiam cupiditatem iraeque immodicam effrenationem quasi quidam rector animus pura intelligentia roboratus astringit, et has quodammodo inaequalitatis formas temperata bonitate constituit. Ad hanc ergo similitudinem omnis inaequalitas quasi instabilis et fluctuans ab aequalitate 15 componitur, et ipsa quodammodo aequalitas matris et radicis optinens uim omnis inaequalitatis species ordinesque profundit. Si enim tres terminos aequales posueris et in his tria praecepta Boetii, que paulo post demonstrabimus, obseruaueris, uidebis, quomodo tibi ex eis multiplices, ex multiplicibus superparticulares, ex superparticularibus superpartien- 20 tes procreentur. Et prima quidem species multiplicis .i. dupla generabit tibi primam speciem superparticularis .i. sesqualteram, et haec primam speciem superpartientis .i. superbipartientem. Secunda uero species multiplicis .i. tripla secundam speciem superparticularis .i. sesquiterciam; haec quoque secundam speciem superpartientis .i. supertripartientem, eodemque modo 25 caeteras per ordinem uidebis alteram ab altera procreari. Dupli namque recto ordine positi generabunt triplos; Tripli quadruplos, Quadrupli quincuplos, Quincupli sescuplos, Sescupli septuplos, Septupli octuplos, Octupli nonuplos. Dupli uero conuerso ordine positi procreabunt sesqualteros, Tripli sesquitercios, Quadrupli sesquiquartos, Quincupli sesquiquintos, Sescupli ses- 30 quisextos, Septupli sesquiseptimos, Octupli sesquioctauos, Nonupli sesquinonos. Sesqualteri uero conuersi generabunt superbipartientes, Sesquitercii supertripartientes, Sesquiquarti superquadripartientes, Sesquiquinti superquinquepartientes, Sesquiseptimi superseptipartientes, Sesquioctaui superoctipartientes, Sesquinoni supernonipartientes. 35

2. Boet. de arithm. I 32, p. 66 F.

---

6. est *om. Friedlein.*

Quae sint tria praecepta, per quae ipse numerus disponitur. § VIIII.

Tria igitur praecepta quae memorauimus haec sunt. Tribus terminis aequalibus positis hoc modo ita facies: Pone [f. 87 u] primum primo parem .i. unitatem unitati; secundum primo et secundo .i. duabus unitatibus; ter-
5 cium primo, duobus secundis et tercio .i. unitati, duabus unitatibus et unitati, continuoque uidebis duplam speciem hoc modo:

I	I	I
I	II	IIII

Rursus dupli recto ordine positi procreabunt triplos hoc modo: Pone primum primo parem, secundum primo et secundo, tercium primo, duobus secundis et tercio, et haec tibi formula apparebit:

I	II	IIII
I	III	VIIII

10 Eodem modo fac de reliquis speciebus multiplicis, et unaqueque tibi alteram repraesentabit. quarum omnium formulas annotauimus hoc modo:

D	u	pli	Tr	ip	li
I	I	I	I	II	IIII
I	II	IIII	I	III	VIIII
Qua	dru	pli	Quin	cu	pli
I	III	VIIII	I	IIII	XVI
I	IIII	XVI	I	V	XXV
Ses	cu	pli	Sep	tu	pli
I	V	XXV	I	VI	XXXVI
I	VI	XXXVI	I	VII	XLVIIII
Oc	tu	pli	No	nu	pli
I	VII	XLVIIII	I	VIII	LXIIII
I	VIII	LXIIII	I	VIIII	LXXXI

2. Boet. de arithm. I 32, p. 67 sqq.

Superparticulares autem inuenturus hoc modo facies: Pone duplos conuerso ordine et fac secundum tria praecepta superius data, statimque uidebis primam speciem superparticularis .i. sesqualteram hoc modo:

IIII	II	I
IIII	VI	VIIII
VIIII	III	I
VIIII	XII	XVI

Item de triplis conuersis fac eodem modo et inuenies secundam speciem .i. sesquiterciam. Rursum quadruplis eodem modo conuersis nascentur sesquiquarti ita: 5

XVI	IIII	I
XVI	XX	XXV

Eodem etiam modo per sequentes multiplicis species omnes alias superparticularis species equiuoce denominatas habebis. Horum quoque omnium descriptionem subiecimus. [87[u], 2] 10

Ses	qual	teri	Ses	qui	tercii
IIII	II	I	VIIII	III	I
IIII	VI	VIIII	VIIII	XII	XVI
Ses	qui	quarti	Ses	qui	quinti
XVI	IIII	I	XXV	V	I
XVI	XX	XXV	XXV	XXX	XXXVI
Ses	qui	sexti	Sesqui	sep	timi
XXXVI	VI	I	XLVIIII	VII	I
XXXVI	XLII	XLVIIII	XLVIIII	LVI	LXIIII
Sesqui	octa	vi	Sesqui	no	ni
LXIIII	VIII	I	LXXXI	VIIII	I
LXIIII	LXXII	LXXXI	LXXXI	XC	C

Superpartientes uero inuenies, si eodem modo quo supra superparticulares conuerso ordine secundum tria praecepta posueris. Nam prima species superparticularis .i. sesqualtera generabit primam speciem superpartientis .i. superbipartientem, secunda species superparticularis .i. sesquitercia secundum speciem superpartientis .i. supertripartientem, similiterque per reliquas ordinatim species superparticularis conuerso ordine positas omnes superpartientis species nasci uidebis, ut subiecta descriptio docet: 15

14. posuerunt R.

Super	bipar	tiens	Super	tri	partiens
VIIII	VI	IIII	XVI	XII	VIIII
VIIII	XV	XXV	XVI	XXVIII	XLVIIII
Super	quadri	partiens	Super	quinque	partiens
XXV	XX	XVI	XXXVI	XXX	XXV
XXV	XLV	LXXXI	XXXVI	LXVI	CXXI
Super	sexi	partiens	Super	septi	partiens
XLVIIII	XLII	XXXVI	LXIIII	LVI	XLVIIII
XLVIIII	XCI	CLXVIIII	LXIIII	CXX	CCXXV
Super	octi	partiens	Super	noni	partiens
LXXXI	LXXII	LXIIII	C	XC	LXXXI
LXXXI	CLIII	CCLXXXVIIII	C	CXC	CCCLXI

Qualiter ipsi numeri in tabula locentur. § X.

Horum autem numerorum in tabula ultimis in locis alterutra parte locandorum haec est demonstratio. Nota in primis diligenter omnes species multiplicis, et in his excipe omnes pares .i. duplos, quadruplos, [f. 88^{r}] sescuplos, octuplos, et ab his quae per primum praeceptum posita sunt, reiectis quae per secundum et tercium posita sunt, tantum assume primamque speciem .i. duplam in una parte tabulae pone, ita ut binarius sit in quarto campo longitudinis et tercio latitudinis, quaternarius uero retro eum in sequenti campo, eodemque modo ceteros pares iuxta illos per ordinem uersus sinistram tuam locabis. Tum uersa tabula in altera parte pari loco et ordine paribus impares e regione oppones .i. Duplis triplos, Quadruplis quincuplos, Sescuplis septuplos, Octuplis nonuplos. Alias autem species ex genere superparticulari primi tantum praecepti numero reiecto ita alterutra parte dispones, ut Sesqualteri iuncti sint duplis, Sequitercii triplis, Sesquiquarti quadruplis, Sesquiquinti quincuplis, Sesquisexti sescuplis, Sesquiseptimi septuplis, Sesquioctaui octuplis, Sesquinoni nonuplis. Item ex genere superpartienti Superbipartientes iuncti sint sesqualteris, Supertripartientes sesquiterciis, Superquadripartientes sesquiquartis, Superquinquepartientes sesquiquintis, Supersexipartientes sesquisextis, Superseptipartientes sesquiseptimis, Superoctipartientes sesquioctauis, Supernonipartientes sesquinonis.

---

19. se/q (i above q) sextis R.

De tabellulis et earum formis et coloribus. § XI.

Inuentis et dispositis hoc modo numeris parandae sunt siue ex ligno siue, si accuratius uolueris, ex osse tabellulae admodum spissae, quaedam rotundae, quaedam quadratae in modum tesserae. Sed rotundae $\mathrm{XVI}^{\mathrm{cim}}$ tantum numero, in quibus duae solummodo, quae piramides ostendant, parumper eminentes in modum turbonis erunt. Caeterae uero quadratae numero XXXII, ex quibus $\mathrm{XVI}^{\mathrm{cim}}$ aequaliter maiores, $\mathrm{XVI}^{\mathrm{cim}}$ aequaliter minores erunt. Hae omnes tabellulae tricolores erunt, albe, nigrae, rubeae; quae inscribende erunt omnibus supradictorum generum speciebus et super campos eisdem numeris inscriptos ponende. Octo minores albi habeant omnes species multiplicis pares .i. Duplos, Quadruplos, [2] Sescuplos, Octuplos. Quibus e regione in altera parte opponantur $\mathrm{VIII}^{\mathrm{o}}$ minores nigrae, habentes impares eiusdem generis .i. Triplos, Quincuplos, Septuplos, Nonuplos. At $\mathrm{VIII}^{\mathrm{o}}$ maiores rubeae inscriptas habeant species superparticularis pares .i. Sesqualteros, Sesquiquartos, Sesquisextos, Sesquioctauos. Quibus opponantur in altera parte $\mathrm{VIII}^{\mathrm{o}}$ maiores albae habentes impares .i. Sequitercios, Sesquiquintos, Sesquiseptimos, Sesquinonos. Octo uero rotundae nigrae habeant species superpartientis ex paribus .i. Superbipartientes, Superquadripartientes, Supersexipartientes, Superoctipartientes. Hisque opponantur VIII rubeae rotundae eiusdem generis .i. Supertripartientes, Superquinquepartientes, Superseptipartientes, Supernonipartientes.

De cribro componendo. § XII.

Ad inueniendas autem numerorum multiplicationes alternas huic arti necessarias perutile est nosse paginam illam, quam cribrum nominant; quam hoc modo compones. In tabula huius quam descripsimus tabulae appendice fac figuram $\mathrm{IIII}^{\mathrm{or}}$ lineis quadratam. Deinde infra ipsam figuram duc $\mathrm{VIIII}^{\mathrm{em}}$ lineas in longitudine et latitudine, et habebis per totam figuram .C. intersticia, in quibus calculos hoc modo locabis. Pone naturalem numeri ordinem usque ad X in prima linea longitudinis et eundem in prima linea latitudinis, multiplicabisque per ordinem unius uersus ordinem alterius, ut puta per binarium unius alterius binarium ternarium quaternarium et deinceps usque ad X, et ex his habebis in secundo uersu omnes duplos. Idem per sequentem ternarium, et habebis in $\mathrm{III}^{\mathrm{o}}$ uersu triplos, per quaternarium in quarto quadruplos, per quinarium in V^{o} quincuplos, per senarium in VI° sescuplos, per

septenarium in VII° septuplos, per octonarium in VIII° octuplos, per nouenarium in VIIII° nonuplos, per denarium in X° decuplos. In hac quoque descriptione superparticularis species tali modo inuenies. Nota secundum

CCCLXI	CCXXV					CXXI	XLVIIII
CXC	CXX	LXIIII	LVI	XXX	XXXVI	LXVI	XXVIII
C	XC	LXXXI	XLVIIII	XXV	VIIII	XII	XVI
		VIIII	VII	V	III		
D I R E M P T O R I A							
		VIII	VI	IIII	II		
LXXXI	LXXII	LX	XXXVI	XVII	IIII	V	VIIII
CLIII	XCI	XLVIIII	XLII	XX	XXV	LXV	XV
CCLXXXVIIII	CLXVIII					LXXXI	XXV

angulum, cuius inicium est quaternarius, et ad ipsum quaternarium compara
5 senarium [f. 89 v] qui est in III° uersu, et habebis sesqualteram proportionem, totusque ille uersus tercius secundi sesqualter est, quartus uero tercii sesquitercius, quintus quarti sesquiquartus, eodemque modo reliquas superparticularis species inuenies. In hac etiam inuenies numeros tetragonos et longilateros et alia quaedam inspicies, ut Boetius dicit, ad sub-
10 tilitatem tenuissima et ad scientiam utilissima et ad exercita-

9. Boet. I 26, p. 53 F.

tionem iocundissima. Figuram autem tabulae, quam supra descripsimus, et colorum in tabellulis ponendorum differentias oculis subiecimus, cribrumque apposuimus, ut, quod discernit uisu, facilius quilibet lector capiat intellectu.

I	II	III	IIII	V	VI	VII	VIII	VIIII	X
II	IIII	VI	VIII	X	XII	XIIII	XVI	XVIII	XX
III	VI	VIIII	XII	XV	XVIII	XXI	XXIIII	XXVII	XXX
IIII	VIII	XII	XVI	XX	XXIIII	XXVIII	XXXII	XXXVI	XL
V	X	XV	XX	XXV	XXX	XXXV	XL	XLV	L
VI	XII	XVIII	XXIIII	XXX	XXXVI	XLII	XLVIII	LIIII	LX
VII	XIIII	XXI	XXVIII	XXXV	XLII	XLVIIII	LVI	LXIII	LXX
VIII	XVI	XXIIII	XXXII	XL	XLVIII	LVI	LXIIII	LXXII	LXXX
VIIII	XVIII	XXVII	XXXVI	XLV	LIIII	LXIII	LXXII	LXXXI	XC
X	XX	XXX	XL	L	LX	LXX	LXXX	XC	C

[2] **Qualiter tractus tabellularum fiant. § XIII.**

Duobus igitur huic tabulae assidentibus legitimi ex alterutra parte alternatim fiant tractus, ita ut multiplices trahantur in secundum campum, in ante, retro, dextrorsum, sinistrorsum, angulariter; superparticulares eodem modo in tercium, superpartientes in quartum.

6. Oddo p. 285, 2 v. 7 *von unten.*

De regula capiendorum numerorum. § XIIII.

Duobus ut diximus ad tabulam sedentibus duplici intentione uigilandum est, uidelicet ut uterque et suae parti cautam et bene consideratam adhibeat custodiam et contrariae parti callide insidietur ut capiat. Quicumque ergo numerus contrariae partis numerum suo legitimo tractu offenderit, auferat eum, ut uerbi gratia si nouenarius rubeus, qui in tercium currit campum, nouenarium nigrum, qui in secundum currit campum, in tercio a se campo offenderit ante uel retro siue dextrorsum siue sinistrorsum uel angulariter, aufert eum; et e conuerso niger rubeum, si in secundo a se campo offenderit eum. Et in hac captura tali regula uteris: Numerus numerum par parem in suo legitimo cursu inueniens aufert eum. Obseruandum tamen in hac regula par parem non dici secundum substantiam numeri, sed secundum quantitatem eandem et idem uocabulum, vt VIIII VIIII XVI XVI XLVIII^{a} XLVIII^{a} LXIIII^{a} LXIIII^{a}. Si numerus altrinsecus circumponatur contrariae partis numeris, qui multiplicati aut iuncti medium afficiant, auferatur. Quia diuersum est quod diximus multiplicati aut iuncti, de duobus diuersis duas diuersas dabimus regulas. De multiplicandis hanc dices regulam: Numeri altrinsecus positi multiplicati medium efficientes auferunt eum. De iungendis hoc modo: Numeri altrinsecus positi iuncti medium efficientes auferunt eum. Exemplum utriusque [f. 89^{r}] regulae: Si ex parte parium II et VI XII de parte imparium altrinsecus interceperint, dices: bis sex XII, et auferes XII. Eodem modo si ex parte imparium III et V de parte parium XV altrinsecus offenderint, dices: ter V XV^{cim}, et auferes XV^{cim}. Item si ex parte parium VIII et IIII^{or} XII altrinsecus offenderint, auferunt eum; VIII enim et IIII^{or} iuncti XII faciunt. Simili modo ex parte imparium V et III, si VIII altrinsecus interceperint, auferunt eum; V enim et III VIII° faciunt. Sic et de aliis sicubi inueneris facies. Quicumque autem numerus contrariae partis numerum sic offenderit, ut quantitas interiacentium camporum in se multiplicata contrarii numeri reddat summam, auferatur. Cuius praecepti haec est regula: Numerus numerum oppositus oppositum interiacentes campos multiplicando efficiens aufert eum. Exempli causa: Si binarius in VI° campo a XII distat per oppositum dices: bis VI XII. Si autem in VIII° a XVI dices: bis VIII XVI. Hoc modo facies in

5. Oddo p. 285, 2 v. 2 *von unten*. 11. Numerus] *Hier beginnt der Schreiber mit schwärzerer Tinte und diese bleibt bis f^{0} 89^{u} Col. 2 Z. 1.*

omnibus numeris, qui per hanc regulam capiuntur, illud solummodo non segniter obseruans, ut omnis oppositio fiat in ante, retro, dextrorsum, sinistrorsum, angulariter.

Quotis campis numeri a numeris capiantur. § XV.

Quoniam quidem hoc opusculum non doctis, quibus uno exemplo dixisse sufficit, sed indoctis et simplicibus cudimus, ad captandam eorum erga nos beniuolentiam aliquantulum latius de hoc modo capiendi dicere suscepimus, ut demonstremus, qui numeri et a quibus et quoto campo singuli a singulis capiantur. Ac primo a parte parium qualiter impares capiantur. XII auferuntur per binarium in $\overset{o}{VI}$ ab eo campo, per quaternarium in $\overset{o}{III}$, per senarium in secundo. Sexies enim duo uel bis sex uel ter $\overset{or}{IIII}$ XII faciunt. $\overset{cim}{XVI}$ capiuntur per binarium in $\overset{o}{VIII}$ campo, per quaternarium in $\overset{o}{IIII}$, per octonarium in secundo. Bis enim $\overset{o}{VIII}$ uel octies $\overset{o}{II}$ uel quater $\overset{or}{IIII}$ $\overset{cim}{XVI}$ sunt. $\overset{ti\ o}{XXVIII}$ auferuntur per binarium in $\overset{o\ o}{XIIII}$ campo et per quaternarium in $\overset{o}{VII}$. Nam bis XIIII uel quater VII $\overset{ti\ o}{XXVIII}$ faciunt. $\overset{a}{LXVI}$ capiuntur a senario in $\overset{o}{XI}$ campo, quia [2] sexies $\overset{cim}{XI}$ $\overset{a}{LXVI}$ complent. $\overset{a}{XXXVI}$ per senarium tolluntur in $\overset{o}{VI}$ campo, $\overset{a}{XXX}$ per eundem in $\overset{o}{V}$ campo. Nam sexies VI $\overset{a}{XXXVI}$ et quinquies VI $\overset{a}{XXX}$ conficiunt. L VI per octonarium cadunt in $\overset{o}{VII}$ campo, $\overset{a}{LXIIII}$ per eundem in $\overset{o}{VIII}$ campo, quia octies VII LVI et octies $\overset{o}{VIII}$ $\overset{a}{LXIIII}$ componunt. XC per VIIII auferuntur in $\overset{o}{X}$ campo. Nouies enim $\overset{cem}{X}$ XC comportant. C per XX in $\overset{o}{V}$ campo rapiuntur; nam quinquies XX C conficiunt. Haec de parte parium. A parte uero imparium pares hoc modo capiuntur. Sex per ternarium in $\overset{o}{II}$ campo submouentur, VIIII per eundem in $\overset{o}{III}$. Bis enim tres sunt VI et ter tria VIIII. XXV auferuntur per quinarium in $\overset{o}{V}$ campo, XX per eundem in $\overset{o}{IIII}$. Quinquies enim V XXV et quater V sunt XX. $\overset{a}{XXXVI}$ per ternarium in $\overset{o}{XII}$ campo cedunt loco, $\overset{o}{XLII}$ per septenarium in $\overset{o}{VI}$ campo et XLVIIII per eundem in $\overset{o}{VII}$ campo submouentur. $\overset{a\ o}{LXXII}$ per nouenarium in $\overset{o}{VIII}$ campo cadunt et $\overset{a}{LXXXI}$ per eundem in VIIII. Nouies enim $\overset{o}{VIII}$ $\overset{a\ o}{LXXII}$ et nouies VIIII $\overset{a}{LXXXI}$ sunt. XV capiuntur per quinarium in $\overset{o}{III}$ campo uel per ternarium in $\overset{o}{V}$. Nam ter V uel quinquies

ter XV sunt. $\overset{a}{\mathrm{XLV}}$ auferuntur per quinarium in $\overset{o}{\mathrm{VIIII}}$ campo uel per nouenarium in $\overset{o}{\mathrm{V}}$ uel per ternarium in $\overset{o}{\mathrm{XV}}$ campo. Quinquies enim VIIII uel nouies V uel ter XV $\overset{a}{\mathrm{LXV}}$ sunt. Tali praedae subiaceant omnes pariter pares uel pariter impares, impariter pares, secundi et compositi. Soli primi et incompositi uagentur tuti, nisi ita sunt aduersariis septi, ut per legitimos tractus euadere non possint. Hanc foueam arithmeticam incidentes auferantur. Qui autem sint uel quare dicantur pariter pares uel pariter impares uel impariter pares siue primi et incompositi, secundi et compositi, si quis nosse desiderat, quia nimis longum esset hic persequi, mittimus eum ad arithmeticam Boetii, qui de his copiosissime disputat.

Que sint piramides et unde dicantur uel unde nascantur. § XVI.

Iam nunc rationem piramidum ostendere intendimus, quam idcirco singulari distinximus capitulo, quia in huius artis scientia singulari habundat materia. Dicendum itaque in primis, quid sit pira- [f. 89[u]] mis. Quae ex diffinitione secundum Boetium sic colligitur. Piramis est alias a triangula basi in altitudinem sese erigens, alias a tetragona, alias a pentagona, et secundum sequentium multitudines angulorum ad unum cacuminis uerticem subleuata. Dicitur autem piramis a greco PIR quod latine ignem sonat, eo quod in modum exurgentis flammae inferius dilatata superius in acumen porrigatur. Omnis enim piramis a latitudine basis proficiens per laterales lineas in unum uerticem dirigitur, ita tamen ut haec linearis porrectio a basi triangula uel tetragona uel pentagona ceteraque multiangula ducatur. Et haec quidem speculatio circa geometricas uersatur figuras, sed eam quoque numerorum rationi applicandam docet auctoritas. Nam sicut in geometricis figuris de puncto, quod est principium lineae et interualli .i. longitudinis, linea producitur, quae est principium superficiei .i. duplicis interualli, longitudinis scilicet et latitudinis, ipsamque superficiem efficit; ex superficie uero, quae est inicium solidi corporis triplex interuallum continentis, .i. longitudinem, latitudinem, altitudinem, ipsa soliditas procreatur: ita et in numeris. Siquidem unitas puncti optinens uicem et numeri in longitudinem distenti principium existens linearem numerum longitudinis capacem et latitudinis caput creat, qui a binario inchoans unitatis semper adiectione in unum eundemque quantitatis ductum explicatur; linearis uero numerus superficiem longitudinis la-

3. Oddo p. 286, 1 v. 9—15. 10. Boet. de arithm. I 9. 10. 11. 14. 15. 16. Boet. de arithm. II 21, p. 105 F.

12. Qui sint R.

titudinisque capacem et altitudinis principium generat, qui a tribus inchoans addita descriptionis latitudine in sequentium se naturalium numerorum multiangulos dilatatur, ut primus sit triangulus, secundus quadratus, tercius pentagonus numerus et deinceps secundum naturalem numerum a greco denominatis angulis procedens, superficies autem duo interualla .i. longitudinem 5 et latitudinem continens soliditatem trina interualli dimensione hoc [2] est longitudine, latitudine et altitudine distantem procreat, cuius soliditatis principium est is numerus, qui uocatur piramis, alias a triangula basi, alias a tetragona, alias a pentagona et secundum sequentium multitudines angulorum exurgens, quemadmodum superficiei primus est triangulus, secundus 10 tetragonus, tercius pentagonus numerus. In quorum consideratione quia non huius loci est diutius immorari, cum in Boetii commento de his habundanter possit quilibet instrui, de his piramidibus que uocantur perfecta et curta, quia ad praesens opus spectat, aliquid dicere causa postulat. Et primi quidem diffinitio talis est: Perfecta piramis est, quae 15 a qualibet basi profecta usque ad primam ui et potestate piramidem peruenit unitatem. Sequentis diffinitio: Curta piramis est, quae a qualibet basi profecta usque ad unitatem altitudine sua non peruenit. Quod si ad primum opere et actu multiangulum eius generis, cuius fuerit basis, non peruenerit, biscurta uocabitur; si uero nec ad se- 20 cundum opere et actu multiangulum peruenerit, uocabitur tercurta; ac deinceps quot multianguli defuerunt, tociens curta pronunciabitur. Ex his duae solummodo in hac arte constitutae sunt, perfecta scilicet ex parte parium et tercurta ex parte imparium. Perfecta piramis summam numeri habet XCI, tercurta CXC. Et hae utreque a tetragono eadem tetragonorum super 25 se compositione nascuntur. Denique pone tetragonos per ordinem usque ad XXXVI hoc modo .i. IIII VIIII XVI XXV XXXVI, et considera quomodo inferius crescendo dilatantur, superius decrescendo usque ad unitatem acuuntur. Ultimus uero in his numerus, qui et maximus, basis appellatur, quod super eum ceteri quasi super basim construendo collocati sursum porrigan- 30 tur. Hos ergo numeros unum alteri superaddendo collige, et uidebis inde perfectam piramidem XCI procedere. Sed de his tetragonis tribus, id est I IIII VIIII, praecisis, habebis [f. 90r] tercurtam piramidem, cuius basis est LXIIII, hoc modo: XVI XXV XXXVI XLVIIII LXIIII. Hi etiam in unam summam redacti tercurtam piramidem CXC producunt. At 35 si forsitan ignoras, qui sint tetragoni, eosque inuenire desideras, primum noueris, quod omnes tetragoni latera sua secundum ordinem naturalis nu-

12. Boet. II 21, sqq. p. 104 sqq. 15. Boet. II 25, p. 110.

7. longitudine] *Hinter* lon *wieder gelbere Tinte.* 19. si *m. pr. s. l. add.* 25. XCI *ist aus* XLI *verbessert* R. 32. procededere, *das zweite* de *unterstrichen* R.

meri habent descripta, utpote primus ui et potestate tetragonus est unitas, qui unum solum gerit in latere; secundus II, tercius III, quartus IIII, quintus V, et ad eandem sequentiam cuncti procedunt, sicuti uidere potes in his formulis quas exempli gratia posuimus:

I	II	III	IIII	V	VI
I	IIII	VIIII	XVI	XXV	XXXVI
I	IIII	V	VI	VII	VIII
I	XVI	XXV	XXXVI	XLVIIII	LXIIII

5 Si ergo cuiusque tetragoni latera in se ipsa multiplicaueris, eundem tetragonum cuius sunt latera habebis hoc modo: Semel unus unus, bis II IIII, ter tria VIIII, quater IIII XVI, et ita in infinitum progredi potes.

Qualiter et per quos numeros ipse piramides capiantur. § XVII.

Superius digestis capiendorum numerorum modis de piramidibus tantum 10 intermiseramus propter ostendendam prius de earum qualitate necessariam rationem. Iam uero nunc expediendum, qualiter et ipse insidiantibus sibi aduersariis loci sui dignitate deponantur. Nam maior eis cautela utrobique seruatur et custodia, quia et maiori auiditate utrimque appetuntur. Et non sine causa; ubi enim maius lucrum, ibi et maior cupido. In casu 15 namque piramidis maius sequitur dampnum, quia unius casus multorum est ruina. Cadente enim piramide cadunt simul omnes numeri illi, quorum compositione piramis efficitur. Capitur autem utraque hoc modo: Si perfectam piramidem .i. XCI sua basis .i. XXXVI legitimo tractu ab opposito offenderit, aufert eum. Ubi regulam superius scriptam dices: Numerus nu- 20 merum. Quare autem hoc fiat, aduertere debes. Utraque piramis per summam suae basis capitur, quia omnis ille numerus, quo conficitur piramis, [2] ita ordinatim locatur, ut ab ultima maiorique summa quasi a basi sustentetur, ideoque necesse est, ut cadente piramide, que continet ceteros, cadant etiam hij, qui ab ea continentur, et hoc est tota piramis. 25 Hoc tamen obseruare debes, quod si sola basis ab opposito sibi numero capitur, non ideo piramis cadit; sed tunc tantummodo, cum his numerus, per quem basis capitur, opponitur ei a contraria parte. Per nouenarium quoque in IIII° campo et per ternarium in XII° campo eadem piramis dei-

26. his *bedeutet* is!

citur. Quater enim VIIII et ter XII sunt XXXVI. At tercurta piramis .i. CXC praedicto modo capitur .i. si eam sua basis LXIIII a contraria parte legitimo tractu offenderit. Deponitur etiam per octonarium in VIII° campo uel per XVI in IIII° campo. Octies enim VIII° uel quater XVI LXIIII sunt. Hanc autem cautelam semper memoriae admittere debes in custodienda piramide tua, ut semper loca illa, in quibus ab aduersariis superari potest, tuis quandiu potes protuicione praeoccupes, uel talem ei locum in IIII° campo siue ante siue retro siue dextrorsum siue sinistrorsum siue angulariter praepares, ut si in tali articulo fuerit, ut non nisi fuga se liberare possit, tute et sine timore consistat. Caeteri quoque cum capiendi sunt, fugae se praesidio liberare habebunt. At si locus fugiendi defuerit, in muscipulam cadere habebunt.

Prologus secundi libri.

De uictoria Rithmimachiae.

Non nullos offendere uidentur hi, qui alieno operi iam publicato et quasi in auctoritatem recepto audent aliquid adicere, quod etiam suo elaborauerint studio, quasi hoc nulla ueritatis assertione stipuletur, quod iuuante ratione probare possunt. Nempe bonus artifex uel pictor seu cuiuslibet artis doctus inspector quod ratio offert uel ornatus operis exigit, non ideo neglegit, quia hoc a magistro non didicit, sed potius gaudens amplectitur, quod se ratione magistra inuenisse miratur. Nam hoc non est artem destruere, sed prouehere et gratiorem reddere et ad maioris exercitium speculationis animum [f. 90^{u}] inducere. Denique Pithagoras musicam ex IIII^{or} malleolis commentatus est, de qua postea alii latissime disputantes plures impleuerunt libros, multique alii diuersa phylosophorum commenta subtiliter uestigata et inuenta suis etiam subtilioribus uel auxerunt uel dilucidauerunt scriptis. Igitur non ero ut reor culpandus, si aliqua de ratione rithmicae uictoriae in hoc nostro, quod fraterna karitas extorsit, opusculo non ante perspecta posuero, cum hec non ex meo ingenio, sed ex maiorum potius magna ex parte collegerim scripto. Quod quidem non iactanciae uitio, sed communis utilitatis et huiusmodi artis exornandae gratia facio et ut studiosis eo gratior in ea fiat exercitacio, quo fuerit iocundior occupatio. Denique positis terminis tribus aut IIII^{or} pulcherrime uictoriae practica perficitur, quando et arithmeticis et geometricis armonicisque proprietatibus perspectis theoricae rationis subtilitate nobilitatur.

---

4. IIII *ist in* qua$\tilde{z}$ *verbessert* R. 17. elaborauerit R. 25. phylosorum R.

Capitula secundi libri.

De duobus modis uictoriae. § I.

Descripto numeralis palestrae praeludio expedienda iam est spectabilis huiusce concursus uictoria, que est operosae maxima pars materiae. Sed ad huius speculationem uictoriae duos constituimus modos, ad quos perfecte cognoscendos perutile est nosse trium medietatum hoc est arithmeticae, geometricae, armonicae proprietates atque differentias. Primus quippe modus est, cum tribus tantum terminis, maximo, medio, minimo, positis per singulas medietates, hoc est uel arithmeticam uel geometricam siue armonicam, uictoria perficitur. Alter uero modus est, cum IIIIor modis dispositis per tres insimul medietates, arithmeticam, geometricam et armonicam, maximam et perfectam armoniam symphonizans uictoria concelebrat. Et iste quidem modus maxime querendus et tenendus est propter sui perfectionem et integram musicae proportionis cognitionem. Qui si haberi non potuerit, sufficiat superior modus et ipse musicarum haut expers symphoniarum.

De diffinitionibus trium medietatum. § II.

Opere precium est supra dictarum trium medietatum proprietates breuiter hic, quantum ad praesens negocium attinet, subscribere. De quibus si quis amplius et perfectius scire desiderat, Boecii de arithmetica commento sedulus scrutator adhereat. Harum autem proprietatum differentias demonstrant subiectae huiuscemodi diffinitiones. Arithmetica medietas est,

34. Boet. de arithm. II 43, p. 140 F.

21. terminis *aus* termisus *verbessert* R. 33. ad'ereat R.

ubi inter tres uel quotlibet terminos equalis atque eadem differentia, sed non equalis proportio inuenitur. Geometrica medietas est, ubi equa proportio et in terminis et in differentiis inuenitur. Armonica medietas est, quae neque eisdem differentiis nec equis proportionibus constituitur, sed quemadmodum maximus terminus ad paruissimum, sic differentia maximi et medii ad differentiam medii atque paruissimi comparatur.

Quomodo per tria praecepta ipse medietates inueniantur. § III.

Est autem quaedam disciplina, per quam has medietates reperire poteris, si trium praeceptorum regulas, quas daturi sumus, obseruaueris. Ipsis uero tribus praeceptis non uno modo in omnibus medietatibus inueniendis uteris, sed singulae medietates suum quendam singularem modum trium praeceptorum habebunt. Primo igitur tres terminos equales pones, hoc est uel tres binarios uel tres ternarios uel tres quaternarios uel alios quoscumque uolueris. His ita positis si [f. 91 r] arithmeticam medietatem inuenire uolueris, haec tria praecepta obseruabis: Pone primum primo equum, secundum primo et secundo, tercium primo, secundo ac tercio, et arithmeticam medietatem habebis hoc modo: [A] Est etiam alia arithmeticam medietatem procreandi uia huiuscemodi: Pone primum equalem primo et secundo, secundum primo et duobus secundis, tercium primo et duobus secundis ac tercio, et erit huiusmodi figura: [B] Geometricam autem medietatem hoc modo inuenies: Pone primum primo equalem, secundum primo et secundo, tercium primo duobus secundis et tercio, et erit hac forma: [C] Armonicam quoque medietatem inueniendi hec uia est: Pone primum primo ac duobus secundis parem, secundum duobus primis et duobus secundis, tercium primo, duobus secundis et tribus terciis, et hanc figuram armonicam habebis: [D] Possunt et per alios numeros he medietates secundum

A		
II	II	II
II	IIII	VI
III	III	III
III	VI	VIIII

B		
II	II	II
IIII	VI	VIII
III	III	III
VI	VIIII	XII

C		
IIII	IIII	IIII
IIII	VIII	XVI
V	V	V
V	X	XX

D		
II	II	II
VI	VIII	XII
III	III	III
VIII	XII	XVIII

3. Boet. de arithm. II 44, p. 144 F. 4. Boet. de arithm. II 47, p. 152 F.

33. secundo *aus* secundum *corr.* R.

hec praecepta inueniri, sed hos tantum maluimus ponere, ex quibus illi procreantur termini, qui in rithmimachiae tabula uidentur dispositi.

Quomodo etiam alio modo inueniantur. § IIII.

Est etiam alius modus praedictas medietates inueniendi, sed in hoc quoque modo his numeris utemur, qui in huius disciplinae instrumento reperiuntur. Ponantur duo termini et inter eos unus terminus per regulam quam dabimus collocetur, eo uidelicet modo, ut duobus terminis altrinsecus positis immutabiliter permanentibus medius, qui per regulam dandam ponendus est, ita mutetur, ut nunc arithmeticam, nunc geometricam, nunc armonicam medietatem componat. Sint ergo duo termini tales V XLV. Hos itaque terminos coniun- [2] ge et habebis L, quem diuides eiusque medietatem .i. XXV inter utrasque extremitates locabis, et arithmeticam medietatem habebis. Vel si illum numerum, quo maior minorem superat, diuidas eiusque medietatem minori termino adicias et qui inde concrescit medium ponas, arithmetica medietas formatur. Nam XLV quinarium quadragenario superat. Quem si diuidas, XX fiunt. Hunc si quinario supposueris, XXV nascentur, quem medium constituens arithmeticam medietatem efficies hoc modo: V XXV XLV. Si autem geometricam medietatem facere uis, praescriptos terminos propria numerositate multiplica sic: Quinquies quadraginta V uel quadragies quinquies V sunt CCXXV. Horum tetragonale latus assume .i. XV. Quindecies enim quindecim faciunt CCXXV. Hos igitur XV medios inter V et XLV si posueris, geometricam medietatem formabis hoc modo: V XV XLV, uel si terciam partem maioris termini accipias et illam mediam ponas, idem erit. Ter enim XV XLV sunt. Armonicam uero medietatem tali modo reperies. Prefatos terminos sibi met ipsis copula .i. V et XLV, et fient L. Deinde differentiam eorum .i. XL per minorem .i. V multiplica, et erunt CC; hos per numerum, quem ex duobus iunctis confeceras, diuide .i. per L, et inuenies latitudinem eorum $\overset{\text{or}}{\text{IIII}}$ esse. Quinquagies enim $\overset{\text{or}}{\text{IIII}}$ faciunt CC. Hanc ergo latitudinem .i. $\overset{\text{or}}{\text{IIII}}$ appone minori termino .i. V: erunt VIIII; hos cum inter V et XLV posueris, armonicam medietatem explebis.

De differentiis et proprietatibus earum. § V.

Vigilanter quoque notandae et memoriae commendandae sunt ipsarum trium medietatum proprietates et differentiae, quarum consideratione possis singulas indubitanter discernere. Est autem proprium arithmeticae medie-

---

23. si etiã terciam, etiã *unterstrichen als ungültig,* R. 25. ipsis *aus* ipsos *corrigirt* R. 26. multi^{l}pca R. *hier und öfters.*

tatis equalem differentiam inter dispositos habere terminos et, quod extremitates copulatae efficiunt, duplum esse medii, maioremque proportionem esse minorum terminorum quam maiorum, minoremque numerum esse, qui fit ex multiplicatis extremitatibus, eo, qui fit ex multiplicata medietate, tantum quantum eorum differentiae multiplicatae resti- [f. 91u] tuunt. Itaque ubicunque inter dispositos terminos tales IIII proprietates inueneris, arithmeticam medietatem procul dubio pronuntiabis. Quod ut magis luceat, exemplificandum est in ea quam supra posuimus dispositione V.XXV XLV. Nempe in hac dispositione equales sunt differentiae; eadem enim est inter V et XXV, que inter XXV et XLV .i. XX. Quinque autem et XLV simul iuncti faciunt L, cuius medietas est XXV, maior que proportio est inter V et XXV, quam inter XXV et XLV. Nam XXV ad V quincuplus est, XLV ad XXV superquadripartiens quintas est, quae minor est quincuplo. Si uero extremos alterum per alterum multiplices et dicas: quinquies XLV uel quadragies quinquies V fiunt CCXXV, que summa maior est ea que ex medio .i. XXV in se multiplicato conficitur, quia uigies quinquies XXV sexcentos XXV faciunt, que summa priorem superat CCCC, qui fiunt ex differentiis in se ductis; differentiae autem terminorum sunt XX. Vigies ergo XX sunt CCCC. Porro geometricae medietatis proprium est differentias eiusdem proportionis esse, cuius sunt termini, et quemadmodum est maior terminus ad medium, sic medium esse ad extremum, et quod ab extremitatibus inuicem se multiplicantibus conficitur equum esse ei, quod a medio in se ducto completur, ut in V XV XLV. Inter quinque enim et XV denarius est differentia, et inter XV et XLV XXX, qui triplus est denarii, sicut XLV triplus est XV et XV triplus quinarii. Et quinquies XLV uel e conuerso faciunt idem quod XV[es] XV .i. CCXXV. Armonicae uero medietatis talis est proprietas, ut eadem proportione differentiae ad se inuicem comparentur, qua maximus terminus ad paruissimum comparatur, et quibus partibus maioris a maiore medius uincitur, eisdem partibus minoris minorem superet, maiorque proportio sit in maioribus quam in minoribus; et si extremitates iungantur et per medium multiplicentur, duplum sint ad eam summam, que ex inuicem multiplicatis extremitatibus colligitur; ut V VIIII XLV: differentia inter XLV et VIIII XXXVI sunt, qui numerus ad differentiam, que est inter VIIII et V, nonuplus est, sicut maximus terminus [2] .i. XLV ad minimum .i. V nonuplus est et IIII[or] partibus maioris .i. XXXVI, que sunt IIII[or] nouenarii, quater enim VIIII XXXVI sunt, medius a maiore uincitur, qui eisdem partibus minoris .i. IIII[or] minorem

15. in ea, *aber* in *unterstrichen*, R. 32. extremitatis R.

superat. maiorque proportio est inter XLV et VIIII, que est quincupla, quam inter VIIII et V, que est superquadriparciensquintas. et si XLV et V copulentur, qui faciunt $\overset{a}{L}$, et per medium .i. nouenarium multiplicentur, sic nouies $\overset{a}{L}$ faciunt $\overset{a}{CCCC}$ $\overset{a}{L}$, duplum uidelicet illius quod extremitates inuicem se multiplicantes comportant .i. CCXXV.

Geometricalis speculatio uictoriae per has medietates dispositae. § VI.

Si cui uero placet recipere, non arbitror rationi obsistere, si per has medietates nouam uictoriae speciem disponimus, in qua dispositione omnis harum medietatum proprietates insimul possis oculo mentis inspicere, insuper aliquas geometricales figuras et nonnullas musicas consonantias. Quo enim utilior, tanto delectabilior erit in aliqua dispositione uictoriae occupatio. Si ergo ex parte parium talis uictoria componenda est, V de parte imparium per praedam acquirendi sunt, ceteri $\overset{or}{IIII}$ .i. VIIII XV XXV $\overset{a}{XL}$V in dispositione parium inueniuntur, si tamen a contraria parte ablati non fuerint. quorum V ut dixi et etiam XXV de parte imparium per praedam adquiruntur. Porro si a parte imparium uictoria statuenda est, XV et XLV per praedam adquirendi sunt; nam caeteri imparium reperiuntur, si tamen et ipsi a contraria parte ablati non fuerint. Cum igitur omnes hos terminos quacumque parte sedens habueris, uictoriam facturus pone primo V, deinde in sequenti campo XV, post hunc $\overset{a}{XL}$V siue in ante siue retro siue dextrorsum siue sinistrorsum, altrinsecus uero XXV et VIIII, ut instar uictoriosae crucis hec figura exeat. Iam nunc adibito mentis oculo si curiose intendas, uidebis trigonum ortogonium quadrifidum exurgere, cuius basi et catheto equali proportione extante hypotenusa consequenter superbipar- [f. 92r] tiens quintas ad basim uel cathetum erit. Duorum igitur superiorum trigonorum hypotenusa arithmeticam medietatem comprehendit, basis uero quadrifidi trigoni geometricam medietatem subportat, inferiorum uero trigonorum hypotenusa armonicam medietatem demonstrat, numeros uero, qui sui mutacione tres istas medietates efficiunt, cathetus ipsius quadrifidi trigoni equaliter assurgens representat hoc modo: [A]

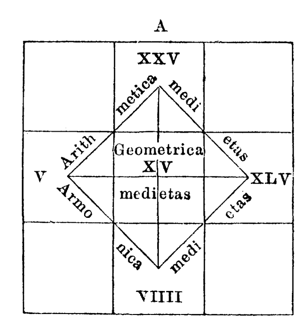
XXV
V|—X|V—|XLV
VIIII

Alia speculatio. §. VII.

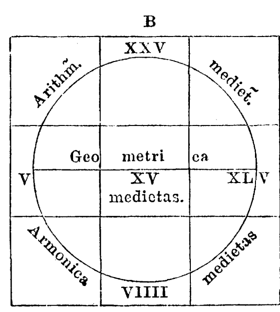
Alia quoque in huiusmodi dispositione speculatio suboritur. Dispositis enim terminis eodem modo quo supra, XV pro centro uel puncto estimabis.

---

20. *retr.* (dex über retr.) *von gleichzeit. hd corr.* R. 22. adibito *d. i.* adhibito. 23. ortogenium, ge *in* go *corrigirt?* R. 34. certro R.

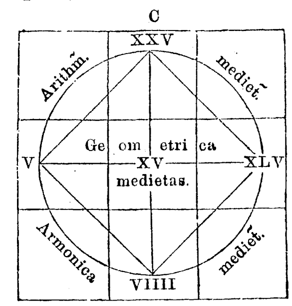


In quo quasi circino posito numeros circumpositos circumferentia excipiat, quam si in duas equas partes a sinistra ad dextram per diametrum diuidas, superius hemisperium arithmeticam tibi medietatem consignat, diametrum geometricam, inferius hemisperium armonicam hoc modo: [B]



Item alia. § VIII.

At si aliud diametrum a XXV per XV ad VIIII recta linea feceris, totum circulum in $\mathrm{IIII}^{\mathrm{or}}$ quadrantes diuides, in quibus singulis triangulum ortogonium estimare potes, ita ut duo triangula medietatem diametri sursum et duo deorsum pro catheto habeant et alterius medietatem diametri duo dextrorsum et duo sinistrorsum pro basi accipiant, ypotenusa uero rectam lineam a fine basis, ubi circumferentiam tangit, usque ad summitatem catheti, ubi etiam circumferentiam tangit, per singulos quadrantes deductam ipsius quadrantis VI^{a} parte minorem. Superior ergo pars circumferentiae duos triangulos complectens arithmeticam pandit medietatem, cui altera pars inferior et ipsa duos continens triangulos [2] ab opposito armonica medietate respondet, mediana uero linea ipsorum $\mathrm{IIII}^{\mathrm{or}}$ triangulorum basim denotans geometricam medietatem insinuat; numeros uero, in quibus ipsarum medietatum constat effectus, altera linea mediana, que pro cathetis $\mathrm{IIII}^{\mathrm{or}}$ trigonorum estimatur, assignat hoc modo: [C]



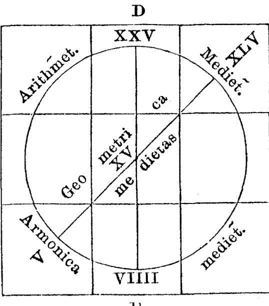
Item alia. § VIIII.

Quod si praefati termini ita fuerint dispositi, ut quasi duae lineae secundum rationem diametri deductae in quamlibet partem ad se inclinatae fuerint, duos sibimet exaduerso oxigonios .i. acutos angulos et duos ampligonios .i. hebetes angulos formabunt; unusque oxigonius et ampligonius arithmeticam capient medietatem, alter uero oxigonius et ampligonius ab opposito armonicam comprehendent medietatem, medio autem inter utrosque loco geometrica apparebit medietas sic: [D]

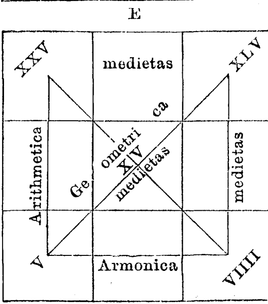
---

3. ad *aus* in *oder* an *al. m.* R. 30. anglilos R. 31. ampligonios *d. h.* amblygonios.

D



E



Si autem ipsos terminos trium medietatum angulariter constituas, uidebis quod quasi duae diagonales lineae medio se intersecant, ita ut duos triangulos altrinsecus ad unam basim constituant, quorum cathetos equales esse necesse erit hoc modo: [E]

Hec non ante inspecta in rithmimachiae uictoria ponere praesumpsi, non pertinaciter ea astruendo, sed beniuole beniuolis offerendo. Que si placent recipiant, sin autem, mihi soli relinquant. Nam quod ipsa natura offert, ratio non repellit, cum et hoc accedat, quo maxime animus capitur, scilicet quia instruit et oblectat, cui parum aut nichil confert huius disciplinae practica, [f. 92[u]] si nulla in ea exerceatur theorica.

Qualiter uictoria fieri debeat. § Capit. X.

Igitur facturus uictoriam in campis aduersarii eam statuere debes, primumque numerum quem ponis ex nomine aduersario iudicabis, hoc summopere praecauens, ut ipsum primum quem ponis et adhuc ponendos nullus aduersariorum interrumpere possit. Nam si semel interrupti fuerint, uictoria cassa erit et iterum cautius eam te reparare oportebit. In statuenda uero uictoria hanc obseruabis regulam, ut si tres ponere uis terminos, tum duos, si IIII[or], tum tres de tuis statuas, tercio uel quarto de parte aduersarii per praedam acquisito.

Qui numeri sint armonici. § XI.

In ea parte ubi perfecta piramis est, scilicet XCI, XV et XX armonici sunt, XXX[a] per praedam acquirendus est. Statutis ergo XV XX XXX, si recte consideres, uidebis secundum regulam superius dictam hanc esse armonicam medietatem. Eadem enim proportione differentiae ad se inuicem comparantur, qua maximus terminus ad paruissimum comparatur. Si quidem inter XXX[a] et XX differentia est X, inter XX autem et XV V. Eadem ergo proportio est inter X et V, quae inter XXX[a] et XV .i. dupla. Consonantias uero musicas in his terminis perspicies, si eorum proportiones consideres. Nam XXX[a] ad XX hemiolia .i. sesqualtera proportione iungitur,

---

19. p̄onendos R.

quae est in musica diapente consonantia. Habet enim minorem totum et eius alteram partem. Ad XV uero dupla, que est diapason. Porro XX ad XV sesquitercia proportio est, quae est diatesseron. Habet enim minorem totum et eius terciam partem. Item IIII et VI armonici sunt, XII per praedam adquirendus est. XII ad VI dupla proportio est diapason, ad IIII tripla .i. diapason diapente, VI ad IIII sesqualtera .i. diapente. Item II et VI armonici sunt, III per praedam acquirendus est, VI ad III duplus .i. diapason, ad II triplus .i. diapason diapente, III ad II sesqualtera .i. diapente. Item XXV et XLV armonici sunt, CCXXV per praedam acquirendus est. In his tamen terminis consonantiae non inueniuntur, nisi tantum proprie- [2] tas armonice medietatis. In ea uero parte, ubi tercurta piramis est CXC, armonici sunt III et V, XV per praedam adquirendus est. Item V et VIIII armonici sunt, XLV per praedam adquirendus est. Item XXVIII et VII armonici sunt, IIII per praedam adquirendus est. In quorum omnium dispositione eadem ratio armonice proprietatis, quae superius praelibata est, diligenter consideranti aperitur, preter quod musice consonantie non adeo ibi inueniuntur, quia maxime in superpartienti proportione constituti sunt, quae sicut dicit Boetius ab armoniae continentia separatur; a Ptolomeo tamen recipitur, cuius de hac sentenciam qui nosse desiderat Boetii de musica tractatum perlegat. Predictos quoque utriusque partis terminos sic uariare potes, ut per arithmeticam seu geometricam proprietatem dispositi musicis quoque proportionibus uictoriam perficiant. Exempli gratia: Statue VII, VIII, VIIII siue VI, VIIII, XII uel VIIII, XII, XV et habebis arithmeticam medietatem et non nullas musicas consonantias. Ad geometricam uero medietatem disponendam pone IIII, VIII, XVI siue V, XV, XLV uel IIII, XVI, LXIIII, et in his musicam quoque non deesse perspicies. Hac tantummodo ratione utramque medietatem discernes, ut in arithmetica equales sint differentiae, in geometrica uero equali inter se termini proportione iungantur.

De geometrica armonia. § XII.

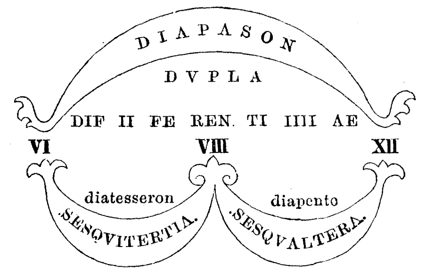
Est alia quedam pulcherrima uictoriae dispositio, quae in his tribus constituitur terminis, uidelicet VI, VIII, XII, quam Boetius geometricam armoniam appellat et nos cubicam uictoriam dicere possumus. Tribus namque interuallis continetur .i. longitudine, latitudine, altitudine. Omnis enim cubus XII latera habet, VIII angulos, VI superficies. Omnis autem armonica proprietas omnesque musicae consonantiae, si differentiae cum terminis considerentur, in hac dispositione inueniuntur. XII namque ad VI

18. Boet. inst mus. I 5, p. 193, 1 Fr. 6, p. 194, 15. 31. Boet. inst. arithm. II 49, p. 158 Fr.

8. diaps R *hier und öfter*. 8. diapt R.



dupli sunt et diapason ostendunt, XII ad VIII sesqualtera proportione diapente reddunt, VIII ad VI diatessaron in sesquitercia proportione. Porro *dif-* [f. 93[r]] ferentia inter XII et VIII quaternarius est, inter VIII et VI binarius. Duodenarius igitur ad IIII et VI ad binarium triplam 5 proportionem habentes diapason diapente symphoniam pandunt, VIII uero ad binarium quadruplus bis diapason resonat, ut haec descriptio docet:



De maxima et perfecta armonia.
§ XIII.

Restat nunc dicere de maxima et
or
10 perfecta armonia, quae IIII terminis disposita nobilissimam et principalem uictoriae format stacionem tres praescriptas in se continens medietates et omnium musicarum symphoniarum proportiones. Cuius dispositio talis 15 est: VI VIII VIIII XII. Hii ergo numeri solidi sunt, quia tribus interuallis distenti creuerunt .i. longitudine, latitudine, altitudine, sed non equaliter productis, quia alius ipsorum terminorum ab equali per equale equaliter, alius ab inequali per inequale inequaliter, alius ab inequali per equale equaliter, alius ab equale per equale inequaliter producitur. Siquidem semel bis tres VI creant ab 20 inequali per inequale inequaliter procedentes. Minus est enim semel quam bis et bis minus quam tres. Bis duo bis VIII generant ab equali per equale equaliter gradientes. Equaliter namque sunt bis et duo et bis. Semel ter tres VIIII faciunt ab inequali per equale equaliter exeuntes. Minus est enim semel, equalia ter et tres. Bis duo ter XII pariunt ab equale per equale 25 inequaliter prodeuntes. Equalia quippe sunt bis et duo, sed ter maius. Et ille quidem solidae quantitatis numerus, qui ab equali per equale equaliter procedit, cubus appellatur. Qui uero ab inequali per inequale inequaliter, scalenon grece, latine gradatus dicitur, eo quod de minore ad maius quasi per gradus exurgat idemque [2] speniscus .i. cuneolus appel- 30 latur, quod nulla ibi equalitas seruetur latitudinis uel altitudinis, sicut in cuneo, qui ad modum constringendae rei uel minuitur uel augetur. Inter hos medius est ille, qui neque cunctis partibus equalis est nec omnibus inequalis, sicut qui uel ab inequali per equale equaliter, uel ab equali per equale inequaliter procedit. Qui grece parallelipipedus uocatur, sed latina 35 glossa non uniformiter exprimi potest, nisi quod tantum exponitur is esse, qui alternatim positis latitudinibus continetur. Igitur in horum dispositione

---

2. diatss R. 19. ab equal*e per*] e *und* p *aus Correctur pr. m.* 26. quan[ti]tatis R. 29. *d. h.* spheniscos.

terminorum arithmetica proportionalitas inuenitur, si XII ad VIIII uel VIIII ad VI comparemus. XII autem ad VIIII sesquitercia proportione, VIIII ad VI sesqualtera. In utrisque autem ternarius differentia est et iunctae extremitates medietate duplae sunt. Si enim iunxeris VI et XII, XVIII facies, cuius medietas est nouenarius. Geometrica uero proportio est, si XII ad VIII uel VIIII ad VI comparemus. Utraque enim comparatio sesqualtera proportio est et, quod continetur sub extremitatibus, equum est ei quod fit ex mediis. Nam XIIes VI idem est quod VIIIIes VIII° .i. LXXII. Armonica quoque medietas hic inuenitur, si XII ad VIII et rursus VIII ad VI comparemus. Qua enim parte senarii octonarius senarium superat, eadem octonarius a duodenario superatur .i. tercia parte. Quatuor enim quibus octonarius a duodenario superatur, duodenarii pars tercia est, et II°, quibus octonarius senarium superat, senarii pars tercia est. Et si extremitates iungas VI scilicet et XII easque per octonarium medium multiplices, CXLIIII fiunt. Quod si se extremitates multiplicent, VI scilicet et XII, LXXII faciunt, cuius duplus est CXLIIII. Omnes ergo proprietates trium medietatum superius descriptas in hac dispositione, si rite perpendas, inuenire licebit. Inueniemus hic quoque omnes musicas consonantias. Denique VIII ad VI et XII ad VIIII comparati sesquiterciam proportionem reddunt et diatessaron consonantiam; habet enim maior numerus minorem totum et eius terciam partem. Item VI ad VIIII uel VIII ad XII comparati sesqualteram proportionem faciunt et [f. 93^{u}] diapente simphoniam; habet enim maior numerus minorem totum et eius alteram partem. XII uero ad VI comparati duplam proportionem efficiunt et diapason symphoniam, VIIII uero ad VIII considerati epogdoum faciunt, qui est tonus in musica. Habet enim maior numerus minorem totum et eius octauam partem. Huius descriptionis figuram subiecimus hoc modo:

SESQVALTERA. SESQVALTERA.
diap ente
diapente
VI VIII VIIII XII
diatesseron. tonus. diapente.
sesquitercia epogdous sesqualtera
diapason
dupla

20. diat͠ss R.



Quia uero in facienda uictoria aliqui disponuntur termini ex genere superpartienti, in quibus musicae proportiones non possunt inueniri, sicut supra praelibauimus, non inutile arbitror ostendere, quomodo et in ipsis utcumque terminis musica quoque speculatio deesse non possit. Dicit domnus Wido in micrologo suo talem distributionem neumarum in componendo cantu obseruandam, ut cum neumae tum eiusdem soni repercussione, tum duorum aut plurium connexione fiant, semper tamen aut in numero uocum aut in ratione tonorum ipse neumae alterutrum conferantur atque respondeant, nunc aequae aequis, nunc duplae uel triplae simplicibus, atque alias collatione sesqualtera uel sesquitercia. Cum per has quidem proportiones diuisio disponatur monocordi, hic tamen intendit ostendere, quod sicut in monocordo istis mensuris praedictae consonantiae colliguntur, ita in armonia neumae, quae non nisi ipsis consonantiis fiunt, etiam ipsis praecipue proportionibus consonent [2] et conferantur. Sicut ergo ille proportiones per diuersos numeros diuerse sibi conferuntur, sic in cantibus secundum diuersos numeros sonorum non consonantiarum diuersitatem uidere possumus proportionum. Vnde et numeros sonorum, seu consonantia sit seu non sit, ita considerare possumus, ut cum habeant duplam, sesqualteram uel sesquiterciam proportionem, etiam inuenire possimus triplam, quadruplam et quincuplam ac deinceps, superbipartientem quoque et supertripartientem seu superquadripartientem ac deinceps, sicque fiat, ut ex genere superpartienti constituta uictoria musica quoque ibi non desit per proportiones tantum sonorum, non consonantiarum. Quod ut exemplo manifestius fiat, quasdam symphonias secundum has sonorum proportiones compositas subiecimus.

[f° 94r.] In hac autem proportione sonorum quod decentius est, magis obseruare debes, uidelicet inter duas dictiones uel tres uel IIII^{or}, ut uerbi gratia una dictio talem numerum sonorum habeat, ad quem alterius dictionis numerus conferatur uel sesqualtera uel sesquitercia uel sesquiquarta siue dupla siue tripla siue quadrupla aut superbipartienti aut supertripartienti seu alia qualibet proportione. Vel etiam ad unius dictionis numerum duarum uel trium dictionum numerus conferatur supradictis proportionibus, sicut in hac antiphona uidere potes, quam exempli gratia apposuimus.

5. Guidonis Aretini Microl. c. XV. M. Gerbert Scriptores de musica II, p. 15.

---

8. tenorum R. 26. *Diese symphoniae füllen die 2. Columne und 2 Langzeilen von f° 94r.* 34. *Diese antiphona füllt 2 Langzeilen auf f° 94r.*

Vides ergo quomodo hec antiphona proportionaliter incedit. In osculetur enim VI sunt uoces siue soni, in me VIII°. Octo autem totum senarium in se habet et eius terciam partem .i. II°. Serquitercia ergo proportio est. In osculo IIII^{or} soni, in oris sui VI. Sex autem totum quaternarium in se habet et eius alteram partem .i. II°. Est igitur sesqualtera proportio. In quia sunt duo soni, in meliora IIII^{or}, et hec est dupla proportio. Sunt habet IIIes sonos, ubera tua uino VIIII, et est tripla proportio. Fraglantia V^{e} sonos habet, unguentis optimis XX, eque quadrupla proportio. Oleum VI habet uoces, effusum X et est superbipartiens, quia habet in se totum senarium et eius duas partes .i. IIII^{or}. Nomen V uoces, tuum VII habet. Septenarius habet in se totum quinarium et eius duas quintas, que proportio uocatur superbipartiens quintas. Ideo habet IIII^{or} sonos, adolescentule XI. Vndecim habet IIII^{or} in se plus quam semel et insuper eius IIIes quartas, que proportio dicitur triplex supertripartiens. Dilexerunt VIII° uoces, te nimis V; supertripartiens quintas est.

[Sequitur tabula]

FINIT . OPVS . FORTOLFI . AMEN.

---

13. XI] XX R, *aber die zweite* X *ist ausradirt. Fol.* 95^{u} *werden die symphoniae und die antiphona auf acht Langzeilen nochmals wiederholt, in berichtigter Abschrift. Diese theilen wir allein mit, ohne die kleinen Abweichungen, die sich oben finden.*

Bemerkungen zur Rythmimachie.

Omnia in mensura et numero et pondere constituisti! Sapient. XI, 21. Das wird man als Devise der Zeit die man Mittelalter nennt im ganzen, insbesondere des 11. bis 14. Jahrhunderts, betrachten dürfen. Die Geometrie mit den verwandten, untrennbar mit ihr verbundenen Wissenschaften, zunächst Arithmetik und Musik, ist das Centrum, von dem alle weitere Geistesthätigkeit ausstrahlt, und was das Mittelalter Grosses geschaffen, was es wirklich geschaffen, das ruht auf diesem Grunde. Die Geometrie galt diesem Zeitalter als Wissenschaft *κατ' ἐξοχήν*[1]), als Wissenschaft und Kunst des rechten Denkens, Glaubens, Lebens. Und will man den Ausdruck „Wissenschaft" bemängeln, da von wissenschaftlicher Auffassung allzumal das Mittelalter keine Ahnung gehabt, so wird man der Beschäftigung mit der überlieferten Geometrie doch nachrühmen dürfen, dass sie den wissenschaftlichen Sinn vor dem Ersterben gehütet, ihn im Halbschlummer bewahrt hat, für die Zeit, wo der Retter für dies Dornröschen erscheinen, wo das Licht eines neuen Tages es zum neuen frischen Leben wecken sollte. Wer sollte, sei er gleich Laie in den in Frage kommenden Wissenschaften, nicht den Reiz empfinden, dies Traumleben zu beobachten? Walther von Châtillon, der berühmte Dichter des Epos von Alexander dem Grossen, dem wir aber auch eine Reihe wirksamer lyrischer Ergüsse verdanken, in denen er gegen die Verderbniss besonders des Clerus seiner Zeit auftritt, gibt uns in dem verbreitetsten der letzteren, seiner Apocalypse[2]), folgende Schilderung:

5 Estiue medio dici tempore
umbrosa recubans sub Iouis arbore
astantis uideo formam *Pictagore*,
deus scit, nescio, utrum in corpore.

---

1) Isidorus Origg. III 1, § 1—2 nennt freilich die Arithmetik als erste: [Arithmeticam] scriptores secularium litterarum inter disciplinas mathematicas ideo primam esse uoluerunt, quoniam ipsa ut sit, nulla alia indiget disciplina. *Musica* antem et *Geometria* et *Astronomia*, quae sequuntur, ut sint atque subsistant, istius egent auxilio.

2) Die zehn Gedichte des Walther von Lille genannt von Châtillon, hrsg. von W. Müldener, Hannover 1859, n. IV, v. 5—22. Ich gebe die Verse nach meiner eigenen Collation der massgebenden Pariser Hds.



Ipsam Pictagore formam inspicio
10 inscriptam artium scemate uario.
an extra corpus sit hec reuelatio,
utrum in corpore, deus scit, nescio.

In fronte nituit ars *astrologica*;
dentium seriem regit *grammatica*;
15 in lingua pulcrius uernat *rethorica*;
concussis estuat in labris *logica*.

Est *arismetica* digitis socia;
in caua *musica* ludit arteria;
pallens in oculis stat *geometria*,
20 quelibet artium uernat ui propria.

Est ante ratio totius *ethice*;
in tergo scripte sunt artes *mechanice*.
qui totum explicans corpus pro codice
uolam exposuit et dixit: „Respice!"

25 Manus aperuit secreta dextere,
cumque prospexeram coepique legere,
inscriptum reperi fusco caractere:
DVX EGO PREVIVS ET TV ME SEQVERE.

Pythagoras also gilt ihm als Vertreter aller Wissenschaften; er ists, der ihn weiter zu neuen Gesichten führt; zunächst in ein anderes Land zu auserwählten Schaaren, unter denen einzelnen der Name an die Stirn geschrieben ist: das sind die Heroen der Wissenschaften und Künste; hier erscheint er selbst wieder neben Boetius und Euclides, dem einen als Vertreter der Arithmetik, dem anderen als dem der Geometrie, er selbst als der der Musik.

Wenn Pythagoras der mythische Heros der Wissenschaft, so tritt im Mittelalter als Lehrer neben ihn Boetius, der erste Lehrer des Mittelalters in Mathematik wie in Philosophie, einer Philosophie, die nicht Schemen nachjagt, sondern auf dem Boden der Wirklichkeit, des irdischen Leids erwachsen, das Herz erwärmt, der Rauheit der Zeiten gegenüber die milderen Gefühle des Herzens und damit die Gesittung rege zu halten sich eignete. Aber nicht zu allen Zeiten und mit allen seinen Schriften hat Boetius gleichmässig solchen Ansehens genossen, auch er hat eines Sospitators bedurft. Die Zahl der wohlerhaltenen Handschriften, die vor das 10. Jahrhundert

hinaufgehen, darf darüber nicht täuschen. Gerade die gelesensten Autoren sind es, von denen uns alte Hdss. fehlen. Wenn ich gleich für die Behauptung Hankel's[1]), dass vor Gerbert die Arithmetik des Boetius fast gar nicht citirt wird, nicht volle Verantwortung übernehmen darf — er hat nur ein Beispiel bei Rabanus gefunden — so meine ich durch die Citationen, die ich in des Abtes Lupus von Ferrières[2]) Briefen finde, dieselbe doch eher bestätigt als entkräftet und nur näher auf die Zwischenzeit zwischen Karl dem Grossen und Otto III. bestimmt zu sehen. Denn am Ende des 10. Jahrhunderts werden auf einmal die Spuren zahlreicher. Wenn die Nonne Hrotsuit von Gandersheim in ihren Comödien Pafnutius und Sapientia die handelnden Personen nicht blos boetianische Musik sondern selbst Mathematik vortragen lässt[3]), so beweist das schon Eindringen dieser Werke in den Klosterunterricht[4]); und dass dem wirklich so war, zeigt uns der Bericht, den Walter von Speyer, durch die Gnade Bischofs Balderich von Speyer (970—987) erzogen, über seine Studien erstattet in seiner im Anfang von Otto's III. Regierung verfassten Vita et Passio S. Christophori Martyris[5]). Ueber seine arithmetischen Studien spricht er dort I, 148 ff. folgende Worte, die allerdings zu ihrer vollen Lösung eines Oedipus zu bedürfen scheinen:

Rhythmica summarum praecessit quinque puellas: —
quae circumscriptis intende uocabula, lector,
150 haec quia dactylico non cernis idonea metro; —
primula multiplici caput irradiata metallo

1) Hankel Gesch. d. Mathematik p. 310 führt Rabanus bei Baluzius Misc. I, p. 7 an.

2) Lupi Ferrariensis epistolae ed. Baluzius. In ep. V p. 21 citirt er Boet. I 4 ex., I 31, II 2, und II 25.

3) In der Ausgabe von Barack p. 243 f., 279, vgl. R. Köpke Ottonische Studien p. 70 f.

4) Die Notizen über den Unterricht in den Stifts- und Klosterschulen, aus welchen die Gelehrten hervorgingen, sind doch nicht so selten, wie der Geschichtschreiber der Mathematik in Deutschland, C. J. Gerhard, (München 1877) p. 2 meint; und der Mathematik wird, wie das folgende Beispiel zeigt, in ihnen doch nicht so nebenbei gedacht. Aber freilich wer erst mit der Gründung der Universitäten das Studium der mathematischen Wissenschaften — ohne die unsere Dome doch wahrlich nicht gebaut worden wären — in Deutschland beginnen lässt (p. 4), wer auf so erhabenem Katheder steht, dass sich ein Gerbert ihm als Pygmäe darstellt, hat ein Recht über derartige Spuren die Nase zu rümpfen und ausführliche Lehrpläne modernster Art zu verlangen.

5) Zuerst publicirt von B. Pez Anecd. T. II P. 3 p. 37 sqq. Neu nach der Hds. hrsg. von Dr. W. Harster in der Beigabe zum Jahresbericht 1877/78 der k. Studienanstalt Speier. München 1878. 8°.

tardantem retro citius iubet ire sororem,
quae simul ad sociam conuersa fronte sequentem
inquit: Habeto meae tecum dextralia palmae;
155 hoc etenim speculi nostrae commendo sodali,
quam genui patria quondam statione locata.
Staret inornatis famularum quinta capillis,
ni sibi lacteolam praeberet tertia uittam.
ibant quamque sua comitum stipante corona,
160 et postquam planas limabant rite figuras
interuallorum mensuris et spatiorum
ordine compositis, cybicas effingere formas
nituntur mediumque uident incurrere triplum:
collatum primi distantia colligat una;
165 alterius numeros proportio continet aequa;
respuit haec ambo mediatrix clausa sub imo.
ordinibus mathesis gaudebat rite paratis
haec missura tibi solatia, clare *Boaeti.*

Ob diese Erscheinung bereits auf Gerbert's Einfluss zurückzuführen ist, ob in ihm der Drang seiner Zeit sich nur verkörpert darstellt — sicherlich verdient Gerbert jenen Namen als Sospitator des Boetius; und die Folgezeit erkennt das an und überträgt auf ihn so manches, was durch andere nach ihm gedacht und geschrieben worden.

Als Erfinder des Spieles, von dem unser Tractat handelt, wird bald Pythagoras, bald Boetius, bald Gerbert[1]) bezeichnet. Wir werden das ideale Recht darauf dem einen wie dem andern zugestehen müssen; bei Prüfung des wirklichen Anrechts könnte höchstens der letztere in Betracht kommen. Es mag ja einzelnes geben, was mit Recht, ohne dass ein directer Nachweis möglich, trotz aller Wandlungen, die das Mittelalter vorgenommen, auf Pythagoras zurückgeführt wird, wie das Pentagramm in seiner Wandlung zum christlichen Heilszeichen, wie die Sphaera Pythagorae, die zunächst, wie sie in der Redaction des Apuleius erhalten ist, nur über Leben und Sterben Kranker, dann in schlimmeren Zeitläuften auch über Sieg und

1) Pythagoräisches Spiel wird die Rh. von Neueren viel genannt, Boetius gilt dem Hermann Contractus als Erfinder, Gerbert wird von Boissier als solcher bezeichnet s. unten; Fabricius III 45 stellt Selenus' Ausgabe unter Gerbert's Werke. Chasles in seinem weiterhin erwähnten Briefe an Bethmann hat dagegen schon sein Bedenken ausgesprochen. Auf Pythagoras konnte schon Isidorus führen Origg. III 1, § 3: Numeri disciplinam apud Graecos primum *Pythagoram* autumant conscripsisse. Dazu kam die Wichtigkeit des unter dem Namen *tabula Pythagorica* allen bekannten Abacus.

Niederlage und in anderen Nöthen befragt wurde. Aber dann erscheinen doch die Spuren früher und nicht plötzlich in späteren Jahrhunderten. Von Boetius Schriftstellerei ferner haben wir doch zu genauen Bericht, als dass eine Sache, die erst in Handschriften vom 11. Jahrh. an uns bekannt wird, für boetianisch zu halten uns zugemuthet werden dürfte; und wenn wir dem Gerbert wirklich die Erfindung zutrauen dürften, so muss gerade jedes mit seinem Namen in Verbindung gebrachte Factum solcher Art peinlichster Prüfung ausgesetzt werden, ehe es glaubhaft für uns werden darf. Die handschriftliche Ueberlieferung indess giebt uns zu solcher gar nicht einmal die Veranlassung, und wir können über diesen Gedanken, der im 16. Jahrh. erst wie es scheint auftaucht, ruhig hinweggehen. Wie der Dichter der Vetula zum Erfinder des Schachspiels den Ulixes macht bei der Belagerung von Troia, wie Palamedes als inventor des ludus tabulae gefeiert wird in der lateinischen Anthologie[1]), so etwa sind die Genannten der Ehre theilhaftig geworden, Erfinder der Rhythmimachie zu heissen. Nur mit dem Unterschiede: sie mussten in der That dieser Erfindung vorausgehen, auf ihnen beruht diese Erfindung, selbst von Gerbert wird man das in obgedachtem Sinne behaupten dürfen; vor seiner Zeit konnte keiner daran denken[2]).

Und noch eins musste voraufgehen, das Schachspiel, welches nicht erst im 11. Jahrh. fleissig geübt wurde, aus dem uns Froumund's Zeugniss im Ruodlieb[3]) vorliegt[4]), sondern schon früher, wie ein Gedicht des 10. Jahrh. in Hagen's Sammlung beweist. Bald nach Gerbert, im ersten Viertel des 11. Jahrh., mag die Rh. entstanden sein; darauf führen die unten zu verzeichnenden Bearbeitungen, die von keinem Vorgänger ausser Hermann Contractus etwas wissen, soweit sie von Fabeleien absehen. Damit stimmt die Etymologie: es verräth der Name eine Unkenntniss des Griechischen und seiner Wortbildung, wie sie dieser Zeit eignet. Ums Jahr 1041 schrieb Anselm von Besate, Capellan am Hofe Heinrich III., eine *Rhetorimachia*[5]); der Gegenstand derselben ist so grundverschieden von unserer R. (der Verfasser, sich gegen einen fingirten Gegner mit allen Mitteln seiner Kunst vertheidigend, will ein Musterstück für den Unterricht der Rhetorik liefern), dass wir

1) Anthol. latina ed. A. Riese n. 82, 192—194.

2) Vor diese Zeit geht auch keine Notiz zurück. Isidorus hätte uns gewiss in dem 18. Buche des Origines eine Mittheilung gemacht. Ueber einen Missbrauch seines Namens s. unten.

3) Thörichter Weise dreht Boissier die Sache um und lässt das Schachspiel Gewinn ziehen aus der Rhythmimachie.

4) Carmina inedita ed. H. Hagen, Bernae 1877 p. 137 ff. aus Einsiedler Hdss. des 10. und 10—11. Jahrhunderts.

5) E. Dümmler, Anselm der Peripatetiker, Halle 1872, p. 20 ff.

den Titel ganz unabhängig, ganz ohne Anspielung auf die Rh., rein aus dem üblichen Sprachgebrauch seiner Zeit gebildet erachten dürfen; dazu tritt die Verwendung von ῥυθμός für ἀριθμός. Ich kann nicht glauben, dass dem eine missverstandene Stelle, des Martianus etwa IX 966 (p. 363, 9 Eyssenhardt), zu Grunde liegt:

Nunc rhythmos hoc est numeros perstringamus.

Kein Gelehrter hätte *rhythmos* so äusserlich mit *numerus* gleichgesetzt; davor war durch Kenntniss von Cicero und Quintilian, durch das Studium der Rhetorik jeder behütet. Dieselbe Veranlassung, die den Walter von Speier verleitet, *rhythmica* für *arithmetica* zu setzen, trägt hier die Schuld. Isidorus Origg. III, 1, § 1 sagt nämlich: *Arithmetica est disciplina numerorum; Graeci enim numerum ἀριθμόν uocant.* Ein verdorbenes ἀριθμόν der handschriftlichen Ueberlieferung dieser Quelle hat jenes Wort erzeugt.

Mir sind die geistigen und geistlichen Strömungen nicht hinlänglich bekannt, durch welche Wibold, Bischof von Cambrai († 965) veranlasst wurde, seinen Tractat *de Alea regulari contra aleam secularem*[1]) zu verfassen. — Es wäre wohl möglich, dass eine neue Zeitströmung das pythagoreische Spiel diesem Muckerspiel entgegengestellt hätte; wäre das aber auch nicht der Fall, so zeigt uns jene alea regularis s. clericalis, dass die Zeit, in welche ungefähr die Entstehung unserer Rh. nach dem vorgesagten zu versetzen ist, ein Bedürfniss nach ernsterem Spiel auch neben dem Schach empfand. Da Bethmann dies Spiel aus der Rh. sich entwickeln lässt, scheint es gerathen, ihren verschiedenen Charakter durch eine kurze Darstellung nachzuweisen.

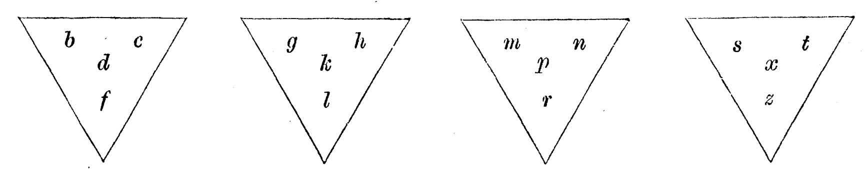
Die Alea regularis soll dem gewöhnlichen Würfelspiel Concurrenz machen. Drei Würfel, jeder mit 1—6 Punkten auf seinen Seiten versehen, geben 56 verschiedene Würfe; jeder derselben führt den Namen einer Tugend: an der Spitze aller steht Karitas (1. 1. 1.), ihr folgt Fides (1. 1. 2.). Spes (1. 1. 3.). Den Schluss macht als Sechspasch Humilitas. Auf einer Tabelle sind Würfe und ihnen entsprechende Tugenden in dieser Reihe verzeichnet. Anstatt der Punkte werden jedoch die Würfel mit den 5 Vocalen in der Reihe des Alphabets beschrieben (*Y* spielt nicht mit), so dass, da jeder Würfel 21 Punkte zählt, der erste mit *a* beginnt und endigt, der zweite mit *e*, der dritte mit *i*:

---

1) Gesta episcoporum Cameracensium c. 89 = Pertz Mon. hist. IX (Scriptt. VII) p. 433 ff., daraus abgedruckt sammt Bethmann's Noten in San Marte's Parcival-Studien III 203—211, leider durch einige böse Druckfehler entstellt. Houillon Le jeu du seigneur Wibold, Cambrai 1832, 8°, hat das Spiel in einem Gedicht dargestellt — mir unbekannt. Histoire litt. de la France VI 311—313.

I.	*a*	*ei*	*oua*	*eiou*	*aeiou*	*aeioua*
II.	*e*	*io*	*uac*	*ioua*	*eioua*	*eiouae*
III.	*i*	*ou*	*aei*	*ouae*	*iouae*	*iouaei*

So wird jeder einzelne jener 56 Würfe wieder einer Anzahl von Variationen fähig, unter denen den richtigen zu treffen Sache des Glücks ist. Es werden nämlich ferner auch noch die Consonanten (*qu* als zusammengesetzt fällt weg, *v* existirt nicht) auf die vier Flächen einer dreiseitigen Pyramide (Tetraeder) nach ihrer alphabetischen Folge vertheilt:



Beides, Würfel und Pyramide, werden nun zugleich geworfen und nun ist die oben liegende Fläche der ersteren, die unten liegende der letzteren massgebend, was dahin erklärt wird, dass die Consonanten dem Körper ähneln, der nach unten sinkt, die Vocale dem Geist, der in die Höhe strebt.

Nun zählt man die Points auf den drei Würfeln und sucht danach auf der Tabelle die entsprechende Tugend auf, sieht ferner zu, ob auf der Basis der Pyramide der erste oder ein anderer Consonant des Wortes sich findet: steht keiner da, so ist der Wurf misslungen, findet er sich, dann darf man weiter die Uebereinstimmung in den Vocalen prüfen[1]): wenn solche vorhanden, dann ist der Wurf gelungen.

Trifft ein Wurf des Gegners später dieselbe Tugend, so muss er sie dem, an welchen sie bereits vergeben ist, ohne Ersatz lassen. Besondere Schwierigkeit macht hier die Erlangung der Karitas, die für zwei Tugenden gilt. Da der Einerpasch nur *a e i* ergiebt, ist es dem, der ihn wirft, erlaubt, sein Glück in einem zweiten Wurfe zur Findung eines zweiten *a* zu versuchen. Sieger ist schliesslich, wer bis zum Ende am meisten Tugenden geworfen hat.

1) Wie weit die Uebereinstimmung gehen muss, da eine völlige doch bei Namen von 13 Buchstaben wie Perseuerantia unmöglich, ist aus der ungeschickten Darstellung Wibold's, die der Chronist wohl wörtlich übertragen hat, nicht zu errathen, die Einzelhandschriften, die freilich möglicherweise nur Excerpte aus der Chronik sind, hat Bethmann leider nicht beachtet, z. B. einen Bruxellensis, und die Erklärer lassen uns gänzlich im Stich, wenn sie nicht gar Thorheiten begehen, wie z. B. San Marte bei den Worten: *proiectis simul e manu cubis cum triangulo,* die einfach vom Wurf der drei Würfel sammt dem Tetraeder, hier *triangulum* genannt, zu verstehen sind.

Der Gewinnende gilt (ein Antrieb, sich dieselben anzueignen) aller Tugenden für theilhaftig; er soll bis zum sechsten Tage den Unterliegenden seinen Schüler nennen und die Tugenden, die ihm dem Ausgange des Spiels zufolge fehlen, durch gutes Verhalten sich zu erwerben mahnen; der Besiegte soll den Sieger als Magister ansehen; beide aber, falls keiner den Sieg davon trägt, einträchtig in der Liebe sich mit dem Brudernamen grüssen.

Wibold bemerkt am Schluss seiner Darstellung: *Quod si ludus uilescit aut animo tedium gignit, saltem* numerorum utilis coaptio *uirtutumque diligibilis inquisitio nec otiosa exercitatio mentem ad eum conuertant*, ut collatione numerorum exerciteris *uirtutumque cumulo gratuleris.* Der praktische Nutzen des Verstandesübung wird also neben der Tugendübung und zwar in erster Reihe betont. Das leistete die Rhythmomachie in viel höherem Grade — gar nicht zu gedenken, wie hoch interessant sie diesem Spiele gegenüber auch dem Unbegabtesten erscheinen musste — hätte Wibold sie gekannt, d. h. hätte sie bereits existirt, so würde er sein Spiel nicht erfunden oder ihm eine ganz andere Gestaltung gegeben haben[1]). Von einer Ableitung des einen vom andern kann natürlich trotz Bethmann's Andeutung gar nicht die Rede sein, da dort ein Bretspiel, hier ein Würfelspiel vorliegt.

So ist uns das Spiel also ein Beweis, dass in der Zeit der Cluniacenserreformen wohl ein Bedürfniss nach solchen Dingen rege war, zugleich aber auch davon, dass die Rh. nicht vor der Zeit Gerbert's erfunden ist.

Wir wollen der Alea gegenüber die Grundzüge der Rhythmimachie kurz skizziren.

Zu Grunde liegen dem Spiele die drei von Boetius ausführlich besprochenen, auch von Isidor Origg. III 6 § 5—8 dargelegten Zahlenverhältnisse der multiplices, superparticulares, superpartientes.

Die Definition derselben, „jener widerwärtigen antiken Benennungen der Verhältnisse“ (Hankel p. 353) lese man bei den Angeführten, deren Autorität sie es verdanken, dass man ohne Rütteln an ihnen so lange festgehalten, oder in Fortolf's Tractat nach. Die Darstellung des Ganges unseres Spieles meinen wir in Kürze für Leser, denen das Latein des Mittelalters weniger zusagt, geben zu müssen.

Gefunden werden die *superparticulares* aus den entsprechenden multiplices, die *superpartientes* aus den entsprechenden superparticulares, wenn man die Verhältnisse umkehrt und nach der Formel

$$a : a + b : a + 2b + c$$

rechnet. Beispiel seien die multiplices sescupli:

1) Eine etwas interessantere Modification giebt Th. Morus an, s. unten.

1, 6, 36,

man kehre diese um:

36, 6, 1,

daraus ergibt sich für die superparticulares sesquisexti:

$$36 : \underbrace{36 + 6}_{42} : \underbrace{36 + 2 \times 6 + 1}_{49},$$

aus der Umkehrung dieser (49 : 42 : 36) wiederum für die entsprechenden superpartientes (supersexipartientes):

$$49 : \underbrace{40 + 42}_{91} : \underbrace{49 + 2 \times 42 + 36}_{169}.$$

Ich schreibe für den Laien diese Verhältnisse bis zur Grundzahl 9 her, da ihre Zahlen für das Spiel benutzt werden.

Multiplices				Superparticulares				Superpartientes			
dupli	1	2	4	sesqualteri. . . .	4	6	9	superbipartientes .	9	15	25
tripli.	1	3	9	sesquitertii. . . .	9	12	16	supertrip.	16	28	49
quadrupli	1	4	16	sesquiquarti . . .	16	20	25	superquadrip. . .	25	45	81
quincupli.	1	5	25	sesquiquinti . . .	25	30	36	superquinquep. . .	36	66	121
sescupli	1	6	36	sesquisexti. . . .	36	42	49	supersexip.	49	91	169
septupli	1	7	49	sesquiseptimi . .	49	56	64	superseptip. . . .	64	120	225
octupli	1	8	64	sesquioctavi . . .	64	72	81	superoctip.	81	153	289
nonupli	1	9	81	sesquinoni	81	90	100	supernonip. . . .	100	190	361

Da nun aber

die erste Columne der multiplices lediglich aus der 1 besteht,

die erste Columne der superparticulares der dritten Reihe der multiplices, sowie

die erste Columne der superpartientes der dritten Reihe der superparticulares entspricht,

so lässt man diese weg und es ergeben sich dann 48 Zahlen, welche auf *Spielsteine* geschrieben in zwei feindliche Haufen gesondert werden, deren erster die pares, der andere die inpares, d. h. die auf gleiche oder ungleiche Grundzahlen zurückzuführenden Zahlen umfasst. Auf zwei gesonderten *Spielbretern* von je 8 × 8 Feldern findet sich für beide Parteien die Stellung genau vorgezeichnet. Beiderseits in der Mitte je acht *multiplices*, die pares von rechts nach links, die inpares von links nach rechts geordnet, so dass 2 und 3, 4 und 5, 6 und 7, 8 und 9 einander feindlich gegenübertreten, in zwei Gliedern, voran die der zweiten, dahinter die der dritten Columne. Seitwärts und hinter dem zweiten Gliede, die Breite des Brets einnehmend, stellen sich die acht *superparticulares* auf, im engen Anschluss also an die dritte Columne der multiplices, die ja zugleich ihre eigene erste

Columne bildete. Hinter dem Mitteltreffen bleiben vier Felder unbesetzt; auf die noch freien 2×4 Eckfelder werden die acht *superpartientes* vertheilt, im Anschluss an die ihrer ersten Columne entsprechende dritte Columne der superparticulares. Genaueres ersieht man aus der bildlichen Darstellung in Buch I c. 12 des lateinischen Tractats, oben S. 178.

Die Spielsteine selbst sind von verschiedener Gestalt und Farbe:

16 viereckige kleinere für die multiplices, weiss die pares, schwarz die inpares;

16 viereckige grössere für die superparticulares, roth die pares, weiss die inpares;

16 runde für die superpartientes, schwarz die pares, roth die inpares[1]).

Zwei von den runden sind jedoch kreiselförmig erhöht und zugespitzt. Sie stellen die Zahlen*pyramiden* dar, d. h. die durch die Addition quadratischer Zahlen gewonnenen Summen, die im Spiel nur durch zwei Exemplare, eins für jede Partei, vertreten sind:

auf der Seite der pares eine *perfecta pyramis* $= 91$,

(ihre Basis ist 36, ihre Spitze 1; 91 die Summe von $36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1$),

auf der Seite der inpares eine *tercurta pyramis* $= 190$,

(ihre Basis ist 64, die Spitzen 1, 4 und 9 sind abgeschnitten, die Zahl ist die Summe von $64 + 49 + 36 + 25 + 16$).

Es wird nun mit diesen Steinen Zug um Zug gethan abwechselnd von jeder Partei, wie es in den bekannten Bretspielen oder im Schachspiel geschieht. Welche Partei beginnt, darüber findet sich keine Vorschrift. Die Steine gehen gradaus, seitwärts nach rechts und links, übereck nach beiden Seiten. Die multiplices machen stets nur einen Schritt, die superparticulares zwei, die superpartientes drei.

Das Rauben der Steine des Gegners erfolgt nach folgenden Gesetzen:

1. Jeder Stein kann einen *quantitativ ihm gleichstehenden* des Gegners mit den ihm zustehenden Zügen rauben. Die Art des Schlagens ist dieselbe wie beim Schach. Die Anzahl dieser auf beiden Parteien gleichen Steine ist freilich eine geringe.

2. Wenn zwei Steine von A einen von B in die Mitte nehmen, deren Zahl die ihrigen durch Addition oder Multiplication miteinander erreichen, so schlagen sie den feindlichen Stein.

3. Wenn die Zahl eines Steines multiplicirt mit der Felderzahl, um die er von einem feindlichen absteht (das Feld des Angreifers wie das

1) Boissier will die drei Sorten lieber durch runde, dreieckige und viereckige tesserae bezeichnet wissen.

des Angegriffenen eingerechnet) die Zahl des letzteren ergiebt, so ist letzterer geschlagen.

4. Die *Primi et incompositi numeri,* unsere Primzahlen, wären also von diesem Schicksal stets ausgeschlossen. Sie dürfen nur dann gefangen, d. h. geschlagen werden, wenn sie von Gegnern so umdrängt sind, dass sie durch einen gesetzmässigen Zug nicht entweichen können. Schliesslich gilt diese fouea oder muscipula wohl für alle Zahlen; wer sich nicht mehr durch rechtzeitige Flucht vor Einschliessung retten kann, wird genommen.

5. Die Pyramiden werden beide durch den ihrer Basis entsprechenden feindlichen Stein genommen, durch 36 und 64[1]), auch nach dem unter 3. angeführten Gesetz, und mit der Pyramide fallen dann zugleich sämmtliche Steine, welche die Zahlen, aus denen sie zusammengesetzt ist, repräsentiren.

Es könnte scheinen, dass das Spiel eine grosse Geläufigkeit in der Kenntniss des Einmaleins voraussetze — und das kann selbst heute manchen abhalten, eine Probe mit diesem Spiele zu machen. Aber wahr ist doch, was Hankel sagt, dass man sich im Mittelalter nicht gerade mit dem Auswendiglernen desselben gequält hat. Man hatte stets, und so auch hier, wie der Tractat l. I c. 12 zeigt, das Cribrum zur Hand, ja an das Spielbret selbst angeheftet.

Man darf sich nicht wundern, dass sich in den Carmina burana neben dem Schach, dem Bret- und Würfelspiel, die dem lebenslustigen geselligen Menschen mehr *iocunditas* boten, unsere so viel trockenere Rhythmimachie weder erwähnt, noch wie jene abgebildet und besungen findet (Carmina Burana ed. Schmeller p. 244 f.). Die dort abgebildeten Spieler sind keine Mönche. In Verbindung mit Wein, Weib und Gesang zu treten, wie jene, dazu war unser Spiel nicht angethan. Was die Phantasie zu erregen vermochte, davon besass es nichts; mit der Liebe zu einer Vetula freilich, wie bei jenem Dichter, dessen Werk zum Spott unter Ovid's Namen sich verbreitet hat, liess es sich wohl einen. Wir treten dem Spiel damit wohl nicht zu nahe, dessen pädagogische Vortheile Leute wie Johann von Salisbury in früherer, in späterer Zeit Thomas Morus zu schätzen und zu rühmen wussten; geschah das doch im Gegensatz zu den oberflächlichen und unlauteren Vergnügungen der jungen Hofleute ihrer Zeit, besonders dem geistlosen Würfelspiel, und hier that ein Hinweis auf Ernsteres wohl noth.

---

1) Wenn der Stein, der die Zahl ihrer Basis trägt, vom Gegner genommen wird, bleibt die Pyramide trotzdem frei.

2) Ueber das Würfelspiel im Mittelalter vgl. San Marte in den Parcivalstudien III, p. 191—202. Ueber Alea in römischer Zeit: K. W. Müller in Pauly's Encyklopädie I, 319 ff., über Latrunculorum ludus: Teuffel ebenda IV, 824 ff.

Der Verfasser ist, wie sich für jene Zeit von selbst versteht, Mönch: *fraterna karitas extorsit opus*, sagt er im Prolog zum 2. Buche. Er ist wohl bewandert in den Schriften des Boetius, zunächst in dessen Arithmetik und Geometrie, und allerorten führt er die Stellen daraus an, auf denen sich das Spiel aufbaut. Auch Ptolomäus (II § 11) wird citirt, doch beruht das Citat ohne Zweifel auf Boetius de musica. Mehrfach erscheinen Stellen aus Horatius mit und ohne dessen Namen.

Auch über den Namen des Verfassers darf kaum Ungewissheit bleiben. „*Explicit opus Fortolfi*" heisst es am Schlusse, eine ungewöhnliche Art ohne Zweifel den Verfasser anzugeben. Indessen bin ich in der Lage, ein zweites Beispiel aus einer, etwas früherer Zeit, vermuthlich aber demselben Vaterlande entstammenden Handschrift anzuführen. Die Wiener Hds. n. 391 s. XI (nimmermehr s. X, wie Endlicher meinte) der Gedichte des Alcimus Avitus episcopus Viennensis trägt am Schluss des 6. Buches die Worte „*Explicit opus docti Alcimi*". Man kann den Anfang der oben erwähnten Schrift des Anselmus Peripateticus damit vergleichen: Hoc opus Anselmi collaudant subtitulati. Die That des Schreibers mit *opus* zu bezeichnen würde wohl auch schwerlich Jemand sich erkühnt haben. Der Name *Fortolf*, oder besser *Frotolf* (Nebenformen *Fruatolf*, *Frodulf, Frudulf*, von ahd. FRÔD prudens, wie Fruotbert, Fruotfrid, die Graff, Sprachschatz III 821 aufführt) erscheint nicht gerade häufig in Schriftwerken; die von Förstemann altd. Namenbuch I 435 gegebenen Nachweise, die nach Weissenburg, Corvey, Regensburg führen, habe ich näher zu prüfen nicht Gelegenheit gefunden. In Pertz Monumenta findet sich der Name auch nicht einmal. Ich suche den Mann in irgend einem der bayerischen Klöster, die in jenen Jahrhunderten rühmenswerthe Propagatores der Wissenschaften waren.

Fortolf ist nicht der einzige, der die Rhythmimachie in jenem Jahrhunderte zum besonderen Studium sich erkor. Weder für den Erfinder, noch ersten Bearbeiter giebt er sich aus. „Die Intention bei der Aufstellung des Spiels war, wie ich vermuthe, folgende," sagt er I § 3, und im Prolog zu Buch II bekennt er offen, aus Schriftwerken von Früheren das meiste geschöpft zu haben. Er überliefert das in möglichster Einfachheit in seinem ersten Buche: denn nicht Prahlerei, sondern der gemeine Nutzen[1]) bewegt ihn. Indessen konnte das Spiel wohl zu weiteren Erfindungen und Verfeinerungen verleiten, und wenn Neuere nicht vermieden haben, diesen Abweg zu betreten (erst Boissier rühmt sich die einfache Gestalt wieder hergestellt zu haben), wer wollte es dem grübelnden Klosterbruder verdenken,

1) Den Nutzen betont er zum öfteren, z. B. § 4: *confert scientiam multiplicandi et habitudines ipsorum numerorum cognoscendi*, *progressiones quoque pyramidum et differentias trium medietatum etc.*

dass er sich weiteres ausgeklügelt. Diese geistreichen, oder, wie es dem Laien scheinen mag, vielmehr spitzfindigen Entdeckungen, durch welche die *uictoria* verschönert werden soll, legt er uns im zweiten Buche dar und vertheidigt sie (im Prologe) mittelst einer Exposition über Originalität, die nicht uninteressant zu lesen ist.

Vor dem 11. Jahrh. hat der Verfasser nicht gelebt, wie u. a. sein Citat *„Wido in micrologo"* bezeugt; kann doch nur Guido Aretinus gemeint sein, dessen Lebenszeit um 1025 fällt, vgl. Fabricius bibl. med. et inf. lat. III 127 ed. Mansi. Ist nun gleich Guido rasch auch in Deutschland bekannt geworden, so verliert doch dies Citat für uns den Werth einer Zeitbestimmung von Fortolf's Schrift vor jenen Ausführungen, nach denen er auf den Schultern Anderer zu stehen bekennt. Diese Anderen nämlich haben frühestens zu Guido's Zeit, eher aber etwas später geschrieben. Die Handschrift des Fortolfus, die bei ihrer vorzüglichen Ausführung und der Reinheit von Fehlern als eine unter des Verfassers Aufsicht geschriebene, nahezu als Autograph gelten darf, berechtigt, ihn um die Wende des 11. und 12. Jahrhunderts anzusetzen. Des Verfassers Vertheidigung gegen Böswillige lässt sich aus den Verhältnissen dieser Zeit wohl erklären. Von Ignoranten werde, sagt er, das Spiel verachtet und mehr *levitas* als *utilitas* in ihm gefunden, weil die äussere Einrichtung des Spiels, die *camporum distinctio et tabellularum protractio* der alea nachgebildet erscheine. Aber weit entfernt sei es von *levitas*, es sei eine *iucunda utilitas* und *utilis iucunditas* zugleich; er weist entrüstet den Vorwurf der *uanitas* und *irreligiositas* zurück: *ea maxime reprehendunt quae nesciunt*, ausserdem sei es *inuidia*, was jene stachle. Und wie einst Cassiodorius[1]), so weist auch Fortolf, mit dem Salomonischen Ausspruch, den wir an die Spitze unserer Bemerkungen gesetzt, die ungerechtfertigten Vorwürfe seiner Gegner ab.

Der Codex der Breslauer Stadtbibliothek n. 54 (früher Rehdigerianus S. I 4, 5) membr. f. 86^r—94^v s. XII, besteht aus einem quaternio nebst einem auf beiden Seiten beschriebenen $^3/_4$-Stück eines Blattes; die acht Blätter des quaternio in doppelten Columnen, die scedula ohne Columnentheilung. Schöne saubere Hand des 12. Jahrhunderts in Schrift und Figuren. Vereinigt wurde dieser quaternio schon früh mit einer guten Hds. von Boetius de arithmetica s. IX (f. 1—85); denn aus dem 14./15. Jahrh. stammt die Inhaltsgabe auf dem Vorsetzblatte f. 1^r: *Item duo libri Boecij de arismetrica | Item liber qui dicitur Rithmimachia.* Die Züge verrathen eine deutsche Hand: leider ist sonst nicht das geringste Merkmal der Herkunft zu finden.

1) In der Vorrede zu seiner Encyklopädie. Opera ed. Garetius II 528^a.

Die Boetiushds. umfasst zehn von der Hand des Schreibers am Ende numerirte Quaternionen (f. 2—81) nebst vier Blättern (f. 82—85). Das Vorsetzblatt f. 1 gehört von Ursprung an dazu. Der Titel lautet f. 2r: INCIPIVNT DVO LIBRI DE ARITH|METICA ANITII MANILII SEVE | RINI BOETII VC ET ILL EXCSL | ORD PATR | DOMINO PATRI | SIMMACHO BOETIUS | IN dandis etc.

Auf die vier Tabellen, welche f. 84v = p. 172, 173 Friedlein den Schluss des Werkes bilden, folgen noch anderthalb Seiten Text. Die untere Hälfte von f. 85v ist leer gelassen (auf ihr steht eine probatio pennae von anderer Hand: Dominus iesus χp̃s postquam). Ein Explicit, ja auch nur eine Andeutung, dass das Werk schliesst, wird hier wie in den übrigen alten Hdss. vermisst; ein ziemlich sicheres Zeugniss, dass der Schluss des Werkes verloren ist.

Der erste Abschnitt jenes in den Ausgaben fehlenden Schlussstückes f. 85r lautet:

> Inter diatessaron et diapente. tonum differentiam quoniam si fuerint tres termini ita constituti ut secunda ad primum sesquitertia habitudine referatur. ad eundem autem primum tertius sesqualtera. Idẽ tertius ad secundum sesquioctaua proportione iungetur. ut sĩ VI. VIII. VIIII. Nam VIII. ad VI! sesquitercius est. VIIII. uero ad eundum senarium! sesqualter. VIIII. autem ad VIII! sesquioctauus. id ÷ epogdous. Qui iccirco dicitur differentia inter sesquitertium et sesqualterum! quoniam sesqualter id ÷ VIII. In octaua parte sesquitertia. uincit eundem sesquitertium.

Das sind, wie man sieht, erklärende Zusätze zur Arithmetik, wie sie nebst zahlreichen Interlinearglossen aus der Vorlage auf die Ränder der Hds. vom Schreiber übertragen worden sind[1]). Auch Varianten hat der Schreiber zwischen den Zeilen aufgenommen, z. B.:

	Text:	übergeschrieben:
p. 70, 18 Fr.	inueniatur,	in al' inuenitur
	Sit	in al' fit
„ 80, 18 „	ut superius distinctum est,	in al' dictum est
„ 79, 18 „	aequitas	in al' aequalitas
„ 83, 27 „	multiplicationis	in alt' multiplicitatis
„ 84, 21 „	dupla	in al' duplus
„ 87, 1 „	fingant	l' signant

1) Z. B. p. 80, 5 Fr. ∴ ENMUSITATON THEOREMA ∴ hoc est in carminibus dei uerbum. Aliter. inquisitio dei celsitudinis. — Lupus Ferrariensis a. O. citirt: *Nichomachus inmusitatum,* siue ut alibi reperi *enmusitaton theorema proficiens* etc. quae uerba graeca quam habeant proprietatem nescio si recte acceperim.

	Text:	übergeschrieben:
p. 87, 3	Fr. uno .V. uel decem	al' unos
„ 90, 11	„ additi tamen latitudini	al' addita al' altitudini
„ 92, 12	„ solus	al' in solis
„ 93, 4	„ procreabuntur	in al' in se procreabnt~
„ 93, 5	„ ut haec	in al' hic
„ 93, 5	„ Primum omnium ponent id quod	in al' & primum omnium ponenti
„ 93, 8	„ quae	in al' qui
„ 93, 11	„ ipse	al' ipso

u. s. w.[1]) Friedlein's Ausgabe, an deren Text mit Recht von H. Düker (Der liber mathematicalis des heil. Bernward im Domschatze zu Hildesheim, Progr. Hildesheim 1875. 4⁰. p. 10) ausgesetzt wird, dass in ihm keine feste Norm befolgt ist bezüglich der Handschriften, wird einer Revision bedürfen; die Rhediger'sche Handschrift, die der zu früh der Wissenschaft entrissene Gelehrte nicht benutzen konnte, dürfte für eine solche ein schätzenswerthes Hülfsmittel bilden.

1) Wie für die Uebertragung von Interlinear- und Marginalnoten, so ist auch in einer weiteren Hinsicht die Hds. interessant. Neuerdings ist von Leopold Delisle (Notice sur un mst. mérovingien . . d'Eugyppius. Paris 1875 p. 7) wieder auf die Vertheilung der Quaternionen einer Vorlage unter mehrere Schreiber aufmerksam gemacht worden, die sich theils in leeren Spatien, theils in Ueberfüllung der letzten Seiten mancher Quaternionen zu erkennen giebt. Ein solches Auseinandernehmen einer vielleicht anderwärts her entliehenen Handschrift halte ich nur in ganz vereinzeltem Falle für denkbar; für zahlreichere Fälle wird die von unserem Schreiber angewendete Methode Geltung finden, die auf der Ungefügigkeit des „Schreibleders“ beruht: er richtet sich völlig nach der Quaternionen-, Lagen-, Blatt- und Seitentheilung seiner Vorlage; beschreibt den zurechtgelegten Quaternio nicht von Seite 1—16, sondern lagenweise, zuerst f. 1^{r} dann 8^{v}, 1^{v} und 8^{r}, 2^{r} und 7^{v}, 2^{v} und 7^{r} u. so fort; so kann er jede Lage, damit die Schrift wohl trockne und keine Unsauberkeit entstehe (und wie selten ist ein Abdrücken feuchter Schrift selbst beim dicksten Auftragen des „Schreibsaftes“ in den älteren Hdss. zu bemerken) bei Seite schieben. Auf solche Weise ist die auffällige Uebereinstimmung der Seitenabtheilung in der Ueberlieferung zahlreicher Autorentexte leicht erklärt. Der Beweis für die Boetiushds. liegt in folgendem: Das Vorsetzblatt (f. 1) ist Fragment einer von demselben Schreiber geschriebenen, wegen eines Versehens cassirten Lage, welche das 1. und 8. Blatt des Quaternio .III. zu bilden bestimmt war: die Rückseite ist nämlich beschrieben Wort für Wort, Glosse für Glosse mit dem Inhalt von f. 18^{v}; der im Falz liegende Rest des einst dazu gehörigen Blattes zeigt vorn die Zeilenanfänge von f. 25^{r}, auf der Rückseite die Zeilenschlüsse von f. 25^{v}. Der Fehler hat ersichtlich in dem Einmaleins (p. 53 Friedl., f. 25^{v} unserer Hds.) stattgefunden. Auf der Vorderseite (f. 1^{r}) ist die Schrift säuberlichst mit Bimstein getilgt, dennoch erblickt man, aufmerksam geworden, die Spuren besonders der letzten Zeile von f. 18^{r}.

Die Bearbeitung des Fortolfus, die ich aus der alten und guten Rhediger'schen Handschrift mittheile, findet sich auch in einem Bruxellensis n. 927 s. XIV. Vielleicht giebt auch die Hds. von Avranches (Abrincensis) n. 145 mbr. s. XII in 8⁰. dieselbe Fassung; wenigstens werden aus diesem citirt die Worte „*Ritmomachia id est pugna numeri.* Indessen ist das ein gar zu geringer Anhalt, auch Oddo's unten zu nennende Bearbeitung beginnt: *Rhythmimachia graece, numerorum pugna exponitur latine.*

Von den berühmteren Namen, auf welche die Tradition Bearbeitungen der Rhythmimachie zurückführt, dürfen wir als leidlich begründet nur den des *Herimannus Augiensis* oder *Hermannus Contractus* nennen, wenn gleich Trithemius' Zeugniss nicht die genügende Gewähr bieten sollte. Ueber ihn und seine Werke vgl. Fabricius III 237 f., A. Potthast Wegweiser durch die Geschichtswerke des europäischen Mittelalters p. 364, Wattenbach, Deutschlands Geschichtsquellen im Mittelalter, 4. Aufl. II 36 ff., Giesebrecht, G. d. deutschen Kaiserzeit II 523 f. Als sein Todesjahr wird 1054 angegeben. Das Jahrhundert also, in welches sein Leben fällt, seine genugsam erwiesene Theilnahme an den mathematischen Bestrebungen seiner Zeit könnten Trithemius und seiner Zeitgenossen Zeugniss stützen, oder, wenn dieses nur auf eine Muthmassung sich gründen sollte, indem sie die Rhythmimachie mit mathematischen Werken des Herimannus in derselben Handschrift vereinigt fanden, diese Muthmassung zur höchsten Wahrscheinlichkeit erheben. Eine solche Handschrift ist die, welche G. Libri in seinem Cataloge[1]) 1859 p. 103 f. unter n. 483 verzeichnet hat:

483 Hermanni Contracti Liber de compositione Astrolabii — Incipit Rithmachia, Incipit: „Nomen materia intentio finis — Libri Almogesti Ptolomei Philudensis (Abbreviatio seu Capitulatio) — Rhetorica et Grammaticalia quaedam. 4to. SÆC. XII on vellum. . . . The present manuscript contains a text of the *Liber de Compositione Astrolabii* quite different in the general disposition as well as in the details from the two works (*De Mensura Astrolabii* and *De Utilitatibus Astrolabii*) published both by Pez [Thesaurus anecd. III] and M. Migne [Patrologiae cursus completus vol. 143]. For instance the manuscript begins with *quicunque astronomicae peritiae*, and contains a portion of the *Liber primus* of the work published under the title of „*De Utilitate Astrolabii* (Migne vol. 143 col. 389) and then gives the *Liber de compositione Astrolabii* published by M. Migne under the same title of *De Utilitatibus Astrolabii*,

1) Catalogue of the extraordinary collection of splendid manuscripts chiefly upon vellum in various languages of Europe and the East formed by M. Guglielmo Libri, the eminent collector, who is obliged to leave London in consequence of ill health, and for that reason to dispose of his Literary Treasures. 1859.

in the volume allready quoted (col. 389). But there are great differences between this manuscript and the edition. Besides the work, *De Mensura Astrolabii*, as printed, the manuscript contains some additional matter, followed by several chapters, the first of which forms in the edition (col. 405) the *caput primum* of the second book, *De Utilitatibus Astrolabii.* The tables also offer considerable variations.

Obwohl diese Beschreibung des ersten Theils der Hds. manches zu wünschen übrig lässt, habe ich sie mittheilen zu müssen geglaubt, da sie bei Vergleichung anderer Hdss. des Hermann von Nutzen sein kann, der Catalog aber selten ist[1]). Bezüglich der Rhythmimachie „a work of great importance for the history of arithmetic and of the composite or figurative numbers" fasst er sich kürzer. Der Text hat nichts mit dem der Ausgaben Rom 1482, Paris 1496 (wiederholt 1510), oder dem der Hds. von Montpellier zu thun; eine Stelle aus dem 1. Capitel lautet:

„Non enim aliter arismetice opus rithmachia representat, quam musica in cytharis et organis, et geometria in abaci opere et astronomia in horoscopis et astrolabii sollertia consistit. Inuentor ludi huius apud Romanos Boetius fuit, quemadmodum arismetice apud Grecos Pytagoras et Nicomacus et alii quapropter his premissis ad negotium transeamus."

Geschrieben scheint die Rh. von derselben Hand, wie die Schrift über das Astrolabium, auf die sie unmittelbar folgt; denn „the abridgment of Ptolemy and the *Rhetorica,* consisting of five columes, closely written, are in a different, alttough ancient hand-writing".

Weitere Bestätigung für Hermann — so weit spärliche Mittheilungen über Hdss. Schlüsse gestatten — und ein neues interessantes Zeugniss, dass man sich in Süddeutschland angelegentlichst mit der Darstellung unseres Spieles befasste, gewähren uns die Mittheilungen aus Bethmann's Papieren in Pertz Archiv XII 232. Danach befindet sich in der „eigentlichen" *Vaticana* unter n. 3101 membr. in 4^0 eine im Jahre 1077 von Benedictus Accolytus mon. S. Arsacii — also im Monasterium Ilminense? — geschriebene „Ritmachya" (sic!). Ihr Anfang lautet: *Quinque genera inaequalitatis ex aequalitate procedere manif.*[2]) — Später liest man: *Huiusmodi conflictum quidam*

1) Mich hat Herr Prof. M. Cantor aufmerksam gemacht und die Güte gehabt, aus dem Heidelberger Exemplar die ganze auf obige Hds. bezügliche Stelle abzuschreiben.

2) Diesem Anfang zufolge könnte Vindobonensis 5216 f. 59^a—62^a chart. s. XV mit dieser Bearbeitung verwandt sein. Als Titel wird angegeben: *„De ludo Richomachie" siue tractatus de proeliis;* er beginnt: *Quinque genera inequitatis ex equitate* — und schliesst: *Si quis hec plane uiderit, Richomachiam scire ualebit.* Es folgt eine tabula ludum repraesentans.

ex clero Wirciburgensi, si periti iudicent, dabit posteritati. Sit tabula — ac si tuus sit. Die Hds. des Benedictus enthält vielleicht dasselbe Werk wie die der Libri'schen Sammlung, von der thöricht genug die den Anfang bildende Rubrica (Nomen materia intentio finis), aber doch nicht der Anfang selbst mitgetheilt wird: indessen aus dem Titel *Ritmachya* statt *Rythmimachia,* könnte man einiges schliessen: die Benennung *conflictus* stimmt auffällig mit dem von Trithemius gegebenen. Die Hoffnung, in den folgenden Worten eine Hindeutung auf unsern Fortolf und damit den Ort wo er sein Werk verfasste zu gewinnen, muss so rasch wie sie aufgetaucht, schwinden. Ein Codex *Abrincensis* nämlich (Pertz Archiv VIII 383), der die *Compositio astrolabii secundum Hermannum* enthält nebst andern Schriften, die wohl auch von ihm herrühren könnten, veranlasste M. Chasles in Chartres in einem Briefe an Bethmann gelegentlich der Vermuthung, dass die Ritmachya des Vaticanus gleicherweise auf diesen Mann zurückgeführt werden könne, die oben ausgehobene Stelle vollständiger aus Cod. Parisinus 7377 C. mitzutheilen. Daselbst lautet sie: *Huiusmodi conflictum quidam ex clero Wirzeburgensi* nomine Asilo *si periti indicentur* [leg. *iudicent*] *dabit posteritati.* Am Rande aber stehen die Verse:

Nomen id expelle, quod dicis cęsar Agelle.
Asilo dicor ego, cui si mihi grammata tollo,
A remanebit et O; quid erit praestantior illo?

Die Verse beziehen sich zweifelsohne auf ein Factum: einen Besuch, den der Kaiser, bei welchem jener Asilo in Gunst stehen mochte, in Würzburg abstattete. Von dem freimüthigen Humor im Verkehr der jüngeren und älteren Klosterinsassen mit geistlichen und weltlichen Vorgesetzten hat uns ja die Klosterchronik von St. Gallen eine Reihe hübscher Beispiele bewahrt (vgl. Casus St. Galli c. 14, 26, 94, 123, 147). Zunächst bedürfen die Verse der Besserung; man muss im ersten *Aselle,* im zweiten *cum* SIL, statt *cui si,* lesen:

Nicht Esellîn, Herr Kaiser, mit Verlaub!
Nennt Asilo mich! wenn das SIL ich tilge,
Bleibt *A* und *Ω*: wer rühmt sich edlern Namens?

Da Asilo nur Hypokoristikon für Adalbert und Adalbero ist[1]) — wofür auch Azilin, Ascelin[2]), Ezilin und gerade Mitte des 11. Jahrh. Aezelin vorkommen —, so könnte man füglich an *Adalbero*, Grafen von Lambach

1) Vgl. Förstemann, Altd. Namenbuch I 192; F. Stark, die Kosenamen der Germanen p. 92 f.
2) Auch Adalbero Bischof von Laon 977 wurde Ascelin genannt.

denken, der zu Paris gebildet, Stifsherr am Dome zu Würzburg, durch Kaiser Heinrich's III. Vertrauen den Bischofsitz bestieg 1045 († 1090). Dieser Kaiser aber galt seinerzeit selbst hochgebildet als vielgefeierter Gönner der Wissenschaften[1]).

Wer Asilo immer sein mag, — sein Licht wird er nicht unter den Scheffel gestellt haben bei dieser Befürwortung, zumal wenn dieselbe wirklich von Hermann ausgegangen ist — so wird man kaum den Gedanken zu kühn finden dürfen, dass eine vierte Bearbeitung, aus dem 11. Jahrhundert, die wie es scheint ziemliche Verbreitung gefunden hat, von ihm herrühre. In jenem Vaticanus folgen unter anderen Werken kalendarischer Art die *regula metiendae sperae* von *Gerbert*, der *Compotus Hermanni Sueui* mit desselben *Prognostica, Ratio de obseruatione quattuor temporum Gerungi et Berni, Helpericus de computo,* gegen das Ende endlich eine Schrift De arte aritmetica „Quisquis peritus etc.“. Letztere ist vielleicht identisch mit einer Regula de rithmimachia *„Quisquis peritus arithmetice huius inuenti noticiam*[2]) — *sescuplet“,* die sich in dem Fragmentbande Vatic. Christ n. 598 auf einem Quaternio s. XI hinter einer Interpret. arabic. nom. astrolabii, Recepten zu Farben, Goldschrift u. a., Beschwörungen, Horologium regis Ptolomei (Pertz Archiv XII 297), ferner in zwei Pariser Hds. unbekannter Datirung (Paris. 7185 und Arsenal-Bibl. Sciences et arts n. 55, s. Pertz Archiv VIII 383)[3]), endlich in der Handschrift von Montpellier n. 366 membr. in 4^0 s. XIV (nach andern Angaben s. XII, s. Albrecht von Halberstadt, hrsg. v. Bartsch p. VII). In dieser soll die Rhythmomachia als Bestandtheil der oben citirten Vetula hinter letzerer stehen und zwar unter dem Namen des Hermannus Contractus — ein leicht erklärlicher Irrthum bei der Verbindung, die, falls die Vermuthung gegründet, zwischen beiden Männern bestand, und der Verbindung, in die die beiderseitigen Werke in den Handschriften traten.

Ausserdem haben wir aber noch eine gedruckte Bearbeitung, die unter bestimmter Namenangabe überliefert ist:

Regulae domini Odonis de Rhythmimachia.

1) Für die Abfassung von Hermann's Tractat würde sich daraus eine genauere Datirung, vor 1045, ergeben. Der Name sammt der Anecdote können immerhin, ohne dadurch an Glauben zu verlieren, in späteren Abschriften von Hermann's Werk durch einen anderen zugesetzt sein. Ueber Adalbero s. Wegele in Allg. deutsche Biographie Bd. I; Budinszky, die Universität Paris und die Fremden an derselben im Mittelalter, Berlin 1876 p. 115.

2) *Cupit habere* lauten die folgenden Worte in der nachstehend angeführten Hds.

3) Eine jedenfalls von diesen verschiedene Pariser Hds., St. Victor Paris. Cod. 620, führt Le Beuf Dissert. II 91 an.

Sie beginnt: *Sesquialtera proportio est, quando numerus maior* — und schliesst: *quot unitates singulae continent pyramides in latere. Finiuntur.*

Martin Gerbert hat dies Stück aus einer Wiener Hds. s. XIII (jedenfalls Vindobonensis 2503) herausgegeben Scriptores eccles. de musica I p. 285—295. Aus derselben Hds. giebt er p. 296—302 *Regulae domni Oddonis super abacum,* die wie schon Hankel p. 318 Anm. meinte, ganz unbegründeterweise dem Oddo von Clugny zugeschrieben werden und nicht vor das 11. Jahrh. zurückgehen, ferner p. 303 *Eiusdem Oddonis quomodo organistrum construatur.*

Aus derselben Wiener Hds.[1]) gibt Gerbert I 25 ein Fragment der Rhythmimachie: „Hoc Excerptum est de Rhythmimachia *„Sunt numeri qui consonantias creant uel per quos ipsae discernuntur —"*, Schluss: *Nam diapente et diatessaron iunctae diapason consonantias creant."* Dies Stück findet sich auch im cod. lat. Monacensis 6369, einer aus Freisingen stammenden Hds. s. XI, f. 65—66. In beiden Hdss. geht voraus: *„Sententiae Isidori Episcopi ad Braulionem Episcopum de musica,* Excerpte aus Isidor's Origg. III c. 14—22, abgedruckt bei Gerbert I 19—24); man hat darum auch für das Fragment der Rythmimachie Isidor's Namen in Anspruch genommen, während es eine wörtliche Abschrift einiger Capitel von Oddo's Werk ist, die sich p. 287 f. bei Gerbert finden.

Man könnte nun meiner Ausgabe des Fortolfus die Berechtigung absprechen, da es gerade genug sei, die Grundgesetze einmal in Druck vor uns zu haben, die Tüfteleien der weiteren Bearbeiter aber geringen Werth beanspruchen dürfen. Und in der That, wenn wir an Oddo's Rh. das hätten, was solche Einwendungen voraussetzen, dürfte ich nicht in der Lage sein, sie völlig zurückzuweisen. Wie aber Martin Gerbert aus seiner Hds. sie gegeben hat, ist sie ein wirres Durcheinander. Es beginnt der Tractat ohne Vorbemerkung mit Behandlung der Proportionen, danach wird plötzlich eine Tabula beschrieben, erst auf der siebenten von elf Druckseiten wird der Name des Spiels genannt und erklärt. Dort nämlich p. 291, 1 ist in Wahrheit der Anfang und von ihm geht es leidlich in Ordnung fast bis p. 295, 2; dann erst müssen die Seiten 285, 1 bis 291, 1 folgen, die sich aber in trostloser Confusion befinden, die im einzelnen zu entwirren ich mir versagen muss; ich will nur aufmerksam machen, wie p. 286, Col. 2, Zeile 3 mit den Worten *siue per angulos fiat in directum* plötzlich in ein ganz anderes Capitel hineingefahren wird. Die Disposition des Werkchens findet sich p. 293, 1 in der zweiten Hälfte: danach kann man leicht den Faden durch

1) In ihr steht auch der Dialogus Oddo's, für den Gerbert (p. 252 ff.) einen anderen Vindobonensis benutzt hat, wie er Praefatio f. e^{v} angiebt; cod. 2503 scheint nämlich auf p. 259 col. 1 med. mitten im Stücke abzubrechen.

das Labyrinth finden, wenn gleich hier und da die Verbindungen verloren zu sein scheinen. Der Text selbst ist äusserst verderbt und M. Gerbert hat dem Stücke wenig Mühe zugewendet, so dass grobe Fehler, wie z. B. p. 293, 1 Zeile 2 v. u. *deterosi* statt *de cetero si,* p. 286, 1 Z. 12 *non ita* statt *nisi ita* stehen geblieben sind u. a.

Die Altersangabe der Münchener Hds, s. XI, würde uns nicht abhalten dürfen, zunächst an Oddo abbas Morimundensis, † 1161, als Autor der Rh. wie der anderen bei Gerbert unter Oddo's Namen aufgeführten Stücke zu denken. Unbezweifelt wird diesem ein Tractat *de sacris numerorum mysteriis* zugewiesen, der z. B. im cod. Vindobonensis 1418 s. XII erhalten ist. Vergl. Fabricius Bibl. med. et inf. lat. V p. 159 ed. Mansi. Aber man muss doch die grosse Zahl von Schriftstellern dieses Namens in jenen Jahrhunderten bedenken, die längst nicht alle von Fabricius aufgezählt, und deren vielseitige Thätigkeit, wenn sie genannt sind, von dem berühmten Litterator doch nicht immer erschöpfend angeführt ist; als Beispiel mag der auch von M. Cantor genannte, in so vielen Beziehungen rühmenswerthe Odo von Tournay dienen[1]); das räth uns, nur auf die sichersten Angaben und bestimmtesten Beweise hin die Zuweisung von Schriftwerken vorzunehmen. Mir scheint ausserdem der Tractat selbst nicht gegen, sondern für eine frühere Zeit zu sprechen, als den Ausgang des 11. Jahrhunderts. Freilich Odo von Clugny, an den Martin Gerbert gedacht, hat wieder viel zu früh dafür gelebt (Abt 927—942) und auf des einzigen Anonymus Mellicensis Zeugniss hin möchte ich ihn selbst nicht zum Verfasser eines Werkes über Musik machen; dass der Horizont seiner Studien über die Theologie hinaus sich erweitert habe[2]), müsste durch zuverlässigere Angaben erwiesen werden.

Aber Odo giebt uns ja selbst einigen Anhalt seine Zeit zu bestimmen. In der Einleitung p. 292, 2 sagt er: *Nos uero uelut rudes intellectu, qui huius nouellae plantationis nondum satiamur fructu, ipsius tamen pomi dulce fragrantis per ipsius exteriorem non (notitiam?) dulcedinem interiorem palati adhuc esurientis summatim praelibauimus gustu. — Tentemus saltem leuiora,* sagt er ferner in der Einleitung p. 293, 1, *quibus haud posse subest prius discutere difficiliora, nec nisu temerario ea quae ipse huius artis panditor studiose inuestigata, ut omnium liberalium artium imbutus scientia, (in) notitiam futurorum stilo haud paruipendendo patefecit, repetamus. Sed*

1) Hist. litt. de la Fr. VII p. 95 sq. vgl. p. 137. M. Cantor Mathem. Beiträge z. Kulturleben der Völker p. 332.

2) Ich glaube hier mit den Resultaten M. Cantor's in seinem „Odo von Cluny" überschriebenen Capitel (Mathem. Beitr. p. 292 ff.) mich eher in Uebereinstimmung als in Disharmonie zu finden.

salua ipsius personae auctoritate ex eiusdem [et] scriptionis prato flosculos mellifluos legentes nostrae ignorantiae utiles recondamus. Caeteras uero rhythmimachiae normas ibidem pleniter subtitulatas memoriae non subtrahamus. Ibi namque praelibati conflictus certamen, siquod libeat, poterit cognoscere etc.

Dreierlei geht daraus hervor: Erstlich ist nach seiner Ansicht, die mit unseren bisherigen Erfahrungen stimmt, die Rhythmomachie eine Erfindung jüngster Zeit. Zweitens aber hat er für seine Darstellung einen Führer sich erwählt, den er als einen Meister in den sieben freien Künsten und als *huius artis panditor* bezeichnet — ich gestehe, ich habe diesen Ausdruck anfangs falsch gefasst und sogleich auf Hermann Contractus bezogen, denn nur auf ihn und keinen andern Zeitgenossen konnte dies Lob sich beziehen[1]). Ich glaube nun geirrt zu haben. Das Wort *panditor* findet sich in den Lexicis, selbst im Du Cange nicht, und dennoch ist es richtig: Odo hat es dem Guido entlehnt, der am Schluss des Micrologus c. 20 (M. Gerbert II, p. 24, 2) die Worte hat: *Hinc enim incipiens Boetius panditor huius artis multam miramque et difficillimam huius artis concordiam cum numerorum proportione demonstrauit.* Und nicht blos das Wort, sondern auch die Beziehung selbst: Odo meint keinen anderen als den Boetius, auf dessen Lehren die Rh. sich aufbaut. Von Odo von Clugny kann also als Darsteller der Rhythmomachie nicht ferner die Rede sein. Vielleicht erstreckt sich dies Resultat nun auch weiter auf die anderen musikalischen Schriften, die unter diesem Namen gehen.

Als Führer in seiner novella plantatio, der Rhythmomachie, dürfen wir trotzdem den Hermann nicht aufgeben. Das geht zum dritten aus dem Gebrauch des Wortes *conflictus* hervor, der der Bearbeitung des Reichenauer Mönchs zu eignen scheint. Es kann hier die Erinnerung nützen, dass wir letzterem auch ein Gedicht unter dem Titel *Conflictus ouis et lini* verdanken[3]). Bei einem häufiger gebrauchten Worte, wie pugna, würde ein solches Zusammentreffen sehr gleichgiltig sein; bei dem wie es scheint ziemlich seltenen Vorkommen des in Rede stehenden wird man dem Beachtung schenken müssen. Und Oddo hat nicht zufällig an obiger Stelle dies Wort gesetzt, es kehrt bei ihm wieder p. 286, 2 in der 4. Zeile des Abschnitts *Nemo existimet*[3]).

Ich habe unter dem Texte des Fortolfus mehrere Stellen angemerkt,

---

1) Es ist doch ein grosser Unterschied, ob man jemand unter vier Augen rühmt, wie Hugo Metellus den Gerland Canonicus von S. Paul in Besançon in der Briefanrede: *Scientia triuii quadriuiique onerato et honorato*, (Hist. litt. de la France VII 138) oder vor der ganzen gelehrten Welt seiner Zeit.

2) Reiffenberg im Annuaire de la bibl. de Bruxelles, 1844 p. 80—86.

3) In der Folge ist das Wort wohl häufiger gebraucht worden. Bekannt sind mir Hildeberti Cenomanensis (geboren 1055) *liber de querimonia seu* con-

wo letzterer wörtlich mit Odo übereinstimmt; es mag noch mehrere der Art geben, ja es müsste noch eine ganze Reihe derselben sich vorfinden, wenn Odo's Text unverstellt erhalten wäre oder der letztere seiner übernommenen Verpflichtung so sorgsam nachgekommen wäre, wie Fortolf. Es ergiebt sich aus der ganzen Haltung beider Werke, dass nicht Fortolf den Odo, nicht Odo den Fortolf ausgeschrieben, sondern dass beide einer und derselben Vorlage in jenen Stellen, d. h. in den Grundgesetzen des Spiels, gefolgt sind, welche klarer und knapper wiederzugeben kaum möglich war; ein Verfahren, das unter die Rubrik der gestatteten Plagiate nicht blos jener Zeit gehört. Der Autor, dem beide entlehnen, was sie brauchen können, ist unzweifelhaft Hermann, und in seiner Rh. müssten sich diese Stellen wiederfinden; die Schrift, in der sie nachweisbar originaliter stehen, muss Hermann's Schrift sein.

Der Verfasser der von Gerbert edirten Bearbeitung hat also offenbar in geringem zeitlichen Abstande von Hermann dem Lahmen gelebt; näheres über ihn festzusetzen, zunächst ob er wirklich auf den Namen Odo Anspruch erheben darf, ist Sache weiterer Handschriftenforschung.

Du Cange führt nach einem mir nicht zugänglichen Werke von Abbé Le Beuf (Var. Script. II p. 85) einen Tractat über unser Spiel von *Wilhelmus Tegernseensis Scholasticus* an. In desselben Verfassers Dissertations sur l'histoire de Paris, Paris 1739—41 (3 Bde.) wird II 91 *Abaelard* als Verfasser einer Rhythmomachie genannt nach einer Angabe in Richard de Fournival's Biblionomia (Mitte des 13. Jhdt.). Hier liegt wohl nur ein Irrthum vor[1]).

---

flictu *carnis et animae,* eine Nachahmung der boetianischen Consolatio, bei Migne vol. 171 p. 996—1004. Ferner *Carmen de* conflictu *uirtutum et uitiorum* in den Münchener Hdss. lat. 4613 s. XII und lat. 3941 s. XV etc.

1) Richard beschreibt (nach L. Delisle, Le cabinet des manuscrits II 426) die Handschrift so: *46 Prefati Boetii liber de arithmetica ad Symmachum. Item Petri Abadalardi liber de pugna numerorum qui dicitur Rychmimachia. In uno volumine.* Man könnte an Adalbero denken. — Der Catalog von St. Amand s. XII (L. Delisle a. o. p. 453) führt zwei namenlose Abschriften auf: *159 Item regulae abaci et rimimachiae. 160 Tabula rimimachiae, cum figuris numerorum eiusdem artis.* — Eine Berner Hds. der „Arithmomachie" (so wollte schon Le Beuf Dissertations II 91 das Spiel nennen) cod. 299 membr. führt M. Cantor Math. Beitr. p. 412 not. 430 an: das sind jedoch die Versus Acbrhanni de ludo tabularum secundum numerum, die von mir nach H. Hagen's Mittheilung im Anzeiger des German. Museums 1873 p. 249 f., dann von H. Hagen selbst in seinen Carmina medii aevi m. p. inedita Bern 1877 p. 142 ff. herausgegeben und schon früher von demselben in der Schrift „Antike und mittelalterliche Räthselpoesie" Bern 1869 (und 1877 wiederum) p. 32 f. erläutert worden sind. Verschieden davon sind die Versus Agbranii in einer Römischen Handschrift Cod. Vaticanus Christinae 1964 s. XI s. Dümmler, Neues Archiv IV 530 n. 5.

Endlich erscheint noch ein spätes Machwerk, des 16. Jahrh. wie es scheint, im Wiener Codex 3276 f. 213^r—226^v unter dem Namen eines Johannes Primicianus: Pythagorae ludus nuper in aliam formam translatus (Incip.: „*Usus et practica* . . .“, Expl.: „*domnum parant*“). Dieser mag dann schon aus neueren und nur im Druck erhaltenen Bearbeitungen geschöpft haben, zu denen wir uns nun wenden, nachdem wir einige Stimmen aus der Laienwelt citirt haben, die in die Zwischenzeit zwischen die obgenannten Schriften und den ersten der zu nennenden modernen Mathematiker fallen[1]).

Jo. Saresberiensis Polycrat. I c. 5 (ed. Giles III 33) (de alea et usu et abusu eius.) Attalus Asiaticus, si gentilium historiis creditur, hanc ludendi lasciuiam *[alearum ludum]* dicitur inuenisse, ab exercitio numerorum paululum deflexa materia. Cum enim antiquiores illud exercitium duntaxat approbarent, quod ad inuestigationem ueri disciplinasque liberales proficeret uel recte uiuendi instrueret usum, hic subtili quidem, licet infructuosa inuentione ueteris exercitii duritiam non temperauit sed emolliuit, multis adhuc in pristina manentibus grauitate. A manibus namque Graecorum abacus nondum excidit, aut ratio calculandi, aut ludus in quo plene uicisse est ad denunciatum calculum in campis aduersarii constituisse *perfectam et maximam harmoniam.* Cum uero in eisdem harmonica, arithmetica uel geometrica trium terminorum medietate exultat, semiplena uictoria est. Quaeuis alearum, etsi contingant citra triumphi gloriam, aut ludentis felicitatem aut artis peritiam protestantur. *Iucundum quidem et fructuosum est numerorum nosse certamina,* qui depredationi inueniantur obnoxii et qua ratione in castris sint alii tutiores, omnium periculorum ignari, nisi forte circumuenti ab hostibus captiuentur. *Huius uoluptate certaminis, Ptolomaeum, Alexandrum, Caesarem, Catonem, ipsum quoque Samium* grauiores operas legimus temperasse, quo etiam inter ludendum id agerent, unde essent philosophicis negotiis aptiores. Alea uero exciso regno Asiae inter manubias euersae urbis non sub una tantum specie migrauit ad Graecos. Hinc tessera, calculus, tabula, urio uel dardana pugna, tricolus, senio, monarchus, orbiculi, taliorchus, uulpes, quorum artem utilius est dediscere quam docere. Anderswo soll bei Johannes nach Du Cange das Wort *rithmachia* im Sinne von *concinnitas* gebraucht sein, die Stelle ist mir bisher entgangen[2]).

1) Der Gründe, weshalb ich mich nicht auf kurze Angabe der Stellen beschränke, sondern dieselben ganz abdrucken lasse, sind vornämlich zwei. Einerseits zeigt erst die ermöglichte Vergleichung mit dem Fortolftexte, dass bei den citirten Schriftstellern wirklich von unserer Rh. die Rede ist, was z. B. D. de Foncemagne bei Du Cange leugnete, andrerseits kann sich für die Herkunft und Verbreitung der verschiedenen Bearbeitungen ein Fingerzeig in ihnen finden: so deutet möglicherweise der Schluss der Honoriusstelle auf Fortolf.

2) Gemeint ist doch schwerlich epist. 235 (p. 431 ed. Masson): In Rithmachia

Es mag weiter die Darstellung in dem im Mittelalter dem Ovid unterschobenen Gedichte *de Vetula*[1]) folgen. Dort heisst es Buch I c. XXXV p. 25—28 in dem bekannten Nachdruck der Wolfenbütteler Ausgabe (ed. 1662 typis Sterniis):

O utinam ludus sciretur Rythmimachiae!
ludus Arithmeticae folium, flos fructus et eius
gloria laus et honor, quia totum colligit in se
ludus, ubi bellum disponitur ordine miro.
Campis in geminis congressio fit numerorum
quattuor *imparium*, qui sunt in limine primo,
cum totidem *paribus*, qui limite sunt in eodem,
principio numeri numeris non connumerato.
octoque sunt isti patres utriusque cohortis;
auxiliatores nam parti dantur utrique.
primo *multiplices*, quia ducto quolibet in se
quadrati subduntur eis, quibus ordine bino
subsunt *supraparticulares* adicientes
toti particulam dictam patris a quotitate.
His alii subsunt, qui particulas superaddunt
dictas a numero uincente patris quotitatem
uno, sed numero patris aequales quotitati,
ordoque binus eis. Numeros hinc inde tabellae
seu Scaci portant, et sunt acies bicolores
ad discernendum, praesertim cum paritas et
imparitas mixtae sibi sint in utraque cohorte.
distinguuntur item Scaci tabulaeue figuris:
hi trigonis, hi tetragonis, illique rotundis;
scilicet ut Scaci numeros utrinque rotundi
primos octo ferant, trigoni sint octo sequentes,
tetragoni reliqui, nisi quod duo sunt ibi Reges
pyramidalibus ex numeris. Ideo quoque Scaci
pyramidales sunt: et habet pars utraque Regem.
In castris parium nonus decimus locus unam
perfectam dat *pyramidem*: senarius in se
ductus pyramidi basim producit eidem

---

ludentium hoc indicat iocus, ubi quoties aufertur pyramis intercepta, toties concidunt latera eius.

1) Vetula in oben genannter Hds. von Montpellier s. XII und zahlreichen anderen Hdss. erhalten: schon Richard von Bury im Philobiblon citirt sie als echtes Werk des Ovid, ebenso Walter Burleigh.

totaque pyramis est nonagenarius unus.
At locus imparium decimus bis *pyramidem* dat
tercurtam, cuius basim octonarius in se
ductus producit, quam pyramidem coadunant
centenarius et nonagenarius una.
Istae pyramides sunt Reges his aciebus
et sunt ex numeris quadratis omnibus ambae,
quod potes ex tabula subiecta noscere plane.

c. XXXVI:

O utinam multis numerorum pugna placeret!
quae si sciretur, placitam se redderet ultro.
Sed Mathesis uix inueniet qui iam uelit ipsam. etc.

Zur Erläuterung finden sich dahinter die Zahlen nach ihren Species und ihrer Vertheilung an die Spieler angegeben.

Noch einmal bezeugt der Verfasser l. III c. II p. 57 seine Liebe zur Rh., indem er von den Studien spricht, denen er sich ergeben will:

Adiciamque iocos dociles Mathesisque sequaces.
sumptibus exiguis aliquatenus aedificabo
concernens ad materiam geometrica quaedam,
sic abstracta quidem, quod non sine materia sint,
Algebraeque memor, qui ludus arithmeticorum,
admittam ludum, qui Rythmomachia uocatur[1]).

Auf *Alanus* de Insulis poetische Schilderung der Arithmetik im Anticlaudianus III 4 v. 17—22 p. 350 de Visch macht mich Le Beuf Diss. II 91 aufmerksam[2]):

1 Quarta soror sequitur, quartae rota prima sororis
est opus, huic operas operose dedicat illa.
et quamuis haec quarta foret, tamen esse secundam
4 se negat in facto, contendens prima uocari.
— — — — — — — — — — — — — —
17 *Mensam Pythagorae,* quae menti patula donat
Delicias animi sapiens, non corporis escas,

1) Der Verfasser schildert übrigens in anderen Capiteln auch den ludus Deciorum (c. 24—30, p, 15—23), das Schachspiel (c. 31—33, p. 23—25) und andere aus der Zahl der *alii parui ludi quos scire puellas est decens* (c. 34, p. 25); ist also wenigstens nach dieser Seite hin nicht uninteressant.

2) Als Autoren der arithmetica werden von Alanus bezeichnet am Schluss des 4. Capitels: Nicomachus, Gilbertus, Pythagoras, Chrysippus.

sustinet una manus, *pugnas* manus altera monstrat,
agmina disponit *numerorum*, praelia fingit,
indicat insultus uarios numerosque rebelles,
22 tandem subtili concludit bella triumpho.

Ihm lasse ich folgen *Honorius Augustodunensis* (um 1300), der in seiner Schrift de animae exilio die Rh. mit folgenden Worten erwähnt:

Quarta ciuitas est Arithmetica. per quam quaerenda est patria. In hac Boetio docente par et impar numerus multipliciter se complicant. Cribrum simplices numeros per multiplices numeros reciprocat, Abacus per digitos et articulos eundo multiplicat, redeundo diuidit, minutiis monadem in mille particulas redigit. In hac Rhythmimachia pares et impares numeros in pugnam prouocat, alea Scachos certo numero in certamen ordinat, tabula iactis tesseris senaria sorte congregat. In huius urbis schola uiator discit, *quod deus omnia in mensura et numero et pondere disposuit.*

Im ersten Viertel des 13. Jahrhunderts schrieb Jordanus Nemorarius (um 1235 nach Fabricius IV 176) eine Rh. Seine Arbeit dürfte erst am Beginn der Neuzeit weiteren Kreisen bekannt geworden sein, als Jacobus Faber Stapulensis sie den Ausgaben von Nemorarius' Arithmetik Paris 1496 und 1503 anfügte. Ausser diesen Ausgaben hat M. Curtze von Jordanus' Rh. eine abgekürzte Form kennen gelernt in einem von ihm in Bulletino Boncompagni Tom. I p. 140 bezeichneten, seitdem verloren gegangenen Bande der Königsberger Bibliothek.

Im 14. Jahrh. soll nach Boissier's Angabe Nicolaus Oresmius (von jenem Orestinus genannt), als episcopus Lexoviensis † 1382, sich mit dem Spiel befasst haben. Fabricius V 120 schweigt darüber, und M. Curtze, der über „die mathematischen Schriften des Nicole Oresme" im Programm des Gymn. zu Thorn 1870 gehandelt, hat auch seit der Zeit, wie er mir im J. 1878 mittheilte, trotz fernerer Handschriftenforschungen, die die Schriften des Mannes betrafen, eine Rhythmomachie desselben nicht zu Gesicht bekommen[1]).

Das Ende des 15., sowie das ganze 16. Jahrhundert scheint sich dem Spiele mit einem Eifer, der an den des 12. erinnert, hingegeben zu haben. Es sind vornämlich Engländer und Franzosen, die sich seiner annehmen. Mein Bericht gründet sich, da ich von all den Ausgaben nur die jüngsten in den Breslauer Bibliotheken vorfand, hauptsächlich auf Boissier, der aber

1) Hier will ich noch anfügen die Notiz des Breviloquus Benthemianus s. XV in. (Progr. der Realsch. des Johanneums zu Hamburg 1879 s. 26): *Richmachia: est tabula geometricalis, in qua pueri discunt algorismum uel in qua proprium est disci algorismum, ubi tractatur de numero et pugnatur. et dicitur a ricmos id est numerus et machos pugna.*

selbst die erste der zu nennenden, die von Shirwood s. a. et l. in 4^0 (Rom 1482) nicht gekannt zu haben scheint.

Indem Boissier eine *„altera Chaldaeorum ludendi ratio“* bespricht, sagt er f. 41^b: *cum saepius ea mihi uenirent in mentem, quae Thomas Randolphus Vir bonarum literarum studiosissimus, cum Lutetiae operum literis dabat, solitus erat mihi dicere de uaria Rythmomachia ludendae ratione, qua Angli delectantur . . . obtulit se mihi humanissimus uir Thomas Topcliphus* (ein Anglus, der wie B. bezeugt, *praecipue in Astronomia, Algebra et Scenographia praestat) . . . copiam mihi fecit cuiusdam libelli, qui, ut ille retulit, decerptus est ex quodam ueteri libro Chaldaico ac anglico sermone donato. Hic libellus quandam ludendae Rythmomachiae rationem paulo a priore diuersam continet.* Einen französischen Freund der R. nennt B. f. 17^a (hinter f. 31^b!) am Schluss eines Abschnittes *Honoris litisque Victoria*: *„haec ultima species simplicium Victoriarum satis feliciter excogitata est a nostro Ioh. Mesmio Marsano mathemata Lutetiae profitente.* — Er glaubt: *hanc progressionis formam (quae Schachico respondet) nostri ludi perfectionem esse quamque ueteres in ludendo secuti sunt. Qua de re coniecturam capio progressum schachorum et incessum indidem suam originem traxisse. Hinc satis integrum est intueri, quam seuere et Stoice a quibusdam ueteribus hic ludus descriptus sit: qui dum contemplatione ludi contenti sunt, contempserunt id in huius ludi exercitatione, quod neque ingratum neque iniucundum ludentibus fuisset: Hi uero sunt Gilbertus Papa, Hermannus Contractus Castrensis*[1]), *Nicolaus Orestinus: quos hac nostra memoria sunt imitati Orontius Finaeus Delphinas, Iacobus Faber Stapulensis neque ego hactenus ab eorum uestigiis discessi.*

Des Orontius Schrift habe ich in dem bibliographischen Nomenclator R. Constantino authore Paris. 1555 und anderwärts vergeblich gesucht; vielleicht ist sie ein Anhang seines dort p. 104 citirten Werks Arithmetices practicae lib. 4.

Jacques Lefevre aus Etaples en Picardie 1455—1537 „scripsit (wie es dort p. 103 heisst) in Arithmeticem Boethii et Jordani. Et Rithmomachiae ludum“. Und Boissier sagt f. 49^a: *„huic meae opellae id quod Iacobus Faber Stapulensis scripsit adiungere uisum est“* und es folgt 49^b —52^a *„Rythmomachia Iacobi Fabri Stapulensis . Dialogus . Bathillus . Alcmeon Orontinus .“* Libri führt von diesem Dialog, der, wie schon der Name Orontinus zeigt, nicht von Jordanus herrühren kann, Pariser Folioausgaben von 1496 und 1510 an; ich finde ferner eine Ausgabe von 1514 genannt im Verzeichniss alter Drucke der Joachimsthal'schen Gymnasialbibliothek zu

---

1) Wie kommt Hermann zu dieser Bezeichnung?

Berlin Progr. 1878 p. 37: *Arithmetica . . Musica . . Epitome in libros diui Seuerini Boetii . Rithmimachie ludus . Haec secundaria sup. opp. ed. uenalis habetur Parisiis: in officina Henrici Stephani* (1514). Inwieweit diese von den bei Jordanus genannten Ausgaben verschieden sind, kann ich nicht angeben. Nur nimmt mich Wunder, dass Boissier des Jordanus Namen so ganz verschweigt. Sollte die äussere Verbindung mit dessen Arithmetik in Lefevre's Ausgaben verleitet haben, des Commentators Werk dem Commentirten unterzuschieben?

Die verschiedenen Arten, auf die man das Spiel in England und Frankreich betrieb, mag wer Lust hat bei Boissier selbst nachlesen, dessen Ausgabe nicht gar zu selten. Dass es wirklich gespielt und nicht bloss theoretisch betrieben wurde, wenngleich in kleineren Kreisen und von ernsteren Leuten, ist nicht zu bezweifeln[1]. Thomas Morus (1480, † 1535) empfiehlt es in seiner Utopia neben einem andern an Wibold's Alea regularis (s. oben) erinnernden, zweifelsohne von demselben abgeleiteten Spiele. Er sagt lib. II im Capitel de artificiis (ed. Helmestadi 1672 in 4⁰ p. 69):

Aleam atque id genus ineptos ac pernitiosos ludos ne cognoscunt quidem. Caeterum duos habent in usu ludos, latrunculorum ludo non dissimiles: alterum numerorum pugnam, in qua numerus numerum praedatur; alterum in quo collata acie cum uirtutibus uitia confligunt. quo in ludo perquam scite ostenditur et uitiorum inter se dissidium et aduersus uirtutes concordia; item quae uitia quibus se uirtutibus opponant, quibus uiribus aperte oppugnent, quibus machinamentis ab obliquo adoriantur, quo praesidio uirtutes infringant, quibus artibus eorum conatus eludant, quibus denique modis alterutra pars uictoriae compos fiat.

Mit Boissier's Schrift ist doch wohl eher ein feierlicher Abschluss dieser Beschäftigung mit der R. erfolgt, als dass man in ihr die Inauguration einer neuen Epoche finden dürfte. Ihr Titel mag drum, gleichsam als Epitaphium, hergesetzt sein:

NOBILISSIMUS ET ANTIQUISSIMUS *ludus Pythagoreus (qui Rythmomachia nominatur) in vtilitatem & relaxationem studiosorum comparatus ad ueram et facilem proprietatem & rationem numerorum assequendam, nunc tādem per Claudium Buxerium Delphinatem illustratus.* (Das Bild einer Henne mit der Umschrift: *IN PINGUI . GALLINA* †) LUTETIAE *Apud Gulielmum Cauellat, sub pingui Gallina, ex aduerso collegij cameracensis. Abacus et calculi*

---

1) Die nothwendigen Spielrequisiten, Abacus et calculi, waren, wie der Titel der Boissier'schen Schrift anzeigt, käuflich „in Palatio apud Ioannen Gentil“. Meine Erwartung, das Germanische Museum in Nürnberg würde in Besitz eines mittelalterlichen Spielapparats sich befinden, war vergeblich.

væneunt in Palatio, apud Joannem Gentil. 1556 CUM PRIUILEGIO REGIS. *(52 foll. in 8°.)*

Wie es scheint, wurde gleichzeitig auch eine französische Uebersetzung ausgegeben.

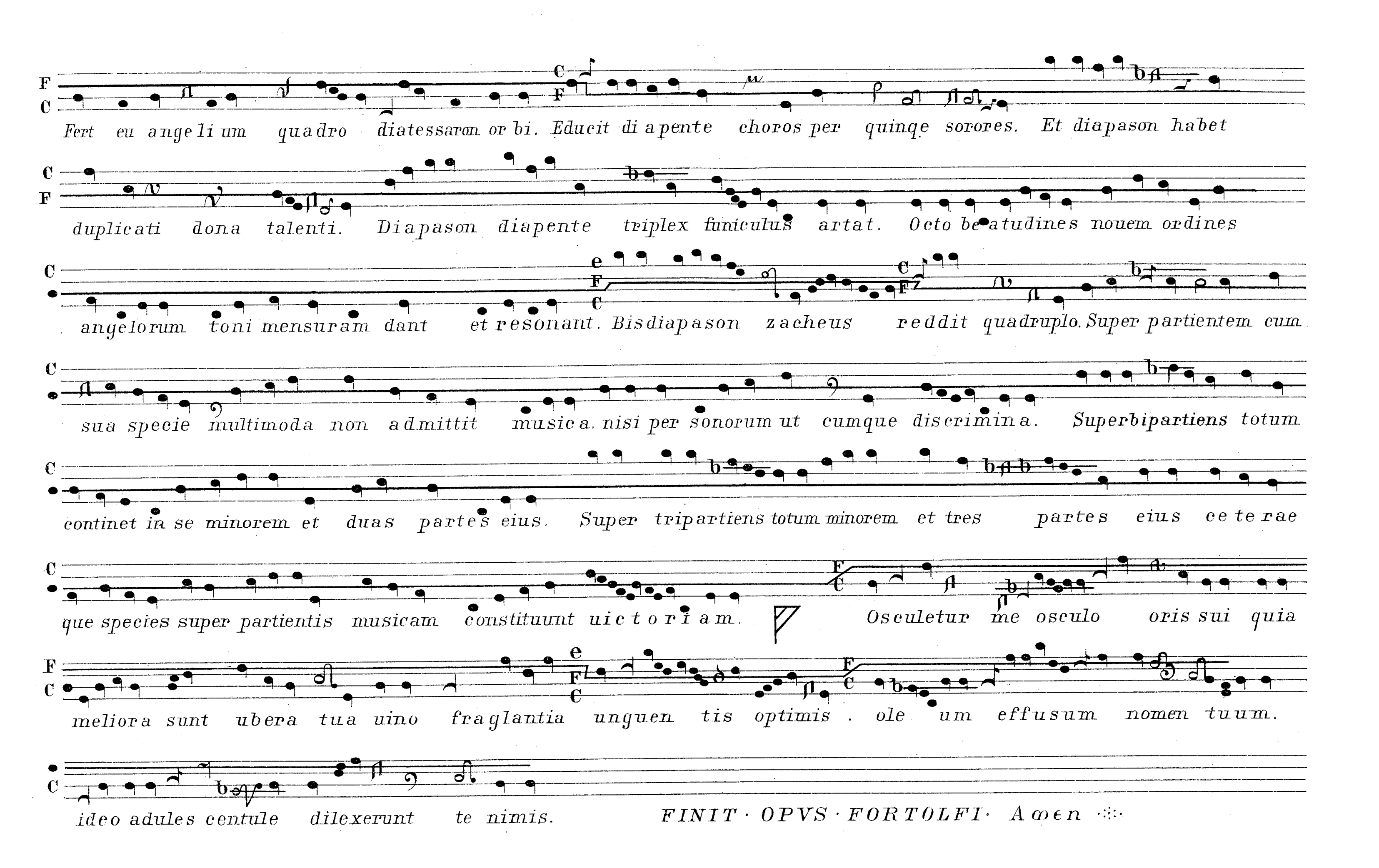
Nur als Nachzügler[1]) ist zu nennen die Bearbeitung des Italieners Franz Barrozi, Venedig 1572[2]), mit deren Uebertragung durch den Herzog von Braunschweig[3]) im folgenden Jahrh. unser Spiel nochmals nach Deutschland kam, sicherlich ohne sich der warmen Aufnahme von ehedem zu erfreuen.

---

1) In welcher Abhängigkeit des William Fulco *Μετρομαχία* s. Ludus geometricus, London 1566 u. 1578. 4°, und desselben *Οὐρανομαχία* i. e. Astrologorum ludus, London 1571. 4°, von unserer Rythmimachia stehen, habe ich nicht erkundet.

2) Il giuco pittagorico nominato Ritmomacchia per Franc. Barrozi. Venet. 1572. 4.

3) Rythmomachia. Ein vortrefflich, und uhraltes Spiel, deß *Pythagorae:* Welches *Gustavus Selenus,* auß des *Francisci Barozzi,* Eines Venedischen Edelmans, welschem Tractätlein, ins deutsche ubergesetzet, seinem vorgehenden Tractat, vom König-Spiele, (dieweil es ebenmessig, ein scharffes nachdencken erfodert) zugeordnet, und mit nützlichen glossen, auß dem Claudio Buxero Delphinate, verbessert. *Cum Privilegio S. C. Maiest.* Apud *Henningum Gros.* Jun. M. DC. XVI. in Folio. [Bildet p. 443—495 des „Schach- oder Königspiels" von Gustavo Seleno. Lipsiae CIOIOCXVI; die Rückseite von 495 enthält Errata, das nächste Blatt Angabe des Druckers und Verlegers.]


Fert eu angelium quadro diatessaron orbi. Educit diapente choros per quinqe sorores. Et diapason habet
duplicati dona talenti. Diapason diapente triplex funiculus artat. Octo beatudines nouem ordines
angelorum toni mensuram dant et resonant. Bisdiapason zacheus reddit quadruplo. Super partientem cum
sua specie multimoda non admittit musica. nisi per sonorum ut cumque discrimina. Superbipartiens totum
continet in se minorem et duas partes eius. Super tripartiens totum minorem et tres partes eius ceterae
que species super partientis musicam constituunt uictoriam. Osculetur me osculo oris sui quia
meliora sunt ubera tua uino fraglantia unguen tis optimis. ole um effusum nomen tuum.
ideo adules centule dilexerunt te nimis.
FINIT · OPVS · FORTOLFI · Amen

VERSUCH EINER GESCHICHTE

DER

DARSTELLUNG WILLKÜRLICHER FUNCTIONEN

EINER VARIABLEN

DURCH TRIGONOMETRISCHE REIHEN

VON

ARNOLD SACHSE
IN STRASSBURG I. E.

I.

Seitdem Riemann in seiner im Jahre 1854 verfassten Habilitationsschrift[1]) einen geschichtlichen Ueberblick über die Untersuchungen und Ansichten betreffend die Darstellung willkürlicher Functionen einer Variablen durch trigonometrische Reihen bis zu den Arbeiten von Dirichlet einschliesslich gegeben hat, sind so viele fruchtbringende Untersuchungen auf diesem Gebiete angestellt worden, dass es sich des Versuches vielleicht verlohnen dürfte, die erlangten Resultate in Kurzem zusammenzufassen. Wenn man eine willkürliche Function als eine solche definirt, deren Eigenart in jedem kleinsten Intervalle keine Bedingung über ihre Beschaffenheit in irgend einem andern Intervalle in sich schliesst, so ist die allgemeinste Aufgabe, welche den Arbeiten über die Darstellung willkürlicher Functionen zu Grunde liegt, die: eine solche Function in einer mathematischen Form darzustellen, in der nur die Grundoperationen der Arithmetik, Addition, Subtraction, Multiplication und Division sei es endlich oder unendlich oft auftreten. Die ausserordentliche Allgemeinheit des gestellten Problems hat naturgemäss die Forschung zunächst auf die Functionen einer Variablen hingewiesen, auf die wir uns auch im Folgenden beschränken wollen.

Im vorigen Jahrhundert führte die Untersuchung über die schwingenden Saiten auf die partielle Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

D'Alembert gab als allgemeine Lösung die Summe zweier ganz willkürlicher Functionen der Variablen x und t an:

$$y = f(x + \alpha t) + \varphi(x - \alpha t),$$

und zeigte, dass nur eine willkürliche Function auftrete, wenn y zugleich der Bedingung genügen solle, an der Stelle $x = 0$ und $x = l$ zu verschwinden. Daniel Bernoulli zeigte, dass die Differentialgleichung sowohl, als auch die Nebenbedingungen durch eine trigonometrische Reihe befriedigt werden könnten, und behauptete, diese sei die allgemeinste Lösung.

1) Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe. Gesammelte Werke pag. 213—253.

Euler formulirte das hiermit auftauchende Problem dahin: Kann eine ganz willkürliche Function einer Variablen allemal durch eine trigonometrische Reihe dargestellt werden?

Wie weit die Lösung dieses Problems bis jetzt gelangt ist, soll eben hier dargestellt werden.

Zu jener Zeit wurde der Begriff einer willkürlichen Function weit beschränkter aufgefasst, als er oben angegeben ist. Man ging im vorigen Jahrhundert durchaus von geometrischen Anschauungen aus, indem man nur solche Functionen im Auge hatte, bei denen man sich eine Darstellung in stetig fortlaufenden Linienzügen vorstellen konnte. Man sprach von graphisch gegebenen Functionen, ein Ausdruck, dessen sich Riemann trotz seiner beschränkten Anwendbarkeit später auch noch bedient. Euler nannte diese Functionen functiones continuae. Bei diesen glaubte man nach langem Streit zu dem Resultate gelangt zu sein, dass sie sich durch eine trigonometrische Reihe darstellen liessen. Ausserdem dachte man sich noch solche Functionen, die an einer Stelle plötzlich unterbrochen und an einer anderen fortgesetzt wären. Man sah sie aber nicht als eine Function an, sondern als eine aus Theilen zusammengesetzte, und meinte, dass alle Theile zusammen durch eine trigonometrische Reihe nicht dargestellt werden könnten. Fourier's Behauptung, dass eine jede willkürliche Function durch eine trigonometrische Reihe darstellbar sei, erregte daher nicht geringes Aufsehen. Denn sie widersprach durchaus dem bisherigen Functionenbegriff und nöthigte dazu, künftighin eine Function, auch wenn sie in ihren verschiedenen Theilen verschiedenen Gesetzen gehorchte, als eine Function anzusehen. Die erste Mittheilung von seiner grossen Entdeckung machte Fourier 1807 der Pariser Akademie. Seine weiteren ausgedehnten Forschungen über die Darstellbarkeit willkürlicher Functionen, die sich an Probleme der Wärmetheorie anknüpften, hat er in zahlreichen Abhandlungen veröffentlicht und schliesslich in seinem umfassenden Werke der „théorie de la chaleur" 1822 niedergelegt.

Soll die trigonometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k \sin kx + b_k \cos kx)$ die Function $f(x)$ für jeden Werth von x darstellen, also

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k \sin kx + b_k \cos kx)$$

sein, so bestimmt Fourier die Coefficienten a_n, b_n dadurch, dass er beiderseits mit $\sin nx$ resp. $\cos nx$ multiplicirt, und von $-\pi$ bis $+\pi$ integrirt. Er glaubte behaupten zu dürfen: Wenn man in der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k \sin kx + b_k \cos kx)$$

$$b_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,d\alpha;$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos k\alpha\,d\alpha;\quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin k\alpha\,d\alpha$$

setzt, so stellt diese Reihe allemal für jeden Werth von x zwischen $-\pi$ und $+\pi$ die Function $f(x)$ dar. Man hat seitdem die trigonometrischen Reihen mit diesen Coefficienten Fourier'sche Reihen genannt und diesen Namen schliesslich auf alle trigonometrischen Reihen übertragen. Erst in neuerer Zeit nach dem Vorgange von Herrn Heine[1]) beginnt man wieder trigonometrische Reihen mit irgend welchen Coefficienten und Fourier'sche Reihen zu unterscheiden, um für besondere Functionengattungen die Möglichkeit noch offen zu lassen, dass sie durch eine trigonometrische Reihe dargestellt werden könnten, die nicht die von Fourier bestimmten Coefficienten besitzt.

Was nun die Geschichte des Ursprungs der trigonometrischen Reihen aus speciellen physikalischen Problemen betrifft, so hat Riemann (a. a. O.) dieselbe ausführlich behandelt und wir bescheiden uns daher, nur auf zwei Punkte aufmerksam zu machen.

Das Verdienst Fourier's, scheint mir, ist nicht in der Auffindung der Coefficientenbestimmung zu suchen, sondern darin, dass er zuerst bemerkte, dass eine trigonometrische Reihe mit den nach ihm benannten Coefficienten auch eine ganz willkürliche Function darstellen könne. Denn die Coefficientenbestimmung an sich war nicht neu. Die Methode hatte Lagrange bereits 1766 in den Miscellanea Taurinensia[2]) gegeben, wenn auch ohne volles Bewusstsein ihrer Bedeutung, und wenn er sie auch nicht bis zu Ende durchgeführt hat. Er löst die Aufgabe, eine gebrochene Linie derart darzustellen, dass sie mit einer gegebenen in n Punkten übereinstimmt. Er sagt aber ausdrücklich (a. a. O. pag. 259), dass diese gebrochene Linie immer genauer mit der gegebenen übereinstimme, je mehr Punkte man nähme, und dass man durch Annahme unendlich vieler gemeinsamer Punkte den Ausdruck einer stetigen Curve erhielte, die mit der gegebenen identisch sei. Die Interpolationsmethode Lagrange's ist im Grunde dieselbe, wie die Fourier's, nur tritt bei Lagrange das Wesen der Coefficientenbestimmung

1) Borchardt's Journ. für Math. Bd. 71. pag. 354.

2) Tom. III, Pars. math. pag. 251.

viel schärfer hervor, und desswegen ist sie wohl auch von Dirichlet[1]) und Riemann[2]) in ihren Demonstrationen bevorzugt worden. Aber auch die Multiplicationsmethode, welche Fourier gegeben, gehört ihm nicht ursprünglich an. Es scheint Riemann entgangen zu sein, dass bereits Euler[3]) 1777 (veröffentlicht 1798) die Coefficientenbestimmung durch Multiplication gegeben hatte, worauf Jacobi[4]) aufmerksam macht. Da sich in dem dritten Bande der Misc. Taur. auch Abhandlungen von Euler befinden, so ist kein Zweifel, dass Euler die Lagrange'sche Entwickelung gekannt hat; ebensowenig kann ein Zweifel darüber bestehen, dass Fourier die Euler'schen Resultate bekannt gewesen sind. Denn er führt selbst an (th. de la ch. art. 428), dass man bei fast allen Mathematikern der Zeit Daniel Bernoulli, Clairaut, Euler, Lagrange den seinigen analoge Resultate und Entwickelungen fände.

Ferner dürfte vielleicht der Riemann'schen Geschichtserzählung noch die Notiz hinzuzufügen sein, dass auch Poisson eine eigene Methode der Coefficientenbestimmung gefunden hat, die wegen der vielen Untersuchungen und Folgerungen, welche daran geknüpft worden sind, besonders merkwürdig ist. In der für $r < 1$ richtigen Formel[5])

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(x - \alpha) + r^2}\, d\alpha =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\, d\alpha + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(x - \alpha)\, d\alpha$$

geht Poisson zur Grenze $r = 1$ über und sucht darzuthun, dass alsdann das Integral links in den Werth der Functionen $f(x)$ an der Stelle x überginge.

Bei Fourier fehlt der Beweis, dass die unendliche trigonometrische Reihe, welche er als Darstellung einer Function erhält, wirklich gegen den Werth der Function convergirt. Er gibt zwar (art. 177. a. a. O.) eine strenge Definition der Convergenz einer Reihe, hält aber im gegebenen

1) Dove und Moser, Repertorium für Physik. Band 1. 1837. pag. 152—174.

2) Riemann's Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen, herausg. von Hattendorf.

3) Nova acta Acad. Scient. Petrop. Tom. XI. 1798. pag. 114.

4) Crelle's Journ. für Math. Bd. 2. pag. 2.

5) Ausführlich angegeben findet man die Stellen, wo diese Formel steht, bei H. A. Schwarz: Zur Integration der part. Differentialgl. $\Delta u = 0$. Borchardt's Journ. für Math. Bd. 74. 1872. pag. 226; hier sei angeführt: Journ. de l'école polyt. cah. 19. 1823 pag. 404 u. f., und Mémoires de l'Acad. Royale des Sc. de l'inst. de France. 1823. pag. 574.

Falle den Beweis für die Convergenz ausgesprochenermassen für leicht genug, um ihn dem Leser zu überlassen. Es zeigte sich, dass in den speziellen Fällen, die man überhaupt aufstellte, und für specielle Werthe der Variablen die Reihe in der That gegen den Werth der Function convergirte; dass aber dennoch ein von der Eigenart der Function unabhängiger und für das ganze Intervall geltender Beweis ein dringendes Bedürfniss sei, scheint zuerst Cauchy[1]) empfunden zu haben.

Er theilte der Pariser Akademie im Jahre 1826 einen Beweis für die Convergenz der Fourier'schen Reihe mit. In demselben wird das allgemeine $n$te Glied der Reihe auf eine Form gebracht, die anzeigt, dass das Verhältniss desselben zu der Grösse $A\frac{\sin nx}{n}$, wo A eine für alle Glieder gleich grosse Constante bezeichnet, um so weniger von der positiv genommenen Einheit abweicht, je grösser n wird. Daraus, dass nun die Reihe mit dem allgemeinen Gliede $A\frac{\sin nx}{n}$ convergirt, will Cauchy die Convergenz der Fourier'schen Reihe schliessen. Dass letzterer Schluss durchaus falsch ist, hat Dirichlet[2]) gezeigt. Cauchy erkannte auch selbst, dass seine Methode in manchen Fällen versage, und dass sie jedenfalls voraussetze, dass das allgemeine Glied für $n = \infty$ bestimmt sei. Die Umformung der Reihe aber, an welcher Dirichlet noch überdies Anstoss genommen hatte, da ihr Princip nicht sicher definirt sei, beruht wie Riemann (art. 2. a. a. O.) bemerkt, nur auf der Annahme, dass es eine Function $\varphi(x + yi)$ des complexen Argumentes $x + yi$ gebe, welche für alle positiven Werthe von y endlich sei, und deren reeller Theil für $y = 0$ der gegebenen willkürlichen Function $f(x)$ gleich wird. Riemann setzt hinzu: „Will man diesen Satz, der in der That richtig ist, voraussetzen, so führt allerdings der von Cauchy eingeschlagene Weg zum Ziele, wie umgekehrt dieser Satz sich aus der Fourier'schen Reihe ableiten lässt."

Zur Prüfung dieser Behauptung fordert Herr H. A. Schwarz[3]) auf. Die Behauptung zerfällt in zwei Theile. Dass erstens Riemann nur gemeint haben sollte, nach bewiesener Voraussetzung gelte nun der Cauchy'sche Beweis ohne Weiteres, ist (nach den Dirichlet'schen Einwänden) von vornherein ausgeschlossen. Er kann vielmehr hiermit nur gemeint haben, es sei möglich, eine Function $\varphi(x + yi)$ des complexen Argumentes $x + yi = re^{\alpha i}$ in eine nach Potenzen von $x + yi$ fortschreitende convergente Reihe zu entwickeln, deren reeller Theil für einen bestimmten Werth von r in

1) Mémoires de l'Acad. R. des Sc. de l'inst. de France. Tome VI. pag. 603 u. f.
2) Crelle's Journ. für Math. Bd. 4. pag. 158.
3) Borchardt's Journ. für Math. Bd. 74. pag. 232. Anmkg.

die Fourier'sche Reihe für die Function $f(\alpha)$ überginge, und dass die Convergenz der Fourier'schen Reihe aus der Convergenz der ersten gefolgert werden könnte. Nun giebt es eine im Innern eines Kreises mit dem Radius 1 convergente Reihe:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\gamma)d\gamma + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_{-\pi}^{+\pi} f(\gamma)\cos n(\alpha-\gamma)d\gamma,$$

welche für $r = 1$ formal in die Fourier'sche Reihe übergeht, aber es ist die Frage, ob der Uebergang in gleichmässig stetiger Weise erfolgt. Die vielfachen Untersuchungen über diese und einschlägige Fragen wurden zum Abschluss gebracht durch zwei fast gleichzeitig erschienene Abhandlungen, die erste von Herrn H. A. Schwarz[1]), die andere von Herrn Prym[2]). Herr H. A. Schwarz beweist folgenden in seinen wesentlichen Theilen schon von Riemann behaupteten Satz: „Wenn längs des Randes einer Kreisfläche mit dem Radius 1 eine für alle Werthe des Argumentes α endliche stetige und eindeutige reelle Function $f(\alpha)$, welche bei Vermehrung des Arguments um 2π periodisch in sich zurückkehrt, sonst aber keiner weiteren Beschränkung unterliegt, willkürlich vorgeschrieben ist, so giebt es jedesmal eine und nur eine einzige innerhalb und am Rande des Kreises stetige Function u, deren Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, im Innern der Kreisfläche endliche, stetige und eindeutige Functionen von x und y sind, welche die Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ erfüllt, und längs des Randes mit der gegebenen Function $f(\alpha)$ übereinstimmt." Der Beweis dieses Satzes wird aber nicht aus der Reihe, sondern aus dem Poisson'schen Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\alpha-x)+r^2}\,d\alpha$$

abgeleitet, welches im Innern des Kreises mit der obigen Reihe übereinstimmt und den reellen Theil der durch die Gleichung

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\frac{e^{\alpha i}+z}{e^{\alpha i}-z}\,d\alpha$$

---

1) Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft zu Zürich. Jahrg. XV. „Ueber die Integration der Dfflgl. $\Delta u = 0$ für die Fläche eines Kreises." Ein Abdruck der Abh. nebst Fortsetzung und Erweiterung der darin enthaltenen Untersuchungen in Borchardt's Journ. für Math. Bd. 74. 1872.

2) Ueber die Dfflgl. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Borchardt's Journ. für Math. Bd. 73. 1871.

für alle Werthe von $z = re^{\alpha i}$, deren absoluter Betrag kleiner als 1 ist, mit dem Charakter einer ganzen Function eindeutig definirten Function des complexen Argumentes $z = x + yi$ darstellt. Das Poisson'sche Integral verliert nun am Rande seinen Sinn. Wenn man aber festsetzt, die durch das Integral im Innern des Kreises definirte Function solle am Rande mit der Function $f(\alpha)$ übereinstimmen, so lässt sich zeigen, dass die Werthe des Integrals in unendlicher Nähe des Randes in stetiger Weise in die Werthe der Function $f(\alpha)$ am Rande übergehen. Der reelle Theil der im Innern des Kreises definirten Function $\varphi(x + yi)$ geht demnach am Rande stetig in die Function $f(\alpha)$ über.

Andrerseits folgt aus dem von Dirichlet[1]) neu bewiesenen Abel'schen[2]) Satze, wonach die Grenze einer convergenten Potenzreihe $c_0 + c_1 r + c_2 r^2 + \ldots$, wenn r dem Werthe 1 unendlich nahe kommt, gegen den Werth $c_0 + c_1 + c_2 \ldots\ldots$ convergirt, falls letztere Reihe convergirt, dass die mit dem reellen Theile von $\varphi(z)$ im Innern des Kreises übereinstimmende Reihenentwicklung nach Potenzen am Rande stetig in die Fourier'sche Reihe übergeht. An den Stellen, wo also die Fourier'sche Reihe convergirt, kann sie nicht verschieden sein von den zugehörigen Werthen von $f(\alpha)$. Ob aber, und wann sie convergirt, können wir hieraus überhaupt nicht schliessen.

In dem Handbuche der theoretischen Physik von W. Thomson und P. G. Tait[3]) wird ein Beweis für die Convergenz der Fourier'schen Reihe gegeben, der, was Mangel an Strenge betrifft, wenig hinter dem Cauchy'schen, auf dem er sich im Allgemeinen aufbaut, zurücksteht. Die Fourier'sche Reihe wird aus der Umformung eines Integrals erhalten, von dem gezeigt wird, dass es zwischen einander immer näher rückenden endlichen Grenzen eingeschlossen werden kann. Damit ist aber gar nichts bewiesen. Die Herren W. Thomson und P. G. Tait versuchen ihr Verfahren sowohl im Allgemeinen in der Vorrede, als auch speciell im citirten Art. zu rechtfertigen. Die Berechtigung für ihr Verfahren leiten sie aber nur daraus her, dass „jede der (von ihnen) äquivalent gesetzten Formeln einen bestimmten arithmetischen Sinn habe, und die darin enthaltene Reihe s o m i t convergire“.

An zweiter Stelle behauptet Riemann, es lasse sich umgekehrt der pag. 236 angeführte Satz aus der Fourier'schen Reihe ableiten. Dieser Weg

1) Liouville. Journ. des Math. Sér. II. Tome VII. pag. 253—255.

2) Crelle's Journ. für Math. Bd. I. pag. 314—315.

3) Treatise on natural philosophy by W. Thomson and P. G. Tait. Vol. I. Part. I. 1879. New ed. art. 77. pag. 59 and f.

ist auch von Herrn Neumann[1]) eingeschlagen worden. Dagegen sind aber mehrfach Einwendungen gemacht worden. Herr Heine[2]) gab hier den Anstoss, indem er neben anderen Gründen auch deswegen die Neumann'sche Methode für unsicher hielt, weil damit ohne jede weitere Voraussetzung die Eindeutigkeit der Entwickelung einer Function in eine Fourier'sche Reihe bewiesen wäre. Besonders betont aber hat die Einwände Herr Prym (a. a. O.). Man kann von der Fourier'schen Reihe gar nicht ausgehen, wenn man den Satz in seiner vollen Allgemeinheit beweisen will, weil der Beweis fehlt, dass die Fourier'sche Reihe für alle stetigen Functionen convergire. Somit dürfte auch der zweite Theil der Riemann'schen Behauptung nicht als zutreffend anzusehen sein.

II.

Dieser Versuch von Cauchy war, wie Dirichlet sagt, seines Wissens der einzige, der bis dahin gemacht war, als Dirichlet im Jahre 1829 seine Abhandlung über die trigonometrischen Reihen[3]) veröffentlichte, die Riemann mit Recht die erste gründliche Untersuchung auf diesem Gebiete nennt. Man hatte bemerkt, dass bis dahin als richtig angesehene Methoden sich in speciellen Fällen als fehlerhaft oder unzureichend erwiesen, ohne dass man einen Fehler der Rechnung auffinden konnte, und war zu der Ansicht gelangt, dass der Fehler nur in den Principien liegen könnte. Die Hauptvertreter dieser Periode der Aufklärung über die Fundamente der Infinitesimalanalysis sind Cauchy, Abel und Dirichlet. Abel gab in einem Briefe 1826 seinem Erstaunen darüber Ausdruck, dass die Theorie der unendlichen Reihen bisher noch so unvollkommen begründet sei, insbesondere, dass man alle für Functionen, die aus endlichen Grössenoperationen entstehen, geltende Regeln ohne Weiteres auf die unendlichen Reihen übertrüge[4]). Damit hatte er den Punkt getroffen, aus dem so viele Paradoxa entsprungen waren. Die Grundlage des Dirichlet'schen Beweises, welche auf eben dieser Erkenntniss beruht, die Auffindung des Unterschiedes zwischen unbedingter und bedingter Convergenz der Reihen, hat Riemann (a. a. O. art. 3) in meisterhafter Weise klargelegt. Indem Dirichlet die strengste Definition der Grundbegriffe der Analysis auf die Theorie der trigonometrischen Reihen

1) In seiner Schrift „Das Dirichlet'sche Princip in seiner Anwendung auf die Riemann'schen Flächen." Leipzig 1865. pag. 5 u. f.

2) Borchardt's Journ. für Math. Bd. 71. pag. 361.

3) Crelle's Journ. für Math. Bd. 4. 1829. Sur la convergence des séries trigonométriques, qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données.

4) Abel, Oeuvres compl. Bd. 2. pag. 265. Brief vom 16. janv. 1826.

übertrug, gab er den Anstoss zu der mannichfachen Förderung und Klärung, welche diese Grundbegriffe bei Gelegenheit der Untersuchungen über die trigonometrischen Reihen erfahren haben.

Ausser der genannten Abhandlung hat Dirichlet noch eine zweite Abhandlung über die trigonometrischen Reihen geschrieben (siehe pag. 234. Anm. 1), die jedoch wesentlich nur eine ausführliche Darlegung der in der ersten Abhandlung theilweise nur angedeuteten Methoden enthält.

Dirichlet stellt sich die Aufgabe zu untersuchen, wann die Fourier'sche Reihe convergirt, und schlägt dazu folgenden Weg ein. Er untersucht, wie eine Function $\varphi(x)$ beschaffen sein muss, damit die Summe der $(2n+1)$ ersten Glieder der Fourier'schen Reihe:

$$S = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\cos kx\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\cos k\alpha\,d\alpha$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sin kx\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\sin k\alpha\,d\alpha = \int_{0}^{\frac{\pi+x}{2}}\varphi(x-2\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\,d\beta$$

$$+\int_{0}^{\frac{\pi-x}{2}}\varphi(x+2\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\,d\beta$$

mit unendlich werdendem n gegen den Werth der Function an der Stelle x, nämlich gegen $\varphi(x)$, convergirt. Die Untersuchung kommt daher auf die Bestimmung eines Integrales von der Form

$$\lim_{k=\infty}\int_{0}^{h} f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta_{0<h\leqq\frac{\pi}{2}}$$

hinaus. Wenn man die Voraussetzung macht, $f(\beta)$ solle erstens zwischen 0 und h beständig endlich und bestimmt sein, und zweitens beständig positiv sein und nie zunehmen, so ist das Integral in eine Summe von Theilintegralen zerlegbar, deren jedes so beschaffen ist, dass die Function unter dem Integralzeichen beständig von demselben Zeichen innerhalb desselben Intervalles ist. In jedem Intervall lässt sich nun ein bekannter Mittelwerthsatz anwenden, und alsdann erhält man eine Reihe alternirender Glieder, die immer kleiner werden. Vermöge dieser Eigenschaft der Reihe kann man die Summe der $2n+1$ ersten Glieder zwischen zwei Grenzen einschliessen und zeigen, dass beide Grenzen bei wachsendem n gegen $\frac{\pi}{2}f(0)$ convergiren. Hiernach ist

I) $$\lim_{k=\infty}\int_0^h f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}d\beta = \frac{\pi}{2}f(0)_{0<h \leqq \frac{\pi}{2}}$$

und daraus folgt unmittelbar, dass

II) $$\lim_{k=\infty}\int_g^h f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}d\beta = 0_{0<g<h \leqq \frac{\pi}{2}}$$

ist. Mit Hülfe des Satzes II) kann man den Satz I) auf alle stetigen Functionen ausdehnen, die nur eine endliche Anzahl von Maximis und Minimis haben. Hierbei nennt Dirichlet eine Function stetig, wenn sie zwischen 0 und h endlich und bestimmt bleibt, und bei der ausserdem noch $f(\beta+\delta)-f(\beta)$ mit δ ohne Grenzen kleiner wird. Es lässt sich jedoch in Folgendem überall die schärfere Definition zu Grunde legen: Eine Function $f(\beta)$ ist in der Umgebung eines Punktes β dann stetig, wenn es nach Annahme einer von Null verschiedenen, sonst beliebig kleinen Grösse ε stets eine Grösse δ' derart giebt, dass für alle Grössen δ'', deren absoluter Betrag unter dem von δ' liegt, $f(\beta+\delta'')-f(\beta)$ unter die Grösse von ε herabsinkt. Ist die Function $f(\beta)$ an der Stelle 0 unstetig, so convergirt die Fourier'sche Reihe auch noch, aber gegen den Werth $\lim_{\varepsilon=0}\frac{\pi}{2}\big(f(0+\varepsilon)$ $+f(0-\varepsilon)\big)$. Dies geschieht auch noch, wenn ausserdem noch in dem Intervalle von 0 bis h eine beliebig grosse, aber endliche Anzahl von Unstetigkeitsstellen liegt.

Wenn man nun die Function $\varphi(x)$ denselben Bedingungsn unterwirft, wie $f(\beta)$, so lässt sich unschwer zeigen, dass die Summe S für jede innerhalb der Grenzen $-\pi$ und $+\pi$ gelegene Stelle x gegen den Werth $\lim_{\varepsilon=0}\frac{\varphi(x+\varepsilon)+\varphi(x-\varepsilon)}{2}$ convergirt, für die Grenzen selbst aber gegen den Werth $\lim_{\varepsilon=0}\frac{\varphi(-\pi+\varepsilon)+\varphi(\pi-\varepsilon)}{2}$ convergirt.

Wir haben demnach den Satz:

„Die Fourier'sche Reihe für eine Function, die

1) nicht unendlich wird,
2) nicht unendlich viele Unstetigkeiten, und
3) nicht unendlich viele Maxima und Minima besitzt,

convergirt gegen den Werth der Function an allen Stellen, ausser an den Unstetigkeitsstellen, wo sie gegen den Mittelwerth aus den beiderseitigen Grenzwerthen convergirt.“ Die Bedingungen, denen hier die Function unterworfen ist, sind zumeist als die Dirichlet'schen bezeichnet worden.

Es fragt sich nun, was wir unter dem Ausdruck zu verstehen haben „eine Reihe stellt eine Function dar“. Wollten wir darunter verstehen, dass der Werth der Reihe mit dem Werthe der Function für jeden im Intervall gelegenen Punkte übereinstimmt, so müssten wir schon bei Functionen, welche den Dirichlet'schen Bedingungen genügen, auf eine Darstellung durch eine Fourier'sche Reihe verzichten. Wir werden daher folgende Definition vorziehen: „Eine Reihe stellt eine Function in einem Intervalle dann dar, wenn ihre Werthe mit denen der Function für alle im Intervall gelegenen Punkte mit Ausnahme einer endlichen Anzahl bestimmter Punkte übereinstimmen“. Dann wird eine den Dirichlet'schen Bedingungen genügende Function durch die Fourier'sche Reihe allemal dargestellt und die Ausnahmepunkte sind die Unstetigkeitspunkte. Nimmt jedoch eine Function an den Unstetigkeitsstellen jedesmal den Mittelwerth aus den beiderseitigen Grenzwerthen an (ein Fall, den auch Riemann a. a. O. pag. 223 besonders in Betracht zieht), und genügt sie den Dirichlet'schen Bedingungen, so ist sie ausnahmslos durch eine Fourier'sche Reihe darstellbar; und selbst für eine Function, die nur der ersten Bedingung genügt, im Uebrigen aber unendlich viele Unstetigkeiten besitzt, ist noch die Möglichkeit offen gelassen, sie ausnahmslos durch eine Fourier'sche Reihe darzustellen.

Es würde nichts hindern zu definiren, dass eine Reihe auch dann noch eine Function darstellt, wenn man selbst an einer unendlich grossen Anzahl von Stellen auf die Uebereinstimmung der Werthe verzichtet. Diese Auffassung findet sich bei Riemann auch, a. a. O. pag. 245, letzter Absatz, im Gegensatz zu pag. 223, zweiter Absatz. Da es sich aber nur um den Wortlaut handelt, so ziehe ich die erstgegebene Definition vor, da sie mir als die natürlichere erscheint.

Wenn wir nun bisher nur von einer Darstellung einer um 2π periodischen Function innerhalb der Grenzen $-\pi$ und $+\pi$ gesprochen haben, so ist dies nur der Einfachheit halber geschehen. Man kann statt dieser Grenzen leicht beliebige andere substituiren und die bisherigen Sätze auf Functionen mit beliebigen Perioden übertragen. Sie gelten aber auch für eine gar nicht periodische Function, wenn sie nur den nöthigen Bedingungen genügt, zwischen ganz beliebigen Grenzen, indem der Verlauf einer willkürlichen Function innerhalb einer gegebenen Strecke eine beliebige Verfügung über alle ausserhalb der Strecke gelegenen Werthe nicht verbietet.

Wir haben nun noch auf einen Punkt aus dem Dirichlet'schen Beweis näher einzugehen, dass nämlich die Fourier'sche Reihe an den Unstetigkeitsstellen gegen den Mittelwerth aus den beiden Grenzwerthen convergirt. Es ist von Herrn Schläfli bezweifelt worden, ob dies angänglich und richtig

sei.[1]). Herr Schläfli beruft sich auf Duhamel[2]), indem er von dessen Abhandlung meint, hier scheine dem Verfasser der Gedanke vorzuschweben, dass es natürlicher wäre, der durch die trigonometrische Reihe ausgedrückten Function an der Unstetigkeitsstelle alle Werthe, die zwischen den Grenzwerthen in stetiger Folge liegen, beizulegen. Nun spricht freilich Duhamel den Satz aus: Wenn man die Summe der ersten n Glieder einer Reihe, deren einzelne Glieder stetige Functionen von x sind, zusammenzieht, und statt x eine Function von n substituirt, die mit wachsendem n in einen Werth x_1 übergeht, für den die Function eine Stetigkeitsunterbrechung erfährt, so kann man diese Function von n so einrichten, dass die Function gegen jeden Zwischenwerth zwischen den Grenzwerthen convergirt. Er sagt aber zugleich, es gäbe zwei Wege, um den Werth einer Reihe an einer Stelle x_1 zu finden. Man könne zuerst $x = x_1$ setzen und dann summiren, so fände man einen Werth, und diesen Weg wende man an, um die Summe der Reihe wirklich auszuwerthen. Oder man bildet zuerst die Summe formal und setzt dann den Werth $x = x_1$ ein. Duhamel erkennt sehr richtig, dass bei stetigen Functionen beide Wege zu demselben Ziele führen, bei den unstetigen aber der angeführte Satz gelte. Aber die zweite Art und Weise der Aufsuchung der Summe ist überhaupt gar nicht zulässig, denn man darf nicht behaupten, dass die gefundene Summenformel für den Werth $x = x_1$ mit der Reihe für $x = x_1$ übereinstimme. Gegen die Zulassung einer derartigen Definition ist mit entscheidendem Gewicht ihre völlige Willkürlichkeit geltend zu machen. Es ist daher nur zulässig, den ersten Weg einzuschlagen, und dann convergirt die Fourier'sche Reihe nur gegen den Mittelwerth.

Auch Herr P. du Bois-Reymond[3]) hat den Nachweis zu führen versucht, dass die Fourier'sche Reihe an den Unstetigkeitsstellen jeden beliebigen zwischen den Grenzwerthen liegenden Werth annehmen kann. Er construirt an einer Unstetigkeitstelle $x = x_1$ als Werth des $\lim_{n=\infty,\ x=x_1}$ der Fourier'schen Reihe:

$$\frac{\pi}{2}\left(f(x_1+0)+f(x_1-0)\right)+\left(f(x_1+0)-f(x_1-0)\right)\lim_{\substack{n=\infty\\ x=x_1}}\int_0^{n(x-x_1)}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha.$$

1) Einige Zweifel an der allgemeinen Darstellbarkeit einer willkürlichen periodischen Function einer Variablen durch eine trigonometrische Reihe. Bern 1874. Universitätsprogrm. pag. 15, und Borchardt's Journ. für Math. Bd. 72. Ueber die part. Differentialgl. $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ pag. 284.

2) Liouville Journ. des Math. Tom. XIX. 1854. Note sur la discontinuité des valeurs des séries, et sur les moyens de la reconnaître.

3) Math. Annalen Bd. 7. 1873. Ueber die sprungweisen Werthveränderungen analytischer Functionen. Siehe insbesondere pag. 254: „Also sind alle Werthe,

Lässt man hierin erst $x = x_1$ und dann $n = \infty$ werden, so erhält man den Dirichlet'schen Mittelwerth; lässt man erst $n = \infty$ und dann $x = x_1$ werden, so erhält man die beiden Grenzwerthe, je nachdem man sich x_1 von der positiven oder negativen Seite her nähert; macht man aber die Grenzübergänge gleichzeitig, so erhält man alle dazwischen liegenden Werthe. Dies soll nach Herrn P. du Bois-Reymond die „eigentliche Werthbestimmung der Fourier'schen Reihe" sein. Dass sie auf einer nicht zulässigen Ansicht über Reihensummationen beruht, ist nach dem Vorhergehenden klar. Es darf keine andere Reihenfolge stattfinden, als die, zuerst $x = x_1$ und dann $n = \infty$ zu setzen, und dann fällt hier auch die sogenannte Stetigvieldeutigkeit fort. Andernfalls erhält man nämlich gar nicht den Werth der Fourier'schen Reihe an der Stelle $x = x_1$.

Man hat sich zu der irrthümlichen Ansicht, dass die Dirichlet'sche Mittelwerthbestimmung nicht genau richtig sei, verleiten lassen durch die oben erwähnte Betrachtung einer durch das Poisson'sche Integral im Innern eines Kreises mit dem Radius 1 definirten Function von x und r. Wenn die mit dem Poisson'schen Integral identische Reihe am Rande in die willkürlich gegebene, endliche, stetige und eindeutige Function $f(x)$ übergehen soll, so geschieht dieser Uebergang auf stetige Weise, und selbst dann gilt der von Herrn H. A. Schwarz bewiesene Satz, wenn die Function an einzelnen Stellen unstetig wird, wenn man nur auf die Uebereinstimmung der durch die Reihe definirten Function mit der gegebenen Function an den Unstetigkeitsstellen am Rande verzichtet. Herr Prym untersucht (a. a. O.) genau die Art und Weise des Ueberganges und zeigt: dass die Function beim Uebergange $r = 1$ an den Unstetigkeitsstellen jeden beliebigen zwischen den Grenzwerthen liegenden Werth und diese selbst annehmen kann, je nach der Richtung, in welcher man die Verbindungslinie zwischen dem Endpunkte von r und der Unstetigkeitsstelle an dieser gegen Null abnehmen lässt. Die Fourier'sche Reihe convergirt aber durchaus nur gegen den Mittelwerth, da sich x dem Werthe x_1 im Gebiete einer Variablen nähert, dagegen der Endpunkt von r der Unstetigkeitsstelle im Gebiete zweier Variablen.

Die Dirichlet'schen Bedingungen sind keine nothwendigen, sondern nur hinreichende. Nach ihnen blieb noch in Frage, ob eine Function, die

1) an einer Stelle unendlich wird,
2) unendlich viele Unstetigkeiten,
3) unendlich viele Maxima und Minima besitzt,

noch durch die Fourier'sche Reihe darstellbar ist.

welche die Fourier'sche Formel und die Fourier'sche Reihe an der Sprungstelle repräsentirt, eingeschlossen zwischen den Grenzen $\pi f(x_1 - 0)$ und $\pi f(x_1 + 0)$, ein Intervall, das sie continuirlich ausfüllen, und kein Werth liegt ausserhalb."

Wird die Function an einer Stelle c unendlich, so stellt Dirichlet bei Gelegenheit einer anderen Abhandlung[1]) die Convergenz des Integrals $\int f(\alpha)d\alpha$, wenn es über die Stelle c erstreckt wird, als Bedingung auf, damit die Fourier'sche Reihe auch dann noch die Function darstelle. Jedoch hat Dirichlet diese Bedingung durchaus nur als eine hinreichende, nicht als eine nothwendige aufstellen wollen. Wenn das Integral unbedingt convergirt, so ist diese Bedingung in der That eine ausreichende, wie Herr P. du Bois-Reymond bemerkt hat[2]).

Die beiden letzten Fälle, äusserte sich Dirichlet am Schlusse seiner ersten Abhandlung (pag. 169), seien auf die behandelten zurückzuführen. Eine Function, die unendlich viel Unstetigkeiten besässe, sei durch die Fourier'sche Reihe noch darstellbar, wenn sich nur zwischen zwei Stellen (a b) immer noch andere (r s) finden liessen, so dass zwischen letzteren die Function stetig wäre. Die Fundamentalsätze aus der Analysis, die zu dieser Erweiterung seines Satzes nothwendig seien, verspricht er in einer späteren Note auseinanderzusetzen, in der er sich auch noch mit andern merkwürdigen Eigenschaften der Reihe beschäftigen will. Dies Versprechen hat er aber nicht eingelöst. Die Bedingung, die er für die unendlich oft unstetigen Functionen formulirt, entspringt nach ihm aus dem Begriffe des bestimmten Integrals, und man hat daher sagen können, Dirichlet behaupte hier, für alle in seinem Sinne integrablen Functionen gelte die Fourier'sche Darstellung. Die genaue Ausführung des Beweises hat Herr Lipschitz gegeben[3]). Derselbe interpretirt Dirichlet's Ansicht über die Functionen mit unendlich vielen Unstetigkeiten gewiss richtig dahin, dass es dann nur eine endliche Anzahl singulärer Punkte geben dürfe, in deren Umgebung unendlich viel Unstetigkeitspunkte liegen. Dann aber stellt die Fourier'sche Reihe, wie er beweist, in der That die Function noch dar. Ob die Function auch an den singulären Stellen durch die Reihe dargestellt wird, bleibt unentschieden, und wir haben kein Mittel, diese Frage zu beantworten.

Wenn nun eine Function unendlich viele Maxima und Minima hat, so hindert nichts die Fourier'sche Reihe für diese Function aufzustellen, wenn

---

1) Crelle's Journ. für Math. Bd. 17. pag. 54.

2) Borchardt's Journ. für Math. Bd. 79. 1874. Allgemeine Lehrsätze über den Giltigkeitsbereich der Integralformeln, die zur Darstellung willkürlicher Functionen dienen, pag. 43—46, und Abhandlungen der Bayerischen Akademie Bd. XII, II. Math.-Phys. Classe. 1876. pag. 43—44.

3) Borchardt's Journ. für Math. Bd. 63. 1864. pag. 296. de explicatione per series trigonometricas etc. Die Abh. erschien zuerst pro aditu muneris professoris ordinarii in ord. phil. univ. Frid. Guil. Rhen. 1864 Mai.

nur die Coefficienten einen Sinn haben und die Reihe convergirt. Aber dass die so gebildete Reihe die Function auch wirklich darstelle, kann erst behauptet werden, wenn gezeigt ist, dass ihre Werthe in jedem Punkte höchstens mit Ausnahme einer endlichen Anzahl bestimmter Punkte mit denen der Function übereinstimmen.

Die Functionen mit unendlich vielen Maximis und Minimis sind in solche einzutheilen, welche an einer Maximum-Minimumsstelle unendlich viele Oscillationen mit unendlich kleiner Amplitude besitzen, und solche, bei denen die Amplituden endlich sind. Die ersteren können stetige Functionen sein, die letzteren sind unstetige. Dirichlet hielt nun jedenfalls alle stetigen Functionen für darstellbar durch die Fourier'sche Reihe ohne irgend welche Ausnahmepunkte, und er soll auch nach einer mündlichen Mittheilung von Herrn Weierstrass, auf welche sich Herr P. du Bois-Reymond[1]) bezieht, diesen Glauben nicht verloren haben. Auch Riemann hat, nach mehreren Stellen seiner Schriften zu schliessen, an die Dirichlet'sche Behauptung geglaubt[2]); und H. Hankel[3]) meint geradezu „es sei durch Dirichlet, Lipschitz und Riemann erwiesen, dass alle stetigen Functionen in eine Fourier'sche Reihe entwickelbar seien". Das Irrige dieses Glaubens hat Herr P. du Bois-Reymond aufgedeckt, nachdem er nach mannichfachen vergeblichen Versuchen, den Satz zu erweisen, zu der Ansicht gelangt war, dass er wohl nicht richtig sei. In einer weitläufigen Untersuchung[4]) werden verwickelte Bedingungen aufgestellt, unter denen die Fourier'sche Reihe, welche sonst die stetige Function darstellt, an einzelnen Stellen nicht mit den Functionswerthen übereinstimmt. Da wir jedoch den Hauptwerth dieser Untersuchung darin sehen, dass ein erstes Bespiel einer solchen stetigen Function gegeben wurde, so werden wir nur am Schluss ein einfacheres Beispiel angeben, welches Herr Prof. H. A. Schwarz in seinen Vorlesungen gegeben, und dessen Mittheilung derselbe mir gütigst gestattet hat. Dasselbe ist zwar in dem allgemeineren du Bois-Reymond'schen Beispiel formal enthalten, zeichnet sich aber sowohl in der Anlage, als im Beweise durch grössere Einfachheit aus.

Hauptsächlich aus der Annahme, dass alle stetigen Functionen nach

1) Abh. der Bayer. Akad. XII, II. pag. VIII. Anm.

2) Ges. Werke. Inauguraldiss. pag. 3. „Neuere Untersuchungen haben indessen gezeigt . . ." und Habilitationsschrift pag. 223. „In der That für alle Fälle der Natur . . .", und pag. 224 „wenn man die unnöthige Voraussetzung . . . .".

3) Ueber die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen. Tübingen 1870. Universitätsschrift. § 3.

4) Abh. der Bayer. Akad. Bd. XII, II. Math.-Phys. Classe 1876. Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourier'schen Darstellungsformeln. Cap. IV.

dem Dirichlet'schen Beweise durch die Fourier'sche Reihe darstellbar seien, entspringt wohl auch Riemann's Ansicht (a. a. O. pag. 223, 230 und 251), dass Functionen, auf welche sich die Dirichlet'sche Untersuchung nicht erstrecke, nicht in der Natur vorkämen. Wir wollen es mit Herrn Heine[1]) schon dahingestellt sein lassen, ob die unstetigen Functionen überhaupt in der Natur vorkommen, und es vorziehen, dieser naturphilosophischen Frage gegenüber zu sagen, dass wir darüber nichts wissen. Jedenfalls müssen wir uns bewusst bleiben, dass wir zu den gebrauchten Hypothesen in der Physik eine neue hinzufügen, wenn wir die Entwickelbarkeit einer auftretenden Function in eine trigonometrische Reihe annehmen.

Die Functionen mit unendlich vielen Maximis und Minimis, welche im Uebrigen den Dirichlet'schen Bedingungen genügen, hat Herr Lipschitz (a. a. O.) einer Untersuchung unterworfen, und hat eine Bedingung angegeben, unter der die für eine solche Function aufgestellte Fourier'sche Reihe sowohl convergirt, als auch in ihren Werthen in jedem Punkte mit denen der Function übereinstimmt. Herr Lipschitz betrachtet eine Function, die innerhalb der Grenzen endlich und stetig ist, oder nur eine endliche Anzahl von Stetigkeitsunterbrechungen erfährt, aber unendlich viele Maxima und Minima sei es in Punkten oder Strecken besitzt. Die beiden andern von Dirichlet nicht bis zu Ende behandelten Fälle, dass die Function an einzelnen Stellen unendlich viele Unstetigkeiten besässe, sollen hier nicht statthaben: „quia duobus, vel tribus (sc. casibus) simul adcitis seriei species potius quam vis et natura mutatur". Jedoch wird die Eigenthümlichkeit der Reihe nur dann nicht geändert, wenn nicht in demselben Punkte mehrere der von Dirichlet ausgeschlossenen Singularitäten zusammentreffen. Herr Lipschitz stützt seinen Beweis auf die beiden Integraltheoreme Dirichlet's I und II pag. 240. Er zeigt, dass sie gelten und damit, dass die Fourier'sche Reihe noch gegen den Functionswerth convergire, wenn an allen Stellen, wo die Function oscillirt, der absolute Betrag von $f(\beta + \delta) - f(\beta)$ mit abnehmendem δ rascher gegen Null convergirt, als das Product einer Constanten B und einer Potenz von δ mit beliebigem positiven Exponenten. Bezeichnen wir den absoluten Betrag der Schwankung $f(\beta + \delta) - f(\beta)$ mit D, so lautet die Lipschitz'sche Bedingung „$D < B\,\delta^{\alpha}$", wo $\alpha > 0$ ist. Diese Bedingung enthält mehr als die Forderung der gleichmässigen Stetigkeit. Wenn die Function gleichmässig stetig sein soll, so muss es für alle Werthe von β einen von β unabhängigen Minimalwerth δ' geben, so dass für alle Werthe δ'', die dem absoluten Betrage nach kleiner als δ' sind, $f(\beta + \delta'') - f(\beta)$ unter dieselbe vorgegebene beliebig kleine Grösse σ sinkt.

1) Handbuch der Kugelfunctionen. 2. Aufl. Bd. 1. pag. 55.

Die Lipschitz'sche Bedingung verlangt aber mehr als gleichmässige Stetigkeit, denn es ist sehr wohl möglich, dass gleichmässige Stetigkeit stattfindet, aber wenn $\sigma = B\delta^\alpha$ vorgegeben ist, ist nicht gesagt dass der Minimalwerth δ', den die Bedingung der gleichmässigen Stetigkeit ergiebt, auch $\geqq \left|\sqrt[\alpha]{\frac{\sigma}{B}}\right|$ sei. Die Bedingung umfasst also keineswegs alle stetigen Functionen.

Die Lipschitz'sche Demonstration gilt nur dann nicht, wenn D schwächer gegen Null convergirt, als $B\delta^\alpha$. Herr Lipschitz sagt, diese Ausnahme träte ein, wenn $B\delta^\alpha$ langsamer gegen Null convergirte, als $\frac{1}{\log \delta}$, und beruft sich dabei auf Gauss[1]), der diese Bemerkung zuerst gemacht hat. In der That, da δ^α stärker gegen Null convergirt, als $\frac{1}{\log \delta}$, so convergirt D erst recht schwächer gegen Null, als $B\delta^\alpha$, wenn es schwächer als $\frac{1}{\log \delta}$ gegen Null convergirt. Es ist aber auch nöthig, das Umgekehrte zu betrachten. Wenn D rascher gegen Null convergirt, als $\frac{1}{\log \delta}$, so ist damit noch nicht gesagt, dass es auch rascher gegen Null convergirte, als $B\delta^\alpha$. Ist letzteres nun nicht auch der Fall, so würde der Beweis von Herrn Lipschitz schon hier seine Geltung verlieren. Das ist aber nicht richtig. Denn man sieht leicht, das man ganz von vornherein, als beschränkende Bedingung $\lim_{\delta=0} D \log \delta = 0$ aufstellen konnte, welche identisch ist mit der Bedingung, dass D stärker gegen Null convergirt, als $\frac{1}{\log \delta}$. Herr Lipschitz bezeichnet selbst den Angelpunkt seines Beweises (a. a. O. pag. 310) „Atque hac in re sunt nervi demonstrationis nostrae". Es wird nämlich der Rest der Reihe zwischen zwei Grenzen eingeschlossen, und in dem einen Grenzwerth tritt $\lim_{\delta=0} D \log \delta$ als überschüssig über die Null auf. Damit nun der Rest gleich Null werde, setzt Herr Lipschitz $D < B\delta^\alpha$ und hieraus allein entspringt seine Bedingung. Man kann also die Lipschitz'sche Bedingung sofort durch die umfassendere $\lim_{\delta=0} D \log \delta = 0$ ersetzen. Herr Dini[2]) bedient sich derselben auch ohne Weiteres. Also die Fourier'sche Reihe stellt auch eine Function mit unendlich vielen Maximis und Minimis dar, wenn nur an allen Stellen, wo die Function oscillirt, $\lim_{\delta=0} D \log \delta = 0$ ist. Wenn aber an einer endlichen Anzahl von Oscillationspunkten die Bedingung nicht mehr erfüllt ist, so kann man auch dann noch sagen, die

1) Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältniss des Quadrats wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte. Art. 16.

2) Sopra la serie di Fourier. Pisa 1872.

Fourier'sche Reihe stelle eine derartige Function dar; jedoch muss man darauf verzichten, die Convergenz der Fourier'schen Reihe oder die Uebereinstimmung ihrer Werthe mit denen der Function an jenen singulären Punkten mit den bisher zum Ziele führenden Mitteln zu erweisen. Der Erfolg der Lipschitz'schen Untersuchung betreffend die Richtigkeit der beiden Integraltheoreme lehrt schon, dass Riemann mit seiner Behauptung (a. a. O. pag. 224), dass die Integraltheoreme, im Falle die Function unendlich viele Maxima und Minima hat, nicht mehr ausreichten, im Irrthum war. Es scheint mir überhaupt, dass eine Entscheidung, ob die Fourier'sche Reihe für eine Function convergirt oder divergirt, nur aus diesen beiden Integraltheoremen geschöpft werden kann, so lange die Function noch integrirbar ist. Erfüllt die Function nicht mehr die Bedingung der Integrirbarkeit, so haben die Integraltheoreme freilich ihren Sinn verloren; in diesem Falle aber haben wir überhaupt noch gar kein Mittel zur Untersuchung.

Durch die Bedingung, welche Herr Lipschitz aufgestellt hat, ist zwar wieder von einer ganzen Functionenklasse nachgewiesen, dass sie durch die Fourier'sche Reihe darstellbar ist, aber die nothwendigen Bedingungen haben wir damit eben so wenig erreicht, als durch die Dirichlet'sche Abhandlung. Ob eine Function, welche den bisher bekannten Bedingungen nicht genügt, nicht auch noch durch eine trigonometrische Reihe darstellbar ist, bleibt noch völlig unentschieden. Aber man kann vielleicht sagen, es ist zu viel verlangt, die nothwendigen Bedingungen anzugeben, denen eine Function genügen muss, damit sie durch die Fourier'sche Reihe darstellbar sei. Neben der allgemeinsten Definition, dass eine Reihe positiver Grössen dann convergirt, wenn die Summe der n ersten Glieder mit wachsendem n sich in einer bestimmten endlichen Grenze nähert, giebt es keine andere Definition, welche denselben Umfang hätte. Man kann daher wohl immer engere, dieser Definition immer näher rückende Bedingungen aufstellen, und damit das Gebiet der darstellbaren Functionen immer mehr erweitern. Hätte man aber die nothwendigen Bedingungen selbst, so könnten diese nicht verschieden sein von den in der Definition gegebenen, und eine Aussage über den Umfang des Gebietes, in dem die Functionen noch darstellbar sind, würde wieder auf die Definition des Begriffes der Darstellbarkeit einer Function zurückführen.

Wenn daher ein Versuch, noch weniger einschränkende Bedingungen als die Dirichlet'schen und die Lipschitz'sche zu finden, nicht auf einfache Resultate führt, so erscheint er insofern nicht völlig befriedigend, als die Bedingungen eben immer noch weiter eingeschränkt werden können, ohne dass man doch jemals zum Endziel gelangte. Es ist auch auf diesem Wege

weiter vorzudringen nur noch ein Versuch gemacht worden, nämlich durch die Abhandlung des Herrn P. du Bois-Reymond: „Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourier'schen Darstellungsformeln" (a. a. O. Cap. I—III). Dieselbe scheint mir jedoch zu keinen greifbaren Resultaten zu führen.

Nur das Eine wollen wir ihr entnehmen, dass in der That bei Functionen, welche der Lipschitz'schen Bedingung nicht mehr genügen, bereits Divergenz der Fourier'schen Reihe eintreten kann.

III.

Riemann hat in seiner Habilitationsschrift einen folgenreichen Schritt gethan, der das Verständniss aller folgenden Untersuchungen über diesen Gegenstand eröffnet, und sie überhaupt erst ermöglichte, indem er nämlich den Dirichlet'schen Weg verliess, und die Frage so stellte: Welche Eigenschaften muss eine Function haben, damit es eine trigonometrische Reihe giebt, welche überall da, wo sie convergirt, gegen den Werth der Function convergirt?

Ob diese Reihe dann die Function darstellt, wird hiermit nicht entschieden. Von dieser Seite aus konnte Riemann nun allerdings die Frage nach nothwendigen und hinreichenden Bedingungen, oder wie wir kürzer sagen, nach „den nothwendigen Bedingungen" aufwerfen. Und es ist ihm in der That gelungen, die nothwendigen Bedingungen dafür aufzufinden, dass es eine trigometrische Reihe giebt, welche, wo sie convergirt, gegen den Functionswerth convergirt. Sobald er aber wieder den Dirichlet'schen Weg betrat, musste er wieder zu bloss hinreichenden Bedingungen seine Zuflucht nehmen. In diesem Sinne ist daher auch nur die Bemerkung Riemann's (a. a. O. pag. 230) zu verstehen: „es müssen zunächst zur Darstellbarkeit nothwendige Bedingungen aufgesucht, und aus diesen dann zur Darstellbarkeit hinreichende ausgewählt werden". Dies erscheint jedoch in einer anderen Beziehung nicht ganz correct; denn hinreichende Bedingungen müssen allemal sämmtliche nothwendigen einschliessen, ebenso wie umgekehrt die Functionenklassen, welche in Folge der nothwendigen Bedingungen darstellbar sind, die welche in Folge ausreichender darstellbar sind, umfassen.

Die Riemann'sche Habilitationsschrift zerfällt in drei Theile. Der erste ist der historische, auf den wir oben mehrfach Bezug genommen haben. Der zweite Theil enthält jene Auseinandersetzung über Fundamentalsätze der Analysis, die schon Dirichlet für unumgänglich nothwendig zum weiteren Fortschreiten in diesem Gebiete gehalten hat. Der Begriff des bestimmten Integrals wird definirt, und untersucht, wann eine Function ein Integral

besitzt. Diese Untersuchungen sind allgemein angenommen, und wir können ein näheres Eingehen darauf füglich unterlassen.

Die von Riemann anerkannte Definition des bestimmten Integrals einer Function $f(x)$, die innerhalb des Integrationsgebietes an einem Punkte unendlich wird, ist auf mehrfache Integrale erweitert worden. Wird z. B. eine sonst im Integrationsgebiete G stetige und endliche Function zweier Variablen $f(x, y)$ an einer Stelle $X_0 Y_0$ unendlich, so schliesse man von G ein kleines Flächenstück, welches die Stelle $X_0 Y_0$ enthält, aus. Wenn dann das über den übrig bleibenden Theil von G erstreckte Integral einer festen Grenze A zustrebt, wie man auch das ausgeschlossene Flächenstück gegen 0 convergiren lässt, so versteht man unter dem Werthe des bestimmten Integrals eben jenen Werth A; andernfalls hat das Integral keine Bedeutung. Herr P. du Bois-Reymond nimmt in seinen Schriften über die Fourier'schen Integrale einen Standpunkt ein, der von der consequenten Fortentwicklung der Riemann'schen Definition verschieden ist. Er beruft sich dabei auf Cauchy[1]). Herr du Bois-Reymond definirt nämlich[1]): „Ein bestimmtes Doppelintegral $\int\limits_{X_0}^{X_1} dx \int\limits_{Y_0}^{Y_1} dy\, f(x, y)$, wo $X_0 Y_0 X_1 Y_1$ Zahlen bedeuten, ist das Resultat des Ueberganges der variablen Grenzen $x_0 x_1 y_0 y_1$ des unbestimmten Integrals $\int\limits_{x_0}^{x_1} dx \int\limits_{y_0}^{y_1} dy\, f(x, y)$ in die Zahlenwerthe $X_0 X_1 Y_0 Y_1$“, und wendet diese Definition auch für den Fall an, dass $X_0 Y_0$ ein Unendlichkeitspunkt ist. Die Folgen einer solchen Definition, auf welche Riemann's Urtheil über die Cauchy'schen Festsetzungen in Betreff der Hauptwerthe, dass sie schon wegen ihrer grossen Willkürlichkeit zur allgemeinen Einführung wohl kaum geeignet seien, zutrifft, treten denn auch bald hervor. Herr P. du Bois-Reymond giebt nämlich, indem er $f(xy) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\, \partial y}$ setzt, dem bestimmten Doppelintegral die Form:

$$F(X_1, Y_1) - F(X_0, Y_1) - F(X_1, Y_0) + F(X_0, Y_0),$$

und folgert nun, dass je nach der Reihenfolge, in der $x_0 x_1 y_0 y_1$ ihre festen Werthe annehmen, das Integral im Allgemeinen vierzehn verschiedene Werthe (oder auch unendlich viele) annimmt[2]).

Der Standpunkt, den Herr P. du Bois-Reymond in Bezug auf die Berechnung eines bestimmten Integrals, in dem die zu integrirende Function

---

1) Math. Annalen. Bd. 4. pag. 366.
2) Siehe Borchardt's Journal für Math. Bd. 69. pag. 70 u. f. u. 1).

einen willkürlichen Parameter enthält, einnimmt[1]), ist bei der Berechnung des Poisson'schen Integrals, die a. a. O. vorgenommen wird, unstatthaft, wie aus den Erörterungen auf pag. 241—243 einleuchtet.

Durch die Untersuchungen Riemann's über die Integrirbarkeit unendlich oft unstetiger Functionen wurde zugleich entschieden, dass eine stetige Function nicht allemal einen Differentialquotienten haben müsse. Es hat sich besonders durch die Untersuchungen von Herrn Weierstrass gezeigt, dass die Nichtdifferentiirbarkeit grossen Functionenklassen eigen ist. Darum erhalten aber nicht differentiirbare Functionen noch nicht den Charakter derjenigen Functionen, über deren Darstellbarkeit durch eine Fourier'sche Reihe wir nichts wissen. Die von Herrn Schläfli[2]) ausgesprochenen Zweifel, ob eine nicht diffentiirbare Function überhaupt noch in eine Fourier'sche Reihe entwickelbar sei, sind daher nicht begründet. Weder der Dirichlet-sche Beweis, noch die Riemann'sche Bedingung der Integrirbarkeit setzen die Differentiirbarkeit der Function voraus. Auch ist die Behauptung von Herrn Schläfli (a. a. O. pag. 13) irrig, die Convergenz der Fourier'schen Reihe zu schätzen, begegne selbst dann noch Schwierigkeiten, wenn die Function wohl einen ersten, aber keinen zweiten Differentialquotienten mehr besitzt. Dem wird von Herrn Prof. H. A. Schwarz durch die Bemerkung begegnet, man könnte dann statt der ursprünglichen Function $f(\vartheta)$ eine Function: $f(\vartheta) + M\vartheta$ einführen, wo M den Maximalwerth von $f'(\vartheta)$ im Intervall bezeichnet. Dann gilt für das in der Schläfli'schen Abhandlung auftretende Integral: $\lim_{\beta=0} \int_{-\beta}^{+\beta} f'(\vartheta + \varphi) \sin n\varphi \, d\varphi$ streng der Dirichlet'sche Beweis.

Im dritten Theile seiner Abhandlung, der sich mit der Darstellbarkeit einer Function durch trigonometrische Reihen ohne besondere Voraussetzungen über die Natur der Functionen beschäftigen soll, schlägt nun Riemann den angegebenen Weg ein.

Eine trigonometrische Reihe $A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_k + \ldots$ wo $A_0 = \frac{b_0}{2}$, $A_k = a_k \sin kx + b_k \cos kx$ ist, soll durch Ω bezeichnet werden und ihr Werth an allen denjenigen Stellen, wo sie convergirt, mit $f(x)$. Ferner sollen die Glieder A_k für jeden Werth von x zuletzt unendlich klein werden. Dann lässt sich zeigen, dass die durch zweimalige Integration aus Ω erhaltene Reihe

$$F(x) = C + C'x + A_0 \frac{x^2}{2} - \frac{A_1}{1} - \frac{A_2}{4} - \frac{A_3}{9} - \ldots - \frac{A_k}{k^2} - \ldots$$

1) Math. Annalen. Bd. 7. pag. 257 u. f.

2) Siehe pag. 242. Anm. 1.

eine für jeden Werth von x convergente Reihe ist, beständig endlich ist, und eine Integration zulässt. Nun beweist Riemann, dass aus der Convergenz der Reihe Ω nothwendig folge (art. 8; 9, I), dass

$$1)\quad \frac{F(x+\alpha+\beta)-F(x-\alpha+\beta)-F(x+\alpha-\beta)+F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta}$$

gegen $f(x)$ convergirt, wenn α und β so unendlich klein werden, dass ihr Verhältniss doch ein endliches bleibt,

$$2)\quad \mu^2 \int_b^c F(x) \cos \mu(x-a)\, \lambda(x)\, dx$$

mit wachsendem μ unendlich klein wird, wenn b und c willkürliche endliche Grenzen sind, $\lambda(x)$ und $\lambda'(x)$ an den Grenzen des Integrals gleich Null und zwischen diesen immer stetig sind, und $\lambda''(x)$ nicht unendlich viel Maxima und Minima hat.

Es ist nun zu untersuchen, ob diese Bedingungen auch umgekehrt hinreichend sind, damit es eine trigonometrische Reihe giebt, deren Coefficienten zuletzt unendlich klein werden, und welche überall da, wo sie convergirt, gegen den Werth der Function convergirt.

Riemann multiplicirt die Gleichung:

$$F(x) - C'x - A_0\frac{x^2}{2} = C - \frac{A_1}{1} - \frac{A_2}{4} \cdots\cdots - \frac{A_k}{k^2} - \cdots\cdots$$

mit $\cos n(x-t)$ und integrirt von $-\pi$ bis $+\pi$. Damit findet er für A_n den Werth:

$$A_n = -\frac{n^2}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left(F(t) - C't - A_0\frac{t^2}{2}\right)\cos n(x-t)\, dt$$

und behauptet nun, A_n müsste nach Voraussetzung 2) unendlich klein werden mit wachsendem n. Dies leuchtet nicht unmittelbar ein. Es ist indessen von Herrn H. Weber (in einer Anm. pag. 251 der Habilitationsschrift) gezeigt worden, wie das schliessliche Verschwinden der Glieder A_n auf die Voraussetzung 2) zurückgeführt werden kann. Herr Ascoli hat in einer Abhandlung [1]), die im Wesentlichen einen Commentar zu Riemann's Habilitationsschrift bildet, diese Stelle (a. a. O. pag. 307 und folgende) ausführlich behandelt, und die Riemann'sche Behauptung auf demselben Wege, wie Herr H. Weber abgeleitet.

Es ist also zunächst bewiesen, dass die Glieder A_k der trigonometrischen

1) Annali di Matematica. Ser. II. Tom. VI. dic. 1873 al genn. 1875. pag. 21 e 298. Sulla serie di Fourier.

Reihe zuletzt unendlich klein werden. Dass dann die Reihe, wo sie convergirt, gegen den Werth $f(x)$ convergirt, folgt aus der Voraussetzung 1).

Die zwei Bedingungen 1) und 2) sind also für den behaupteten Satz die nothwendigen.

Riemann zeigt nun weiter (art. 9, III) den wichtigen Satz, dass die Convergenz der Reihe an einer bestimmten Stelle nur von dem Verhalten der Function an dieser Stelle abhängt.

Soweit bleibt die Riemann'sche Abhandlung ganz allgemein. Wenn wir nun aber entscheiden wollten, unter welchen Bedingungen eine Function durch eine trigonometrische Reihe darstellbar ist, so müssen wir darauf verzichten, nothwendige Bedingungen zu ermitteln. Wir müssen mit Riemann specielle Fälle aufsuchen, in denen die Bedingungen 1) und 2) erfüllt sind; und dann ist nach Dirichlet'scher Methode eine Untersuchung anzustellen, an welchen Stellen die trigonometrische Reihe nun wirklich convergirt. Riemann zeigt nun, dass die beiden Bedingungen erfüllt sind, wenn die Function 1) nicht unendlich wird, 2) integrirbar ist, 3) nicht unendlich viele Maxima und Minima besitzt. In diesem Falle sind die Coefficienten A_n die Fourier'schen, und die Fourier'sche Reihe convergirt dann, wo sie convergirt, gegen den Werth der Function. Die Reihe wird aber convergiren an allen den Stellen, in deren Umgebung nicht unendlich viele Unstetigkeiten liegen. Sind diese Stellen nun bloss in endlicher Anzahl vorhanden, so werden wir sagen, dann stellt die Reihe die Function dar. Sind sie aber in unendlicher Anzahl vorhanden, so werden wir nach unserer Definition im Allgemeinen nicht mehr von einer Darstellung reden, wenn auch die Fourier'sche Reihe noch an einer unendlichen Anzahl von Stellen convergiren und mit den Functionswerthen übereinstimmen kann.

Der Fall, dass die Function unendlich würde, war bisher ganz ausgeschlossen. Es möge nun jetzt die Function an einer Stelle a unendlich werden, jedoch ohne Maxima und Minima. Wenn in diesem Falle Riemann die Bedingung aufstellt (art. 12), es solle $f(a + \delta) + f(a - \delta)$ bis an die Unstetigkeitsstelle heran integrirt werden können, und zweitens solle $f(a + \delta)\, \delta$ und $f(a - \delta)\, \delta$ mit δ unendlich klein werden, so will er damit keine andere Bedingung, als die früher angeführte geben, dass das Integral unbedingt convergiren soll. In der That aber ist der zweite Theil seiner Bedingung keine hinreichende Bedingung dafür, dass das Integral unbedingt convergirt. Dies kann man sowohl an Beispielen zeigen, als auch kann man wie oben schliessen, dass überhaupt keine Aussicht vorhanden ist, nothwendige und hinreichende Bedingungen für die unbedingte Convergenz eines Integrals zu erreichen, welche von der Definition verschieden sind.

Riemann hat bewiesen, dass die Fourier'schen Coefficienten mit wachsen-

dem Stellenzeiger unendlich klein würden, sobald die Function endlich bleibt, und eine Integration zulässt. Es ist aber wünschenswerth, das Unendlichkleinwerden der Coefficienten in seiner Abhängigkeit von dem Wachsen des Stellenzeigers schätzen zu können. Setzt man bloss die Integrirbarkeit voraus, so ist dies, wie der Riemann'sche Beweis zeigt, nicht möglich. Unter beschränkteren Annahmen kann man aber zum Ziel gelangen. Wir wollen hier Sätzen von Herrn Heine folgen, die derselbe in seinem „Handbuch der Kugelfunctionen" pag. 59 u. f. mittheilt. Die Fourier'schen Coefficienten $\int_0^h f(\beta) \sin n\beta \, d\beta$ und $\int_0^h f(\beta) \cos n\beta \, d\beta$ seien mit A_n und B_n bezeichnet. Wenn die Function $f(\beta)$ endlich bleibt, und für jeden Werth des Argumentes β kleiner als γ ist, und zwischen 0 und h nur eine endliche Anzahl von Maximis und Minimis und Stetigkeitsunterbrechungen hat, so bleiben nA_n und nB_n unter dem Werthe $G\gamma$, wo G eine von n unabhängige Constante bezeichnet. Wenn aber $f(\beta)$ an der Stelle 0 unendlich wird, jedoch so, dass $\beta^\nu \, f(\beta)_{\,0 < \nu \leqq 1}$ noch endlich bleibt, so sinkt $n^{1-\nu} A_n - \frac{\pi}{2\,\Gamma\nu \sin\frac{1}{2}\nu\pi} f(0)$ unter jeden beliebigen Grad der Kleinheit herab und desgleichen $n^{1-\nu} B_n - \frac{\pi}{2\,\Gamma\nu \cos\frac{1}{2}\nu\pi} f(0)$, wenn nur $\nu < 1$ bleibt. Die Producte $n^{1-\nu} A_n$ und $n^{1-\nu} B_n$ werden also, wenn man nur n stark genug wachsen lässt, endlich bleiben.

Man gelangt auch noch zu einer Schätzung, wenn $f(\beta)$ im Uebrigen den angegebenen Bedingungen genügt, aber an der Nullstelle unendlich viele Maxima und Minima hat, jedoch so, dass die Lipschitz'sche Bedingung erfüllt ist [1]. In $A_n = \int_0^h f(\beta) \sin n\beta \, d\beta$ werden die beiden Theilintegrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}} + \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{2\pi}{n}}$$

abgesondert. Der Rest kann kleiner als $\frac{K}{n}$ gemacht werden, wo K eine von n unabhängige Constante ist. Die beiden ersten Theilintegrale geben aber $\int_0^{\frac{\pi}{n}} \left(f(\beta) - f(\beta + \frac{\pi}{n})\right) \sin n\beta \, d\beta$. Nach der Lipschitz'schen Bedingung muss nun dem absoluten Betrage nach $f(\beta) - f\left(\beta + \frac{\pi}{n}\right) < B\left(\frac{\pi}{n}\right)^\alpha$

1) Siehe pag. 247. Anm. 2.

oder auch $< \frac{B}{\left(\log \frac{\pi}{n}\right)^{1+\alpha}}$, $\alpha < 0$ sein, und das Integral wird daher $< B\left(\frac{\pi}{n}\right)^{1+\alpha}$ oder $< \frac{B'}{n(\log n)^{1+\alpha}}$, wo B' eine andere Constante bezeichnet.

Kommen innerhalb des Intervalls mehrere Unendlichkeitsstellen oder Maximum- und Minimumstellen von angegebener Beschaffenheit, aber in endlicher Anzahl vor, so kann man auch dann noch zu einer Schätzung gelangen, wenn man das Intervall in Theile theilt, deren Endpunkte eben jene singulären Punkte sind.

Da der Beweis Riemann's, dass die Convergenz der Fourier'schen Reihe an einer bestimmten Stelle nur von dem Verhalten der Function in unmittelbarer Nähe abhängt, so lange die Function integrirbar ist, nur aus seinen allgemeinen Sätzen abgeleitet ist, so wird es nützlich sein, für diesen Satz einen eigenen Beweis zu geben, der direct von dem Dirichlet'schen Integral ausgeht, auf das der Riemann'sche Weg ja auch wieder zurückführt. Herr Prof. H. A. Schwarz hat in seinen Vorlesungen eine Abschätzungsformel für das Integral

$$\int_g^h \frac{\sin k\beta}{\sin\beta} f(\beta)\, d(\beta)\quad 0 < \gamma \leq h \leq \frac{\pi}{2}$$

gegeben, welche hier unmittelbar zum Ziele führt, und auch später noch gebraucht werden wird.

Um das Integral

$$S = \int_g^h f(\beta) \frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\, d\beta \quad 0 < g < h \leq \frac{\pi}{2}$$

abzuschätzen, werde das Intervall von g bis h in die Theilintervalle

$$g \,..\, \frac{m\pi}{k},\ \frac{m\pi}{k} \,..\, \frac{(m+1)\pi}{k}, \ldots, \frac{m'\pi}{k} \ldots h,$$

$$\text{wo } \frac{(m-1)\pi}{k} \leq g \leq \frac{m\pi}{k};\quad \frac{m'\pi}{k} \leq h \leq \frac{(m'+1)\pi}{k}$$

ist, zerlegt. Dann setze man:

im ersten Intervalle $f(\beta) = f\left(\frac{m\pi}{k}\right) + \psi_1(\beta)$

im zweiten „ $f(\beta) = f\left(\frac{m\pi}{k}\right) + \psi_2(\beta)$

im dritten „ $f(\beta) = f\left(\frac{(m+2)\pi}{k}\right) + \psi_3(\beta)$

im vierten „ $f(\beta) = f\left(\frac{(m+2)\pi}{k}\right) + \psi_4(\beta)$

u. s. f.

und theile S in zwei Theile S' und S'', von denen sich der erste auf die Functionen f, der andere auf die Functionen ψ bezieht. Es ist nun:

$$S' = f\left(\frac{m\pi}{k}\right)\left[\int_g^{\frac{m\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta + \int_{\frac{m\pi}{k}}^{\frac{(m+1)\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta\right]$$

$$+ f\left(\frac{(m+2)\pi}{k}\right)\left[\int_{\frac{(m+1)\pi}{k}}^{\frac{(m+2)\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta + \int_{\frac{(m+2)\pi}{k}}^{\frac{(m+3)\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta\right] + \cdots$$

Es wird dann nach Dirichlet

$$(-1)^{\nu-1}\int_{\frac{(\nu-1)\pi}{k}}^{\frac{\nu\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta = \varrho_\nu$$

gesetzt. Berücksichtigt man, dass

$$\int_{\frac{(m-1)\pi}{k}}^{\frac{m\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin g}\,d\beta = (-1)^{m-1}\frac{2}{\sin g}$$

ist, so wird

$$S' = f\left(\frac{m\pi}{k}\right)\left[\int_g^{\frac{m\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta - \int_{\frac{(m-1)\pi}{k}}^{\frac{m\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin g}\,d\beta\right]$$

$$+ (-1)^{m-1}\left[f\left(\frac{m\pi}{k}\right)\left(\frac{2}{k\sin g} - \varrho_{m+1}\right) + f\left(\frac{(m+2)\pi}{k}\right)\left(\varrho_{m+2} - \varrho_{m+3}\right) + \cdots\right]$$

Nun ist

$$\int_g^{\frac{m\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta - \int_{\frac{(m-1)\pi}{k}}^{\frac{m\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin g}\,d\beta < \frac{2}{k\sin g}.$$

Der zweite Theil von S' ist, wenn man den grössten Werth unter den auftretenden Werthen von f mit c bezeichnet, und berücksichtigt, dass $\varrho_n < \varrho_{n+1}$ ist,

$$< c\left[\frac{2}{k\sin g} - (\varrho_{m+1} - \varrho_{m+2}) - (\varrho_{m+3} - \varrho_{m+4}) - \cdots\right].$$

Daher ist

$$S' < \frac{4c}{k \sin g}, \text{ und da } \frac{1}{\sin g} < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{g}$$

ist, weil

$$g < \frac{\pi}{2} \text{ ist, so folgt } S' < \frac{2c\pi}{kg}.$$

Dazu kommt nun noch der zweite Theil von S: S''. Bezeichnet man mit $\sigma_q(\beta)$ den absoluten Betrag der grössten Schwankung von $f(\beta)$ im $q$ten Intervalle, so ist derselbe sicher nicht kleiner, als der absolute Betrag des grössten Werthes der entsprechenden Function $\psi_q(\beta)$.

Es ist also sicher

$$S'' < \int_g^h \frac{\sigma(\beta)}{\sin\beta} d\beta < \frac{\pi}{2} \int_g^h \frac{\sigma(\beta)}{\beta} d\beta,$$

wo $\sigma(\beta)$ im $q$ten Intervalle gleich $\sigma_q(\beta)$ ist. Man hat daher endlich für S die Abschätzungsformel:

$$S = \int_g^h f(\beta) \frac{\sin k\beta}{\sin\beta} d\beta < \frac{2c\pi}{kg} + \frac{\pi}{2} \int_g^h \frac{\sigma(\beta)}{\beta} d\beta.$$

Das Integral $\int_g^h \frac{\sigma(\beta)}{\beta} d\beta$ kann nun beliebig klein gemacht werden durch Vergrösserung von k, wenn nur die Function $f(\beta)$ integrirbar ist und endlich bleibt.

Denn es ist

$$\int_g^h \frac{\sigma(\beta)}{\beta} d\beta < \frac{1}{g} \int_g^h \sigma(\beta)\, d\beta.$$

$\int_g^h \sigma(\beta)\, d\beta$ ist aber sicher kleiner, als $\Sigma\sigma_q(\beta)\, \Delta_q\beta$, wo $\Delta_q\beta$ die Grösse des $q$ten Intervalles bezeichnet, und sich die Summe über alle Intervalle erstreckt. Diese Summe muss aber nach dem Begriffe des bestimmten Integrals durch Verkleinerung der Intervalle beliebig klein gemacht werden können.

Um nun den erwähnten Riemann'schen Satz zu erweisen, zerlege man das Dirichlet'sche Integral $\int_0^h f(\beta) \frac{\sin k\beta}{\sin\beta} d\beta$ in die beiden Theile $\int_0^g + \int_g^h$, wo g sehr klein angenommen werden soll. $f(\beta)$ möge zunächst nicht unendlich

viele Maxima und Minima haben. Wendet man auf das Integral $\int\limits_g^h$ die Abschätzungsformel an, so kann man k so gross wählen, dass sowohl $\frac{2\,c\pi}{kg}$, als auch $\frac{\pi}{2}\int\limits_g^h \frac{\sigma(\beta)}{\beta}\,d\beta$ sehr klein wird.

Durch dieses Verfahren kann man der betrachteten Stelle beliebig nahe kommen, während immer alle Theile jenseits g einen Beitrag zu dem Integralwerthe geben, der durch Vergrösserung von k unter jeden Grad der Kleinheit herabsinkt. Damit ist bewiesen, dass die Convergenz der Fourierschen Reihe an einer bestimmten Stelle nur abhängt von dem Verhalten der Function in unmittelbarer Nähe dieser Stelle. Nach einfachen Mittelwerthsätzen lässt sich dann zeigen, dass der Werth der Reihe an allen Stetigkeitsstellen und einfachen Unstetigkeitsstellen mit dem der Function übereinstimmt. Es lässt sich aber auch zeigen, dass dies selbst dann noch stattfindet, wenn die Function an der betrachteten Nullstelle unendlich viele Maxima und Minima besitzt, wenn nur die Lipschitz'sche Bedingung erfüllt ist.

Es ist zu dem Zwecke das Integral $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\beta)\,\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta$ zu berechnen. Man setze $f(\beta) = f(0) + \varphi(\beta)$, und theile das Integral in die Theilintegrale:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(0)\,\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta + \int\limits_0^{g} \varphi(\beta)\,\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta + \int\limits_g^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\beta)\,\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta.$$

Der erste Theil ist gleich $\frac{\pi}{2}f(0)$. Da $f(\beta)$ der Lipschitz'schen Bedingung genügt, so muss $\varphi(\beta) = f(\beta) - f(0) < B\beta^\alpha$ $(\alpha > 0)$ sein. Der zweite Theil J ist daher $< B\int\limits_0^g \beta^\alpha\,\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta$, und da $\frac{2}{\pi} < \frac{\sin\beta}{\beta} \leq 1$ ist, so ist $J < B\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\int\limits_0^g \beta^{\alpha-1}\,d\beta < B\,\frac{\pi}{2}\cdot\frac{g^\alpha}{\alpha}$. Der dritte Theil ist nach der obigen Abschätzungsformel

$$< \frac{2\,c\pi}{gk} + \int\limits_g^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma(\beta)}{\beta}\,d\beta.$$

Daher wird

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\beta) \frac{\sin k\beta}{\sin \beta} d\beta = \frac{\pi}{2} f(0) + K,$$

$$\text{wo } K < B \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{g^\alpha}{\alpha} + \frac{2\,c\pi}{gk} + \int_g^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma(\beta)}{\beta} d\beta \text{ ist.}$$

Nun kann zunächst g beliebig klein angenommen werden, und dann k so gross gewählt werden, dass die Gesammtgrösse von K beliebig klein wird, und wir an der Grenze erhalten:

$$\lim_{k=\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\beta) \frac{\sin k\beta}{\sin \beta} d\beta = \frac{\pi}{2} f(0),$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Riemann untersucht noch in Art. 11, ob eine trigonometrische Reihe, deren Glieder A_k nicht für jeden Werth von x unendlich klein werden, zur Darstellung einer Function geeignet ist. Es zeigt sich aber, dass bei Functionen ohne Maxima und Minima die Reihe dann im Allgemeinen nur in einer endlichen Anzahl von Stellen mit der Function übereinstimmen kann (a. a. O. pag. 242 und 245), und zur Darstellung einer Function daher sicher ungeeignet ist.

Was nun die Functionen betrifft, die unendlich viele Maxima und Minima besitzen, so giebt Riemann keine allgemeinen Gesetze an, sondern illustrirt nur an Beispielen[1]) folgende beiden Sätze: 1) Es giebt Functionen, die unendlich viele Maxima und Minima besitzen, und durchgehends einer Integration fähig sind, ohne durch die Fourier'sche Reihe darstellbar zu sein. 2) Es giebt Functionen mit unendlich vielen Maximis und Minimis, welche keine Integration zulassen und doch durch die Fourier'sche Reihe darstellbar sind.

IV.

Die Riemann'sche Abhandlung bildet den wesentlichen Abschluss der Untersuchungen über die blosse Darstellbarkeit einer trigonometrischen Reihe. Die mannichfachen Hilfsmittel, welche Riemann zur Behandlung der trigonometrischen Reihen gegeben hat, haben erst ermöglicht, andere

1) Diese Beispiele sind von Herrn Genocchi einer näheren Prüfung unterworfen worden: Atti della Reale Acc. delle Scienze di Torino. Vol. X. 1875. Intorno ad alcune serie.

Untersuchungen über diese Reihen mit Erfolg durchzuführen, zu denen wir uns nunmehr wenden wollen.

Cauchy hatte in einer Note den Satz ausgesprochen, dass das Integral einer unendlichen Reihe von Gliedern gleich der Summe der Integrale der einzelnen Glieder sei. Dieser Satz war unbestritten angenommen worden, und alle Untersuchungen über Fourier'sche Reihen, die wir bisher angeführt haben, beruhen auf ihm. Da zeigte Herr Weierstrass, dass der Versuch den Satz zu beweisen, nur dann gelänge, wenn die Reihe innerhalb des Integrationsintervalles in gleichem Grade convergirte, und verstand darunter, dass für jeden Werth der Variablen der Rest der Reihe von demselben Gliede ab kleiner, als dieselbe vorgegebene Grösse würde. Diese Bemerkung findet zuerst in der Heine'schen Abhandlung[1]) „Ueber trigonometrische Reihen" Anwendung. Herr Heine citirt daselbst eine Abhandlung von Herrn Thomé, in der bereits der Weierstrass'sche Begriff der Convergenz in gleichem Grade als ganz bekannt erwähnt wurde[2]). Der Begriff der Convergenz in gleichem Grade war eigentlich schon in einer Abhandlung[3]) von Herrn Seidel aus dem Jahre 1848 enthalten, doch scheint dieselbe lange übersehen worden zu sein. Cauchy[4]) hatte behauptet, eine convergente Reihe, deren einzelne Glieder stetige Functionen des Argumentes sind, stelle allemal selbst eine stetige Function dar. Bereits Abel[5]) bemerkte, ihm scheine, dass dieser Satz zuweilen Ausnahmen erleide, und hatte zum Beleg seiner Ansicht die Reihe

$$\sin \varphi - \tfrac{1}{2} \sin 2 \varphi + \tfrac{1}{3} \sin 3 \varphi - \tfrac{1}{4} \sin 4 \varphi + \ldots\ldots$$

angeführt, die trotz der Stetigkeit aller ihrer Glieder zwar für alle Werthe von φ zwischen $m\pi$ und $(m+1)\pi$ gleich $\frac{\varphi}{2} - \nu\pi$ ist, wo $m = 2\nu$ oder $= 2\nu - 1$ ist und ν irgend eine positive ganze Zahl ist, aber für $\varphi = m\pi$ selber $(m > 0)$ unstetig wird, nämlich den Werth 0 annimmt.

Um eine Aufklärung über diesen Punkt herbeizuführen, beweist nun Herr Seidel folgenden Satz: „Ist eine convergente Reihe, deren einzelne Glieder stetige Functionen des Argumentes sind, eine nicht stetige Function, so giebt es in der ummittelbaren Nähe einer Unstetigkeitsstelle Stellen, an denen die Reihe beliebig langsam convergirt." Er unterscheidet zwei Fälle: erstens wenn die Function das Verhalten zeigt, was wir heute mit

1) Borchardt's Journ. für Math. Bd. 71. 1870.

2) Borchardt's Journ. für Math. Bd. 66. 1866. pag. 334.

3) Abh. der Bayerischen Akad. 1847—49. Note über eine Eigenschaft von Reihen, welche discontinuirliche Functionen darstellen.

4) Analyse algébrique pag. 131.

5) Crelle's Journ. Bd. 1. pag. 316. Anm. u. pag. 336.

Convergenz in gleichem Grade bezeichnen, so ist der Cauchy'sche Satz richtig; zweitens wenn sich die Reihe nicht so verhält, dann gilt sein Satz. Dass eine unstetige Function niemals durch eine in gleichem Grade convergente Reihe dargestellt werden könne, beweist auch Herr Heine, führt aber alsbald den Begriff einer im Allgemeinen in gleichem Grade convergenten Reihe ein, wobei „im Allgemeinen" so zu verstehen ist, dass in der unmittelbaren Umgebung aller Unstetigkeitsstellen auf die Convergenz in gleichem Grade verzichtet werden soll. Herr du Bois-Reymond[1]) zeigt, dass das Aufhören der Convergenz in gleichem Grade nicht bloss an Unstetigkeitsstellen stattfindet, was schon vorher Herr Seidel (a. a. O. pag. 393) vermuthet hatte. Es bedarf also eines Beweises, dass eine trigonometrische Reihe, die eine stetige Function darstellt, in gleichem Grade convergirt. Durch die Weierstrass'sche Bemerkung war klar geworden, dass man bei der Coefficientenbestimmung der Fourier'schen Reihe nicht ohne Weiteres die Multiplicationsmethode Fourier's anwenden dürfe, weil diese auf der Voraussetzung beruht, dass das Integral einer Summe unendlich vieler Glieder, die eine convergente Reihe bilden, gleich der Summe der Integrale der einzelnen Glieder sei. Durch diese Schlussfolgerung wurde aber bewiesen, dass, wie man auch eine Function in eine trigonometrische Reihe entwickeln möge, man immer dieselbe Entwicklung erhielte. Auf diesem Satze von der Eindeutigkeit der Entwicklung basirten nicht nur alle physikalischen Anwendungen, sondern auch manche wichtige mathematische Folgerung, wie z. B. Jacobi's Darstellung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung durch bestimmte Integrale. Dieser Satz war also hiermit in Frage gestellt. Die Wiederherstellung desselben ist von Herrn Heine (a. a. O.) begonnen, und von den Herren G. Cantor und P. du Bois-Reymond fortgeführt worden.

Herr Heine spricht sich dahin aus, es sei durch die Arbeiten von Dirichlet, Riemann und Lipschitz nur festgestellt, dass eine Function von x sich unter gewissen Bedingungen in eine trigonometrische Reihe entwickeln lasse, aber nicht auf wie viele Arten dies geschehen könne.

Man könnte nun vielleicht verlangen zu beweisen, dass eine trigonometrische Reihe, welche eine stetige Function darstellt, auch in gleichem Grade convergirt. Doch da überhaupt noch nicht bewiesen ist, dass es eine trigonometrische Reihe giebt, welche die genannten Eigenschaften hat, so begnügt sich Herr Heine zunächst damit, zu beweisen (a. a. O. § 7—9), dass die Fourier'sche Reihe für eine endliche, nur an einzelnen Punkten unstetige Function, die nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, in

---

1) Siehe Abh. der Bayer. Akad. Bd. XII, I. pag. 119. Anm.

gleichem Grade convergirt. Dazu hat aber Herr Schläfli (a. a. O. pag. 7) die Bemerkung gemacht, dass der Heine'sche Beweis nicht mehr stichhaltig sei, wenn eine Maximum-Minimum-Stelle in der von vornherein der Ausdehnung nach definirten unmittelbaren Umgebung des Punktes liegt, an dem die Function dargestellt werden soll. Diese Bemerkung trifft zu; indessen lässt sich zeigen, dass auch dann noch der Satz gilt. Herr Prof. H. A. Schwarz hat bei Gelegenheit einer Universitätsvorlesung diesen Beweis ausgeführt; für den Fall, dass $f(\beta)$ stets positiv bleibt, sollen die Hauptmomente des Beweises hier kurz dargelegt werden, da andernfalls nur einfache Modificationen eintreten.

Es sei

$$S = \int_0^h f(\beta) \frac{\sin k\beta}{\sin \beta} d\beta \,.\; 0 < h \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Wenn $f(\beta)$ zwischen den Grenzen 0 und h beständig positiv bleibt, und nie zunimmt, so ist, wenn m irgend eine positive ganze Zahl ist, so dass $2m + 1 < \frac{k}{2}$ und $\frac{2m\pi}{k} < h$ ist, und $f(\beta) \leqq c$ ist,

$$\left| S - \frac{\pi}{2} f(0) \right| < \frac{c}{2m} + \frac{\pi}{2} \left(f(0) - f\left(\frac{2m\pi}{k}\right) \right),$$

wo durch die senkrechten Striche angedeutet werden soll, dass der absolute Betrag der eingeschlossenen Grösse zu nehmen ist.

Wenn $f(\beta)$ beständig negativ bleibt und nie abnimmt, so gilt die Formel

$$\left| S - \frac{\pi}{2} f(0) \right| < \frac{c}{2m} + \frac{\pi}{2} \left| \left(f(0) - f\left(\frac{2m\pi}{k}\right) \right) \right|.$$

Wir werden nun bei stetigem Verlaufe von $f(\beta)$ sagen: Die $f(\beta)$ im Intervalle von 0 bis h darstellende trigonometrische Reihe convergirt in gleichem Grade, wenn eine Zahl m derart gefunden werden kann, dass für alle Werthe von β innerhalb des Intervalles die Differenz $\left|S - \frac{\pi}{2} f(0)\right|$ kleiner als eine vorgegebene beliebig kleine Grösse ε bleibt.

Soll nun die Differenz $f(\beta + \delta(\beta)) - f(\beta)$ kleiner als eine vorgegebene beliebig kleine Grösse ε_1 sein, so giebt es bei einer stetigen Function $f(\beta)$ einen von β unabhängigen Minimalwerth δ' von $\delta(\beta)$, so dass für jedes β zwischen 0 und h die Differenz $f(\beta + \delta'') - f(\beta) < \varepsilon$ ist, sobald dem absoluten Betrage nach $\delta'' \leqq \delta'$ ist. $\frac{2m\pi}{k}$ ist nun so bestimmbar, dass es $< \delta'$ wird. Zwischen 0 und h möge $f(\beta)$ μ Maximum- und Minimumstellen $\beta_1\, \beta_2 \,.\,.\, \beta\mu$ besitzen. Alsdann wenden wir auf die Function $f(\beta)$ folgende Zerlegung an. $f(\beta)$ ist überall zwischen 0 und h gleich der Summe:

$$f_1(\beta) + f_2(\beta) + \ldots + f_{\mu+1}(\beta) + f(h-0),$$

wenn die $(\mu + 1)$ Functionen $f_1(\beta) \ldots f_{\mu+1}(\beta)$ folgendermassen bestimmt sind: $f_1(\beta)$ sei im ersten Intervall gleich $f(\beta) - f(\beta_1)$, in allen folgenden gleich Null.

$f_\lambda(\beta)$ $(\lambda = 2, 3 \ldots \mu + 1)$ sei im Intervalle $0 \ldots \beta_{\lambda-1}$ gleich $f(\beta_{\lambda-1}) - f(\beta_\lambda)$
. . . . $\beta_{\lambda-1} \ldots \beta_\lambda$ gleich $f(\beta) - f(\beta_\lambda)$
. . . . $\beta_\lambda \ldots h$ gleich Null. $(\beta_{\mu+1} = h - 0.)$

Auf jede der Functionen $f_1(\beta) \ldots f_{\mu+1}(\beta)$ ist nun die eine oder die andere der obigen beiden Formeln anwendbar.

Ist $\delta' < \beta$, so ist jedenfalls

$$\left| \int_0^{\beta_1} f_1(\beta) \frac{\sin k\beta}{\sin \beta} \, d\beta - \frac{\pi}{2} \Big(f(0) - f(\beta_1) \Big) \right| < \frac{c}{2m} + \frac{\pi}{2} \left| \left(f(0) - f(\beta_1) - f\left(\frac{2\,m\pi}{k}\right) \right) \right|.$$

Für jede folgende Function f_λ ist $f\left(\frac{2\,m\pi}{k}\right)$ constant und zwar gleich $f(\beta_{\lambda-1}) - f(\beta_\lambda)$. Alsdann ist für $\lambda = 2, 3 \ldots (\mu + 1)$:

$$\left| \int_0^{\beta_\lambda} f_\lambda(\beta) \frac{\sin k\beta}{\sin \beta} \, d\beta - \frac{\pi}{2} \Big(f(\beta_{\lambda-1}) - f(\beta_\lambda) \Big) \right| < \frac{c}{2m}.$$

Ist aber $\delta' > \beta_1$, also liegt die erste Maximum- oder Minimumstelle zwischen 0 und δ' und ist $\delta' < \beta_2$, so wird

$$\left| \int_0^{\beta_1} f_1(\beta) \frac{\sin k\beta}{\sin \beta} \, d\beta - \frac{\pi}{2} \Big(f(0) - f(\beta_1) \Big) \right| < \frac{c}{2m} + \frac{\pi}{2} \left| \Big(f(0) - f(\beta_1) \Big) \right|$$

$$\left| \int_0^{\beta_2} f_2(\beta) \frac{\sin k\beta}{\sin \beta} \, d\beta - \frac{\pi}{2} \Big(f(\beta_1) - f(\beta_2) \Big) \right| < \frac{c}{2m} + \frac{\pi}{2} \left| \left(f(\beta_1) - f(\beta_2) - f\left(\frac{2\,m\pi}{k}\right) \right) \right|$$

während alle folgenden Integrale ungeändert bleiben. Die Summe der Integrale ergiebt im ersten Falle:

$$\left| S - \frac{\pi}{2} f(0) \right| < (\mu + 1) \frac{c}{2m} + \frac{\pi}{2} \left| \left(f(0) - f(\beta_1) - f\left(\frac{2\,m\pi}{k}\right) \right) \right|,$$

im zweiten:

$$\left| S - \frac{\pi}{2} f(0) \right| < (\mu + 1) \frac{c}{2m} + \frac{\pi}{2} \left| \left(f(0) - f(\beta_2) - f\left(\frac{2\,m\pi}{k}\right) \right) \right|.$$

Es muss nun sowohl

$$\left| \left(f(0) - f(\beta_1) - f\left(\frac{2\,m\pi}{k}\right) \right) \right| \text{ als } \left| \left(f(0) - f(\beta_2) - f\left(\frac{2\,m\pi}{k}\right) \right) \right|$$

kleiner als ε_1 sein.

Also muss

$$\left| S - \frac{\pi}{2} f(0) \right| < (\mu + 1) \frac{c}{2\,m} + \frac{\pi}{2} \cdot \varepsilon_1 \text{ sein.}$$

Nun war ε_1 ganz willkürlich angenommen. Wählen wir ε_1 so, dass $\varepsilon - \frac{\pi}{2}\,\varepsilon_1 > 0$ ist, so sieht man, das m immer von der Grösse gewählt werden kann, dass $S - \frac{\pi}{2} f(0)$ unter ε sinkt.

Ueberträgt man die nämlichen Erörterungen auf die Summe der Integrale

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\frac{1}{2}(\pi + x)} \varphi(x - 2\beta) \frac{\sin k\beta}{\sin \beta}\, d\beta + \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\frac{1}{2}(\pi + x)} \varphi(x + 2\beta) \frac{\sin k\beta}{\sin \beta}\, d\beta,$$

so zeigt man leicht, dass die nämliche Schätzung für jeden Werth von x gilt, womit unsere Behauptung erwiesen ist.

Ist nicht $\delta' < \beta_2$, sondern ist etwa $\beta_\lambda < \delta' < \beta_{\lambda+1}$ $(\lambda > 1)$, so ist das obige Verfahren auch dann noch leicht anwendbar, und es lässt sich immer zeigen, dass die Reihe in gleichem Grade convergirt.

Die vorhergehende Erörterung trifft auch den Abschnitt über trigonometrische Reihen in Heine „Handbuch der Kugelfunctionen" pag. 61—62.

Es ist also zunächst nachgewiesen, dass es überhaupt eine Reihenentwicklung giebt, die in gleichem Grade convergirt. Aber es könnte auch mehrere solcher Entwicklungen geben, von denen nicht jede in gleichem Grade convergirt. Herr Heine beweist nun, dass, wenn es überhaupt eine in gleichem Grade convergente Reihe giebt, dieses die einzige in gleichem Grade convergente Reihe ist. Ob es ausserdem noch andere giebt, die nicht in gleichem Grade convergiren, bleibt hiernach fraglich. Es wird die Identität zweier im Allgemeinen in gleichem Grade convergenten Reihenentwicklungen derselben Function dadurch nachgewiesen, dass ihre Differenz gebildet und dann folgender Satz bewiesen wird: Eine trigonometrische Reihe, die im Allgemeinen convergirt und Null darstellt, existirt nicht, d. h. die Coefficienten müssen sämmtlich identisch Null sein.

Riemann hat als nothwendig für die Convergenz einer trigonometrischen Reihe in endlichen Strecken erkannt, dass $A_k = a_k \sin kx + b_k \cos kx$ mit wachsendem k unendlich klein werde. Herr Heine beweist nun, dass bei einer im Allgemeinen in gleichem Grade convergenten trigonometrischen Reihe die einzelnen Coefficienten a_k und b_k zuletzt unendlich klein werden; und darauf gestützt, dass die Coefficienten der aus der Differenz der beiden Reihen gebildeten neuen Reihe überhaupt verschwinden müssen, womit die Identität beider Reihen gezeigt ist.

Das Resultat der Heine'schen Abhandlung ist also schliesslich folgen-

des: eine endliche, nur an einzelnen Punkten unstetige Function, die nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, kann nur auf eine Weise in eine in gleichem Grade convergente trigonometrische Reihe entwickelt werden; und diese Reihe ist die Fourier'sche.

Es bleibt nun noch in Frage, ob es nicht noch andere Reihenentwicklungen geben könnte, die nicht in gleichem Grade convergirten, und zwar ob noch mehrere. Mit dieser Frage hat sich Herr G. Cantor beschäftigt. Derselbe schlägt den nämlichen Weg ein, wie Herr Heine, indem er zunächst beweist, dass in jeder im Allgemeinen convergenten trigonometrischen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \sin nx + b_n \cos nx)$ die Coefficienten a_n und b_n zuletzt unendlich klein werden [1]), ohne jedoch eine Voraussetzung über die Art der Convergenz zu machen. Alsdann beweist er, dass eine im Allgemeinen convergente trigonometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (c_n \sin nx + d_n \cos nx)$, welche überall mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von Stellen Null darstellt, nicht existirt, also die Coefficienten c_n und d_n sämmtlich verschwinden müssen [2]). Der vorbereitende Satz ist aber nach einer Bemerkung von Herrn Kronecker gar nicht nothwendig [3]). Es sei die Differenz zweier im Allgemeinen convergenten trigonometrischen Reihenentwicklungen derselben Function:

$$D(x) = C_0 + C_1 + \ldots + C_n + \ldots = 0,$$

$$\text{wo } C_0 = \frac{d_0}{2},\ C_n = c_n \sin nx + d_n \cos nx \text{ ist.}$$

Man bilde nun

$$D(x + \delta) - D(x - \delta) =$$
$$e_0 + e_1 \cos x + e_2 \cos 2x + \ldots = 0,$$

so müssen nun die Coefficienten $e_n = c_n \sin \delta n + d_n \cos \delta n$ von vornherein unendlich klein werden, wenn die letzte Reihe im Allgemeinen convergiren soll, wie es nach Voraussetzung der Fall ist. Nun ist auf diese Function das von den Herren Heine und G. Cantor benutzte Verfahren anzuwenden.

---

1) Borchardt's Journ. für Math. Bd. 72. 1870. „Ueber einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz“, und Math. Annalen. Bd. 4. 1871. Ueber trigonometrische Reihen.

2) Borchardt's Journ. für Math. Bd. 72. 1870. Beweis, dass eine für jeden reellen Werth etc. . . . .

3) Borchardt's Journ. für Math. Bd. 73. 1871. Notiz zur vorerwähnten Abhandlung.

Man bildet die Riemann'sche Function:

$$F(x) = e_0 \frac{x^2}{2} - e_1 - \frac{e_2}{4} - \frac{e_3}{9} - \ldots$$

so muss

$$\frac{F(x+\alpha) - 2\,F(x) + F(x-\alpha)}{\alpha^2}$$

ausser an einer endlichen Anzahl von Punkten gegen Null convergiren. Dann muss aber nach einem von Herrn H. A. Schwarz gegebenen Beweise $F(x)$ eine lineare Function sein (pag. 265, Anm. 2), und zwar, wie Herr Heine gezeigt hat, in jedem der durch Unstetigkeitspunkte getrennten Intervalle dieselbe lineare Function $ex + e'$. Also muss

$$e_0 \frac{x^2}{2} - ex - e' = e_1 + \frac{e_2}{4} + \frac{e_3}{9} + \ldots \text{ sein.}$$

Indem man nun mit $\cos n(x-t)$ multiplicirt, und von $-\pi$ bis $+\pi$ integrirt, ermittelt man, dass für jedes n und jedes t $c_n \sin nt + d_n \cos nt$ und somit auch c_n und d_n selbst verschwinden müssen. Damit ist bewiesen, dass eine im Allgemeinen stetige Function, die nur eine endliche Anzahl von Stetigkeitsunterbrechungen erleidet und nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, nur auf eine Weise in eine im Allgemeinen convergente trigonometrische Reihe entwickelt werden kann.

Es ist aber Herrn G. Cantor durch die erfolgreiche Anwendung eines Weierstrass'schen Satzes gelungen, den Satz von der Einheit der Entwicklung auch auf Functionen auszudehnen[1]), die unendlich viel Unstetigkeiten haben, wenn diese nur in gewisser Weise vertheilt sind. Wenn eine unendliche Anzahl bestimmter Stellen gegeben ist, so giebt es nach einem Satze, den Herr Weierstrass in seinen Vorlesungen beweist, in dem Gebiete dieser Stellen mindestens eine Stelle, in deren Umgebung unendlich viele definirte Stellen liegen. Es kann aber auch mehrere, und auch unendlich viele solcher Stellen geben, und wir wollen ihre Gesammtheit mit Herrn G. Cantor die erste abgeleitete Punktmenge nennen. Enthält diese wieder unendlich viele Punkte, so kann man eine zweite Punktmenge ableiten u. s. f. Kommt man auf diese Weise zu einer Punktmenge, die nur aus einer endlichen Anzahl von Punkten besteht, so lässt sich der Beweis für die Eindeutigkeit der Entwicklung auf diesen Fall ausdehnen. Es kommt darauf an zu zeigen, dass in jedem der durch die Unstetigkeitspunkte getrennten Strecken $F(x)$ dieselbe lineare Function von x ist.

Nun lässt sich zeigen, dass in jedem der Intervalle, deren Endpunkte

---

1) Math. Annalen Bd. 5. 1872. Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen.

durch die Punkte der ersten abgeleiteten Punktmenge bezeichnet sind, nur eine endliche Anzahl von Unstetigkeitspunkten liegen kann, so dass nun wieder der Heine'sche Beweis für jedes dieser Intervalle eintritt. Durch Iterationen dieses Verfahrens, deren Anzahl eine endliche sein muss, weil die letzte abgeleitete Punktmenge nur eine endliche Anzahl von Punkten besitzen soll, zeigt man, dass $F(x)$ überall dieselbe lineare Function ist.

Wir haben daher den Satz: „Eine endliche Function, die in der Weise unendlich viele Unstetigkeiten besitzt, dass es eine abgeleitete Punktmenge von einer endlichen Anzahl von Punkten giebt, und überhaupt in eine trigonometrische Reihe entwickelbar ist, kann nur auf eine Weise in eine solche entwickelt werden.“ Eine derartige Function ist, wenn sie nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, integrirbar; also convergirt die Fourier'sche Reihe für sie, wo sie convergirt, gegen den Werth der Function, und ist die einzig mögliche Reihenentwicklung.

In dem ganzen Gebiete dieser Functionen müssen daher die Coefficienten der Reihenentwicklung die Fourier'sche Gestalt haben, und ein Beweis, dass dies wirklich so sei, führt nur auf einem andern Wege zu demselben Ziele, wie der Heine-Cantor'sche Beweis von der Eindeutigkeit der Entwicklung. Ebenso wie umgekehrt ein Beweis, dass die Reihenentwicklung der Functionen aus diesem Gebiete nur die Fourier'schen Coefficienten haben kann, den Satz von der Einheit der Entwicklung in diesem Gebiete ersetzt. Derartige Beweise sind denn auch in der That von den Herren Dini [1]) und Ascoli [2]) gegeben worden, sie gelten aber nur für ein beschränkteres Functionengebiet, als dasjenige ist, für welches der Heine-Cantor'sche Beweis gilt, geben also keine Erweiterung der Theorie.

Wohl aber haben wir eine Erweiterung der Theorie darin zu erkennen, wenn Herr P. du Bois-Reymond [3]) nachweist, „dass, wie man auch eine Function $f(x)$ in eine Reihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \sin nx + b_n \cos nx)$, deren Coefficienten a_n und b_n zuletzt unendlich klein werden, entwickeln möge, die Coefficienten doch immer die Gestalt haben:

$$b_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) d\alpha;$$

---

1) Siehe pag. 247. Anm. 2. daselbst Art. 4.

2) Siehe pag. 252. Anm. daselbst Art. III. und Math. Annalen Bd. 6. 1873. pag. 231—240.

3) Abhandlungen der Bayerischen Akademie. Bd. XII, I. 1875. pag. 117—167. „Beweis, dass die Coefficienten etc.“

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \sin n\alpha d\alpha; \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \cos n\alpha d\alpha,$$

jedesmal, wenn diese Integrale einen Sinn haben". Der Zusatz „deren Coefficienten a_n und b_n unendlich klein werden" fehlt zwar in dem du Bois-Reymond'schen Satze, muss aber doch gemacht werden, da er in dem Beweise (a. a. O. pag. 141) nothwendig gebraucht wird. Der obige Satz schliesst den Satz von der Einheit der Entwicklung nothwendig in sich, und indem er die Folgerung enthält, dass es für alle Functionen, deren Entwickelbarkeit in eine trigonometrische Reihe nachgewiesen ist, nur eine einzige solche giebt, und dieses die Fourier'sche ist, giebt er allen bisherigen Untersuchungen die gewünschte Vervollständigung.

Es sollen nun die Grundzüge der du Bois-Reymond'schen Beweisführung angegeben werden. Bis auf Weiteres soll die zu behandelnde Function endlich bleiben. Zunächst wird der Beweis für die stetigen Functionen, welche nicht unendlich viele Maxima und Minima haben gegeben, wie ihn im Allgemeinen auch schon die Herren Dini und Ascoli angegeben haben.

Man bilde die Riemann'sche Function

$$\text{I)} \quad F(x) = b_0 \frac{x^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin nx + b_n \cos nx}{n^2}.$$

Es ist nothwendig für jeden Werth von x zwischen $-\pi$ und $+\pi$

$$\frac{d^2}{dx^2}\int_{-\pi}^{x} d\alpha \int_{-\pi}^{\alpha} d\beta f(\beta) = f(x).$$

Bildet man nun

$$\Phi(x) = F(x) - \int_{-\pi}^{x} d\alpha \int_{-\pi}^{\alpha} d\beta f(\beta),$$

so folgt

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Phi(x+\varepsilon) - 2\Phi(x) + \Phi(x-\varepsilon)}{\varepsilon^2} = \frac{\Delta^2 \Phi(x)}{\varepsilon^2} = 0$$

und daraus $\Phi(x) = c_0 + c_1 x$.

Also

$$\text{II)} \quad F(x) = \int_{-\pi}^{x} d\alpha \int_{-\pi}^{\alpha} d\beta f(\beta) + c_0 + c_1 x.$$

Wenn man I) mit $\sin n\alpha$, $\cos n\alpha$, 1 multiplicirt und integrirt, so folgt:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} F(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha = \qquad\qquad - \frac{a_n}{n^2} \cdot \pi .$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} F(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha = (-1)^n \frac{2\pi . b_0}{n^2} - \frac{b_n}{n^2} \cdot \pi .$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} F(\alpha) \, d\alpha \qquad = - \frac{\pi^3}{3} \cdot b_0 .$$

Man setze nun für $F(x)$ den Ausdruck II) ein, und ermittele den Werth der Integrale durch partielle Integration. Indem man n unendlich werden lässt, findet man unter Zuhilfenahme des hier geltenden Satzes, dass $\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \sin n\alpha \, dx$ und $\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha$ und a_n und b_n zuletzt verschwinden, dass zunächst

$$c_0 = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \left(\frac{\pi^2}{3} - (\pi - \alpha)^2 \right) d\alpha;$$

$$c_1 = - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \, (\pi - \alpha) \, d\alpha; \quad b_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \, d\alpha$$

ist, und alsdann, dass

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \sin n\alpha d\alpha; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \cos n\alpha d\alpha$$

für jedes n ist. Was für stetige Functionen somit nachgewiesen ist, kann man nun nach der Heine-Cantor'schen Methode auf alle Functionen ausdehnen, die nur eine endliche Anzahl von Maximis und Minimis besitzen, und in der Weise unendlich viele Unstetigkeiten, dass eine abgeleitete Punktmenge von einer endlichen Anzahl von Punkten existirt.

Wenn aber die Function nur der Bedingung, integrirbar zu sein, unterworfen ist, so kann nicht mehr behauptet werden, dass dann $\lim_{\varepsilon = 0} \frac{\Delta^2 \, \Phi(x)}{\varepsilon^2}$ überall gleich Null ist.

Denn die Function hat hier nicht nothwendig in jedem Punkte einen bestimmten Werth; ihr Werth kann zwischen einer unteren und oberen Grenze hin und her schwanken. Bezeichnen wir die Summe der oberen und der unteren Grenze einer Function $f(x)$ an einer Stelle x mit $S(x)$, und ihre Differenz mit $D(x)$, so kann man offenbar dem Werthe der Function

die Gestalt $f(x) = S(x) + jD(x)$ geben, wo j eine zwischen -1 und $+1$ liegende reelle Zahl ist, und $S(x)$ und $D(x)$ nun bestimmte Werthe sind. Wenn man nun ganz nach der von Riemann (art. 8) angewandten Methode $\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2 F(x)}{\varepsilon^2}$ bildet, so findet man, dass dieser die Gestalt hat

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2 F(x)}{\varepsilon^2} = S(x) + j\left(\tfrac{3}{2} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}\right) D(x).$$

Desgleichen hat man $\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2 F_1(x)}{\varepsilon^2}$ zu bilden für

$$F_1(x) = \int_{-\pi}^{x} dx \int_{-\pi}^{\alpha} f(\beta) d\beta$$

und erhält

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2 F_1(x)}{\varepsilon^2} = S(x) + j_1 . D(x),$$

wo j_1 ebenfalls zwischen -1 und $+1$ liegt. Da nun $\Phi(x) = F(x) - F_1(x)$ ist, so ist der grösste Werth, den $\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2 \Phi(x)}{\varepsilon^2}$ annehmen kann:

$$\left(\tfrac{5}{2} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}\right) D(x).$$

Es ist also nicht nachweisbar, dass für jeden Werth von x $\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2 \Phi(x)}{\varepsilon^2} = 0$ ist. Nichtsdestoweniger lässt sich mit Hilfe der Bedingung der Integrirbarkeit für $f(x)$ zeigen, dass $\Phi(x)$ eine lineare Function von x ist. Sobald dies bewiesen ist, tritt wieder der pag. 268 und 269 geführte Beweis in Kraft. Das Intervall von x bis $x + a$ theilen wir durch die Punkte:

$$x,\ x + \delta_1,\ x + \delta_1 + \delta_2,\ \ldots,\ x + \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_{n-1},\ x + a$$

in Intervalle, und bilden die Summe:

$$D(x + \varrho_1 \delta_1)\delta_1 + D(x + \delta_1 + \varrho_2 \delta_2)\delta_2 + \ldots$$
$$+ D(x + \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \varrho_n \delta_n)\delta_n,$$

wo die ϱ positive echte Brüche sind.

Diese Summe muss vermöge der Bedingung der Integrirbarkeit verschwinden mit verschwindenden δ. Es muss also erst recht verschwinden mit verschwindenden δ:

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2}{\varepsilon^2} \Big\{ \Phi(x + \varrho_1 \delta_1)\delta_1 + \Phi(x + \delta_1 + \varrho_2 \delta_2)\delta_2 + \ldots$$
$$+ \Phi(x + \delta_1 + \delta_2 + \ldots \varrho_n \delta_n)\delta_n \Big\}$$

oder es ist

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2}{\varepsilon^2} \int_0^a \Phi(x+\alpha)\, d\alpha = 0.$$

Daraus folgt nach dem von Herrn H. A. Schwarz bewiesenen Satze, dass

$$\int_0^a \Phi(x+\alpha)\, d\alpha = c_0 + c_1 x$$

ist, wo c_0 und c_1 Constanten sind. Nun ist

$$\int_0^a \Phi(x+\alpha)\, d\alpha = \int_0^a F(x+\alpha)\, d\alpha - \int_0^a F_1(x+\alpha)\, d\alpha.$$

Bezeichnet α_1 einen mittleren Werth der zwischen 0 und a gelegenen Werthe von α, so ist $\int_0^a \Phi(x+\alpha)\, d\alpha$ bei unendlich klein werdendem a

$$\text{gleich } F(x+\alpha_1) - F_1(x+\alpha_1) = \frac{c_0}{a} + \frac{c_1}{a} \cdot x.$$

Lässt man dann a gleich Null werden, so erhalten $F(x)$ und $F_1(x)$ bestimmte Werthe, und dies muss demgemäss auch bei $\frac{c_0}{a}$ und $\frac{c_1}{a}$ der Fall sein. Daher wird

$$F(x) - F_1(x) = c'_0 + c'_1 x,$$

wo c'_0 und c'_1 Constanten sind, und damit sind wir auf den früheren Beweis zurückgeführt.

Wird die Function an einer Stelle unendlich, so müssen die Riemannschen Bedingungen (siehe pag. 253) eintreten.

Hiermit hoffe ich die wesentlichsten Untersuchungen über die Darstellbarkeit willkürlicher Functionen einer Variablen durch trigonometrische Reihen berührt zu haben, welche seit der Abfassung der Riemann'schen Abhandlung erschienen sind, und es bleibt mir nun noch übrig, das von Herrn H. A. Schwarz gegebene Beispiel einer stetigen Function anzuführen, für welche die Fourier'sche Reihe nicht überall convergirt.

V.

Das Intervall von $\frac{\pi}{2}$ bis 0 sei in unendlich viele bis zur Null kleiner werdende Theilintervalle:

$$\frac{\pi}{2} \cdots \frac{\pi}{[1]}, \frac{\pi}{[1]} \cdots \frac{\pi}{[2]}, \cdots, \frac{\pi}{[\lambda-1]} \cdots \frac{\pi}{[\lambda]}, \cdots, \frac{\pi}{[\mu]} \cdots 0$$

III. Die Riemann'sche Habilitationsschrift. Ihr Ziel. Die vorbereitenden Auseinandersetzungen über einige Fundamentalsätze der Analysis. Die beiden Riemann'schen Bedingungen; sie sind hinreichend, und auch nothwendig, aber in einem andern Sinne, als dem bisherigen. Die daraus abzuleitenden Resultate über die Darstellbarkeit. Ueber das Unendlichwerden der Functionen. Ueber das schliessliche Verschwinden der Fourier'schen Coefficienten. Die Convergenz der Fourier'schen Reihe hängt nur von dem Verhalten der Function in der unmittelbaren Umgebung der betrachteten Stelle ab. Beweis dafür mit Hülfe einer Abschätzungsformel von Herrn H. A. Schwarz. Mit deren Hülfe auch Ableitung der Lipschitz'schen Bedingung. Ueber die Functionen mit unendlich vielen Maximis und Minimis.

IV. Ueber die Eindeutigkeit der Entwicklung einer Function in eine trigonometrische Reihe. Die Aufklärung über die Cauchy'sche Ansicht betreffend die Integration einer unendlichen Reihe durch Herrn Weierstrass. Definition des Begriffes der Convergenz in gleichem Grade. Die erste Aufstellung dieses Begriffes durch Herrn Seidel. Durch die Weierstrass'sche Bemerkung waren eine Reihe der bisherigen Beweise in Frage gestellt. Insbesondere der Satz von der Eindeutigkeit der Entwicklung. Heine's Beweis, dass die Fourier'sche Reihe in gleichem Grade convergirt. Vervollständigung dieses Beweises. Der Heine'sche Beweis für die Eindeutigkeit der Entwicklung der stetigen Functionen, die nicht unendlich viele Maxima und Minima haben. Cantor's Fortführung der Heine'schen Untersuchungen ohne Voraussetzung der Convergenz in gleichem Grade. Ihre Ausdehnung auf unendlich oft unstetige Functionen besonderer Art. Ueber das Verhältniss der Heine-Cantor'schen Sätze über die Eindeutigkeit der Entwicklung zu dem Satze, dass die Coefficienten einer convergenten trigonometrischen Reihenentwicklung einer Function die Fourier'sche Form haben müssten. Beide erreichen dasselbe in einem gewissen Functionenbereich. Ausdehnung des zweiten Satzes zu seiner weitesten Brauchbarkeit durch Herrn P. du Bois-Beymond. Dessen Beweismethode.

V. Einfaches Beispiel einer stetigen Function, für welche die Fourier-sche Reihe, welche die Function sonst darstellt, an einer Stelle nicht convergirt.